P1)

Auxiliar 11

P1) Encuentre la serie de Laurent de las siguientes funciones

a) $\dfrac{1}{z^4+z^2}$ en $z_0=0$

sol
$$\frac{1}{z^4+z^2} = \frac{1}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-(-z^2)} = z^{-2}\sum_{n\geq 0}(-z^2)^n \qquad \begin{array}{l}|z|<1\\ |z|>0\end{array}$$
$$= \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^{2(n-1)} = \sum_{n\geq -1}(-1)^{n+1} z^{2n}.$$

b) $\dfrac{1}{z^2(1-z)}$ en $z_0=0$

sol
$$\frac{1}{z^2}\,\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}\sum_{k\geq 0} z^k = \sum_{k\geq -2} z^k$$

c) $\dfrac{1}{z^2(1-z)}$ en $z_0=1$

sol
$$\frac{1}{z^2(1-z)} = \frac{-1}{z^2\,(z-1)} = \frac{-1}{(1+(z-1))^2(z-1)}$$
$$= \frac{-1}{(z-1)}\sum_{k\geq 0}(-1)^k(k+1)(z-1)^k \quad (*) \qquad 0<|z-1|<1$$

En (*) se usó
$$\underbrace{\frac{1}{(1+w)^2} = \frac{1}{(1-(-w))^2}}_{|w|<1} = \left(\sum_{k\geq 0}(-w)^k\right)^2 = \left(\sum_{k\geq 0}\xi^k\right)\left(\sum_{k\geq 0}\xi^k\right) \qquad \xi=-w$$
$$= \sum_{k\geq 0}(k+1)\,\xi^k \qquad \text{(prod. Cauchy)}$$
$$= \sum_{k\geq 0}(-1)^k(k+1)\,w^k$$

usando $w=(z-1)$, $|z-1|<1$
$$\frac{1}{z^2} = \sum_{k\geq 0}(-1)^k(k+1)\,(z-1)^k.$$

D2) Encuentre una serie de Laurent que converge en el anillo $1<|z|<2$, a una rama de $\log\left(\frac{z(2-z)}{1-z}\right)$

sol $\log\left(\frac{z(2-z)}{1-z}\right) = \log(2-z) + \log\left(\frac{z}{1-z}\right)$

$= \log(2) + \log\left(1-\frac{z}{2}\right) + \log\left(\frac{1}{1/z - 1}\right)$

$= \log(2) + \log\left(1-\frac{z}{2}\right) - \log\left(1-\frac{1}{z}\right) \underbrace{-i\pi}_{\log(-1)}$

$\log\left(1-\frac{z}{2}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{2^n n}$, $|z|<2$

$\log\left(1-\frac{1}{z}\right) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^{-n}}{n}$ si $\left|\frac{1}{z}\right|<1$ $\Leftrightarrow |z|>1$

viene de $\log(1-z) = \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ $|z|<1$.

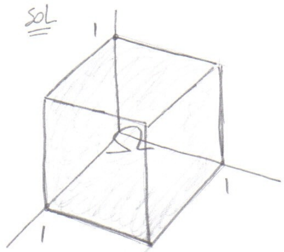
(la derivada).

P3) Resolver la ecuación de Schrödinger en $\mathbb{R}^3$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V\psi \quad (E_c), \quad t \geq 0 \quad ; \quad \int_{\mathbb{R}^3} |\psi|^2 = 1$$

con $V = V(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{en } \Omega \\ \infty & \text{fuera de } \Omega \end{cases}$

Sol



Solución: Primero, asumamos que hay separación de variables:

$$\psi(\vec{r},t) = \phi(\vec{r}) f(t)$$

Entonces, reemplazando en ec., se tiene

$$i\hbar\, \phi(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} f(t) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Delta \phi(\vec{r})) \cdot f(t) + V(\vec{r})\phi(\vec{r}) f(t) \quad \Big/ \cdot \frac{1}{f(t)\phi(\vec{r})}$$

$$i\hbar \frac{\partial_t f(t)}{f(t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \phi(\vec{r})}{\phi(\vec{r})} + V(\vec{r})$$

