# Problemas Propuestos **Nº2**

Profesor: Felipe Álvarez
Auxiliares: Germán Ibarra - Felipe Serrano - Emilio Vilches

**Problema 1** La Cicloide (como ya se vio en clases) se define como el lugar geométrico descrito por un punto solidario a una rueda (de radio R) que gira sin resbalar.

1. Encontrar la parametrización para el caso general en que el radio de la circunferencia es $R$ y el punto solidario se encuentra a una distancia $a$ del centro. Analice regularidad para los casos $a < R$, $a > R$ y $a = R$. (Se vio en clases)
   De ahora en adelante considere los valores $R = a = 1$
2. Encuentre la parametrización en longitud de arco.
3. Encuentre el vector Tangente, la Curvatura, Vector Normal y Binormal.
4. Encuentre la parametrización de una recta tangente a la cicloide en un ángulo $\alpha$ fijo.

**Problema 2 (Espirales de Maclaurin)** Estas corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descrita en coordenadas polares las variables $\rho$ y $\theta$ satisfacen la relación:

$$\rho(\theta) = a(\sin(n\theta))^{\frac{1}{n}}$$

donde $a > 0$ y $n \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ corresponde al orden del espiral. Pruebe que la curvatura de una Espiral de Maclaurin de orden $n$ es:

$$\kappa(\theta) = \frac{(n+1)}{a}(\sin(n\theta))^{\frac{n-1}{n}}$$

**Problema 3** Probar que todas las normales de la curva

$$\vec{r}(t) = a\left(\cos t + t\sin t, \sin t - t\cos t\right)$$

son equidistantes del origen.

**Problema 4** ¿En que punto la curva $y = e^x$ tiene máxima curvatura?

**Problema 5** Pruebe que cualquier tangente a la curva

$$x^2 = 3y, \quad 2xy = 9z$$

forma un ángulo constante a cierta dirección (fija). Encuentre el ángulo y la dirección.

**Problema 6** En la esfera unitaria se tiene la curva $\varphi = \theta$. Encuentra el radio de curvatura y la torsión.

**Problema 7** Demostrar que una curva es una recta, si y solo si, todas sus tangentes pasan por un punto fijo, o también si y solo si, todas sus tangentes son paralelas a una dada.

**Definición 1** Sea $\vec{r}(t)$ una parametrización regular cuyas funciones torsión y curvatura no se anulan en ningún punto. $\vec{r}(t)$ es una **hélice** de eje $\hat{e}$ y ángulo $\theta$, si todos los vectores tangentes a $\vec{r}(t)$ forman un ángulo $\theta$ con $\hat{e}$.

**Problema 8** Pruebe que:

1. Si $\vec{r}(t)$ es una hélice caracterizada por $(\hat{e}, \theta)$, el vector unitario $\hat{e}$ es combinación lineal de $\hat{t}$ y $\hat{b}$ para todo $t$. Calcule los coeficientes de la combinación lineal.

2. $\vec{r}(t)$ es una hélice si y sólo si $\frac{\kappa}{\tau}$ es constante. Expresar este cociente en función del ángulo $\theta$ de la hélice.

3. Una parametrización en longitud de arco $\vec{r}$, cuya curvatura y torsión no se anulan es una hélice si y sólo si
$$\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \times \frac{d^3\vec{r}}{dt^3}\right) \cdot \frac{d^4\vec{r}}{dt^4} = 0$$

**Problema 9** Estudiar la parametrización

$$\vec{r}(t) = \left(\cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right), \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

Demostrar que es una hélice, calcular su eje y su ángulo.

**Problema 10** Sea $\vec{r}$ una parametrización en longitud de arco de una curva cuya torsión no se anula y que esta contenida en una esfera. Demostrar que dicha curva no tiene puntos de inflexión y que la función:

$$\frac{1}{\kappa^2} + \left(\frac{1}{\tau\kappa^2}\frac{d\kappa}{dt}\right)^2$$

es constante. Calcule su valor.

**Problema 11** Determinar la función $\phi$ tal que la curva

$$\vec{r}\,(t) = \left(\int_0^t \phi(s)\sin(s)ds, \int_0^t \phi(s)\cos(s)ds, \int_0^t \phi(s)\tan(s)ds\right) \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

tenga curvatura constante.

**Problema 12** Estudiar la espiral de Cornu, definida en términos de integrales de Fresnel de la siguiente manera:

$$x(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du, \qquad y(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{u^2}{2c^2}\right) du$$

**Problema 13** Mostrar que una curva de clase $\mathcal{C}^4$ tal que $\kappa \neq 0$, $\tau \neq 0$, esta en una esfera si y solo si

$$\frac{\tau}{\kappa} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\kappa}{\kappa^2\tau}\right) = 0.$$

**Problema 14** Se denomina **hélice general** a aquella curva cuyas tangentes forman un ángulo constante con una dirección fija. Demostrar que una curva es una hélice general si y sólo si sus binormales forman un ángulo constante con una recta fija.

**Problema 15 (Evolutas)** Al lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva plana se le llama su evoluta. Parametrizamos por $\beta(t)$=centro de curvatura de $\gamma$ en $t$.

1. Encontrar la evoluta de la parábola $\gamma(t) = \left(t, \frac{1}{2}t^2\right)$, $t \in \mathbb{R}$.
2. Dada la cicloide $\gamma(t) = \frac{1}{4}\left(t - \sin(t), 1 - \cos(t)\right)$, $t \in \mathbb{R}$, muestre que la evoluta de $\gamma$ es una translación de $\gamma$.
3. Dada una curva regular $\gamma(t)$, con curvatura $\kappa(t)$, demuestre que $\rho(t) = \frac{1}{\kappa(t)}$ es una función longitud de arco para la evoluta de $\gamma$.

**Problema 16 (Curvas Esféricas)** Sea $\gamma$ una curva regular parametrizada en longitud de arco con $\tau \neq 0$.

1. Muestre que si $\gamma$ esta contenida en la esfera de centro $P$ y radio $r$, entonces
$$\gamma = P - \frac{1}{\kappa}\vec{N} + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right)\vec{B}$$
2. Muestre que si $\kappa' \neq 0$, entonces $\gamma$ esta contenida en una esfera si y solo si
$$\left(\frac{1}{\kappa}\right)^2 + \left(\left(\frac{1}{\kappa}\right)' \frac{1}{\tau}\right)^2 = r^2$$

**Problema 17** Encuentre todas las funciones $f(t)$ que hacen que la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), f(t))$ sea una curva plana.

**Problema 18** La curva plana
$$\vec{r}(t) = (t, \cosh(t))$$
recibe el nombre de catenaria, pues corresponde a la figura que adopta una cadena o hilo, colgada de sus extremos y bajo la acción del campo gravitatorio.

Calcular:

1. El vector tangente y el vector normal.
2. Curvatura. ¿Donde es máxima?
3. Torsión