Como el lado derecho depende solo de $\vec{r}$, y el lado izquierdo solo de t, entonces

$$i\hbar \frac{\partial_t f(t)}{f(t)} = E = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \phi(\vec{r})}{\phi(\vec{r})} + V(\vec{r}) \quad , \text{con } E \text{ constante}$$

De aquí se obtienen dos ecuaciones:

a) $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} f(t) = E f(t)$

b) $-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi(\vec{r}) + V(\vec{r})\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r})$ Ecuación de Schrodinger independiente del tiempo.

Notese que pasamos de una EDP a una EDO y otra EDP.

Resolvamos a).

$$\frac{\partial}{\partial t} f(t) = \frac{E}{i\hbar} f(t) \iff \frac{\dot{f}(t)}{f(t)} = \frac{E}{i\hbar} \iff \frac{d}{dt}\left(\log(f(t))\right) = \frac{E}{i\hbar} \quad \Big/ \int_0^t (\,)dt$$

$$\iff \log(f(t)) - \underbrace{\log(f(0))}_{k} = \frac{Et}{i\hbar}$$

$$\log f(t) = \frac{Et}{i\hbar} + k \quad \Big/ \exp(\,)$$

$$\boxed{f(t) = \tilde{k} e^{\frac{Et}{i\hbar}} = \tilde{k}\, e^{-i\frac{Et}{\hbar}}}$$

Para b) $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi(\vec{r}) + V(\vec{r})\phi(\vec{r}) = E\phi(\vec{r})^{(*)}$, también supongamos separación de variables:

$$\phi(\vec{r}) = X(x)\,Y(y)\,Z(z)$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\left(\frac{d^2}{dx^2}X(x)\right)YZ + X\left(\frac{d^2}{dy^2}Y\right)Z + XY\left(\frac{d^2}{dz^2}Z\right)\right) + VXYZ = EXYZ \quad \Big/ \frac{1}{XYZ}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z}\right) + V(x,y,z) = E \qquad (\#)$$

-) Observación previa: Fuera de Ω, $V=\infty$. Por lo tanto, la única forma de que se satisfaga $(*)$ con la condición $\int|\Psi|^2 = 1$, es que $\phi = 0$ fuera de Ω.

Por lo tanto, $(\#)$ lo resolveremos en Ω, donde $V=0$.

$$\Rightarrow \quad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \quad \Rightarrow \underbrace{\frac{X''}{X}}_{\text{depende de } x} = \underbrace{-\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{Y''}{Y} - \frac{Z''}{Z}}_{\text{depende de } y \text{ y } z}$$

$$\Rightarrow \frac{X''}{X} = -k_1 \quad \wedge \quad -\frac{2mE}{\hbar^2} - \underbrace{\frac{Y''}{Y}}_{\text{depende de } y} - \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{\text{depende de } z} = -k_1 \quad (\#\#)$$

$$X'' = -k_1 X$$

$$\boxed{X(x) = M_{x_1}\cos(\sqrt{k_1}\,x) + M_{x_2}\,\text{sen}(\sqrt{k_1}\,x)}$$

De $(\#\#)$, $\frac{Y''}{Y} = -k_2 = -\frac{Z''}{Z} + k_1 - \frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow \boxed{Y(y) = M_{y_1}\cos(\sqrt{k_2}\,y) + M_{y_2}\,\text{sen}(\sqrt{k_2}\,y)}$$

$$\text{J} \qquad Z'' = \underbrace{\left(k_1 + k_2 - \frac{2mE}{\hbar^2}\right)}_{-k_3} Z \qquad\qquad k_3 = \frac{2mE}{\hbar^2} - k_1 - k_2$$

$$\Rightarrow \boxed{Z(z) = M_{z_1}\cos(\sqrt{k_3}\,z) + M_{z_2}\,\text{sen}(\sqrt{k_3}\,z)}$$

La condición de continuidad de ψ impone que

$$X(x=0) = 0 = X(x=1) \; ; \; Y(y=0) = 0 = Y(y=1) \; ; \; Z(z=0) = 0 = Z(z=1).$$

$\cdot)$ Para X: $\cdot)\ X(0) = M_{x_1}\cos(0) + M_{x_2}\underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{\to 0}$

$$\Rightarrow M_{x_1} = 0$$

$$X(1) = M_{x_2}\operatorname{sen}(\sqrt{k_1}\cdot 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sqrt{k_1} = 2n_x\pi}, \; n_x \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \boxed{X(x) = M_{x_2}\operatorname{sen}(2n_x\pi x)}$$

Analogamente

$\cdot)\ \sqrt{k_2} = 2n_y\pi, \; n_y \in \mathbb{Z}; \quad Y(y) = M_{y_2}\operatorname{sen}(2n_y\pi y)$

$\cdot)\ \sqrt{k_3} = 2n_z\pi, \; n_z \in \mathbb{Z}; \quad Z(z) = M_{z_2}\operatorname{sen}(2n_z\pi y)$

Recordar que $k_1+k_2+k_3 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$

$$\Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_1+k_2+k_3) = \frac{\hbar^2}{2m}\left(4n_x^2\pi^2 + 4n_y^2\pi^2 + 4n_z^2\pi^2\right)$$

$$\boxed{E_{n_xn_yn_z} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m}\left(n_x^2+n_y^2+n_z^2\right)}$$

Estados cuantizados de energía.

Luego, $\phi_{n_xn_yn_z}(x,y,z) = X_{n_x}(x)\, Y_{n_y}(y)\, Z_{n_z}(z)$

$$= M_{x_2}M_{y_2}M_{z_2}\operatorname{sen}(2\pi n_x x)\operatorname{sen}(2\pi n_y y)\operatorname{sen}(2\pi n_z z)$$

y entonces, $\psi_{n_xn_yn_z}(x,y,z,t) = f(t)\,\phi_{n_xn_yn_z}(x,y,z) = \underbrace{\tilde{k}\, M_{x_2}M_{y_2}M_{z_2}}_{c}\;\underbrace{e^{-i\frac{E_{n_xn_yn_z}t}{\hbar}}}_{\tilde{f}(t),\text{ de módulo } 1}\cdot\operatorname{sen}(2\pi n_x x)\operatorname{sen}(2\pi n_y y)\operatorname{sen}(2\pi n_z z)$

C se determina de la condición $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}|\psi|^2\,d\vec{r} = 1$.

$$\int_{\mathbb{R}^3}|\psi(x,y,z,t)|^2 d\vec{r} = \int_0^1\!\!\int_0^1\!\!\int_0^1 c^2\operatorname{sen}^2(2\pi n_x x)\operatorname{sen}(2\pi n_y y)\operatorname{sen}(2\pi n_z z)\,dx\,dy\,dz$$

$$= c^2\int_0^1\operatorname{sen}^2(2\pi n_x x)\,dx\int_0^1\operatorname{sen}^2(2\pi n_y y)\,dy\int_0^1\operatorname{sen}^2(2\pi n_z z)\,dz \quad = 1$$

con $\displaystyle\int_{x=0}^{1}\operatorname{sen}^2(2\pi n_x x)\,dx = \int_{\theta=0}^{2\pi n_x}\operatorname{sen}^2(\theta)\frac{d\theta}{2\pi n_x} = \frac{n_x}{2\pi n_x}\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}^2(\theta)\,d\theta = \frac{\cancel{n_x}}{2\cancel{\pi n_x}}\cdot\cancel{\pi} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow c^2\frac{1}{8} = 1 \quad \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{8}}$$

Observación Hasta aquí es la resolución "de los físicos". Notemos que lo que se hizo fue resolver el problema: encontrar $u = u(x,y,z,t) \in L^2(\Omega)$ (ie, $\int_\Omega |u|^2 < \infty$), tq

$$(Ec)\begin{cases} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} u = \frac{-\hbar^2}{2m} \Delta u & \text{en } \Omega \quad (\text{el potencial es } 0 \text{ en } \Omega) \\ u = 0 & \text{en } \partial\Omega \quad (\text{la condición de "continuidad en el borde" que se había impuesto para } \psi) \end{cases}$$

y se pidió que $\int_\Omega |u|^2 = 1$.

Si agregamos una condición inicial, digamos

$$u(\vec{r},0) = g(\vec{r}) \quad , \text{ con } g \text{ tq } \int_\Omega g = 1 \quad (o\ g \in L^2(\Omega)),$$

falta encontrar la configuración inicial de u. La seguiremos llamando ψ (o sea, $u = \psi$)

Se sabe que la solución general de (Ec) es

$$\psi(x,y,z,t) = \sqrt{8} \sum_{n_x,n_y,n_z \in \mathbb{Z}} a_{n_x n_y n_z} \tilde{f}_{n_x,n_y,n_z}(t)\, X_{n_x}(x)\, Y_{n_y}(y)\, Z_{n_z}(z) \qquad \begin{matrix} a_{n_x n_y n_z} \in \mathbb{C} \text{ constantes} \\ n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \psi(x,y,z,0) = \sqrt{8} \sum_{n_x,n_y,n_z} a_{n_x n_y n_z} X_{n_x}(x) Y_{n_y}(y) Z_{n_z}(z) = \sqrt{8} \sum_{n_x,n_y,n_z} a_{n_x n_y n_z} \phi_{n_x,n_y,n_z}(x,y,z). \quad (*)$$

Notar que $\left(\phi_{n_x,n_y,n_z}\right)_{\substack{n_x \in \mathbb{Z} \\ n_y \in \mathbb{Z} \\ n_z \in \mathbb{Z}}}$ es una base ortogonal de las funciones de cuadrado integrables:

$$\langle \phi_{n_x n_y n_z}, \phi_{n_x' n_y' n_z'} \rangle = \int_\Omega \phi_{n_x n_y n_z} \overline{\phi_{n_x',n_y',n_z'}}\, d\vec{r} = \begin{cases} 1/8 & n_x = n_x';\ n_y = n_y';\ n_z = n_z' \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

($\langle \cdot,\cdot \rangle$ producto interno en $L^2(\Omega)$, $\|g\|_2 = \langle g, g \rangle$)

$$\iiint_{z\,y\,x} \operatorname{sen}(2\pi n_x x) \operatorname{sen}(2\pi n_y y) \operatorname{sen}(2\pi n_z z) \operatorname{sen}(2\pi n_x' x) \operatorname{sen}(2\pi n_y' y) \operatorname{sen}(2\pi n_z' z)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \underbrace{\int_z \operatorname{sen}(2\pi n_z z) \operatorname{sen}(2\pi n_z' z)\, dz}_{I_z} \underbrace{\int_y \operatorname{sen}(2\pi n_y y) \operatorname{sen}(2\pi n_y' y)\, dy}_{I_y} \underbrace{\int_x \operatorname{sen}(2\pi n_x x) \operatorname{sen}(2\pi n_x' x)\, dx}_{I_x}$$

$$I_z = \int_{z=0}^1 \operatorname{sen}(2\pi n_z z) \operatorname{sen}(2\pi n_z' z)\, dz$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{z=0}^1 \cos(2\pi(n_z - n_z')z)\, dz - \int_{z=0}^1 \cos(2\pi(n_z + n_z')z)\, dz \right)$$

- $\left(\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}\beta \right)$
  $\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}\beta$
  $\frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2} = \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta)$

Si $n_z = n_z'$, $I_z = \frac{1}{2}\left(\int_{z=0}^1 \overbrace{\cos(0)}^{1}\, dz - \int_{z=0}^1 \cos(4\pi n_z z)\, dz \right)$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \underbrace{\frac{1}{4\pi n_z} \operatorname{sen}(4\pi n_z z)\Big|_{z=0}^{z=1}}_{=0}\right)$$

$$= 1/2$$

Si $n_z \neq n_z' \Rightarrow I_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sen}(2\pi(n_z - n_z')z)}{2\pi(n_z-n_z')}\Big|_{z=0}^{1} - \frac{\operatorname{sen}(2\pi(n_z+n_z')z)}{2\pi(n_z+n_z')}\Big|_{z=0}^{1} \right)$

$= \frac{1}{2}(0-0) = 0.$ (y es análogo para I_y, I_x)

O sea, si tenemos $\tilde{\phi}_{n_x n_y n_z} = \sqrt{8}\,\phi_{n_x n_y n_z}$, $(\tilde{\phi}_{n_x n_y n_z})$ es una base ortonormal del espacio de las funciones de cuadrado integrables, y queda

$$\psi(x,y,z,t) = \sum_{n_x n_y n_z} a_{n_x n_y n_z} f_{n_x n_y n_z}(t)\, \tilde{\phi}_{n_x n_y n_z}(x,y,z)$$

Ahora bien, como $g \in L^2(\Omega)$, se puede descomponer como suma de sus proyecciones en ~~en~~ la base ortonormal de $L^2(\Omega) = \langle (\phi_{n_x n_y n_z})_{n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}} \rangle$

(así como $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$, con $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, y
$x = \vec{r}\cdot\hat{\imath} = \langle \vec{r}, \hat{\imath}\rangle$; $y = \vec{r}\cdot\hat{\jmath} = \langle \vec{r}, \hat{\jmath}\rangle$; $z = \vec{r}\cdot\hat{k} = \langle \vec{r}, \hat{k}\rangle$)

$$\Rightarrow \boxed{g = \sum_{n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}}' c_{n_x, n_y, n_z}\, \tilde{\phi}_{n_x n_y n_z}}$$

con $c_{n_x, n_y, n_z} = \langle g, \tilde{\phi}_{n_x, n_y, n_z}\rangle = \int_\Omega g(x,y,z)\, \tilde{\phi}_{n_x, n_y, n_z}(x,y,z)\, dx\,dy\,dz$

Ahora, recordando que $\psi(x,y,z,0) = \sum_{n_x n_y n_z} a_{n_x n_y n_z} \tilde{\phi}(x,y,z)$ (viene de $*$ en la página anterior)
y la condición inicial decía $\psi(x,y,z,0) = g(x,y,z)$ en Ω, se concluye que la solución del problema con condición de borde y condición inicial es

$$\psi(x,y,z,t) = \sum_{n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}}' c_{n_x, n_y, n_z}\, \tilde{f}_{n_x, n_y, n_z}(t) \cdot \tilde{\phi}_{n_x, n_y, n_z}(x,y,z)$$ (o sea, $a_{n_x, n_y, n_z} = c_{n_x n_y n_z}$)

$$= \sum_{n_x n_y n_z \in \mathbb{Z}} \sqrt{8}\underbrace{\left(\int_\Omega g\, \tilde{\phi}_{n_x n_y n_z}\, d\vec{r}\right)}_{c_{n_x n_y n_z}} \cdot e^{-i\frac{E_{n_x n_y n_z} t}{\hbar}} \operatorname{sen}(2\pi n_x x)\operatorname{sen}(2\pi n_y y)\operatorname{sen}(2\pi n_z z)$$

; $E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{2\pi^2\hbar^2}{m}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$.

Obs: Si g tuviera forma explícita, se podría conocer $c_{n_x n_y n_z}$ más claramente.