Coordenadas Parabólicas.

Por Emilio Vilches.

6 de agosto de 2007

- Calcular el elemento de volumen en coordenadas parabólicas (ϵ, η, ϕ) que se relacionan con las coordenadas cartesianas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x &= \epsilon\eta\cos(\phi) \\ y &= \epsilon\eta\sin(\phi) \\ z &= \tfrac{1}{2}\left(\eta^2 - \epsilon^2\right) \end{aligned} \tag{1}$$

  donde $\eta, \epsilon \geq 0$ y $\phi \in [0, 2\pi]$.

- Justifique el nombre de este sistema de coordenadas.

Solución.

En un sistema de coordenadas ortogonal se debe cumple que

$$dV = h_u h_v h_w du dv dw$$

donde h_u, h_v, h_w son los factores escalares asociado a este sistema de coordenadas.
en este caso se tiene que $u = \eta$, $v = \epsilon$ y $w = \phi$.
de (1) se tiene que cualquier punto en el espacio se puede expresar como:

$$\vec{r}(\eta, \epsilon, \phi) = \left(\epsilon\eta\cos(\phi), \epsilon\eta\sin(\phi), \tfrac{1}{2}\left(\eta^2 - \epsilon^2\right)\right) \quad \phi \in [0, 2\pi] \quad \eta, \epsilon \geq 0$$

ahora verificamos que sea un sistema ortogonal, para ello calculamos :

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\vec{r}(\eta,\epsilon,\phi)}{\partial\eta} &= (\epsilon\cos(\phi), \epsilon\sin(\phi), \eta) \\ \tfrac{\partial\vec{r}(\eta,\epsilon,\phi)}{\partial\epsilon} &= (\eta\cos(\phi), \eta\sin(\phi), -\epsilon) \\ \tfrac{\partial\vec{r}(\eta,\epsilon,\phi)}{\partial\phi} &= (-\eta\epsilon\sin(\phi), \eta\epsilon\cos(\phi),) \end{aligned}$$

es fácil verificar que estos vectores son ortogonales entre si, luego estos vectores son linealmente independientes, además si los normalizamos (dividimos por su norma) estos vectores forman un vector ortonormal.
por definición los factores escalares son

$$\begin{aligned} h_u &= \| \tfrac{\partial\vec{r}}{\partial u} \| \\ h_v &= \| \tfrac{\partial\vec{r}}{\partial v} \| \\ h_w &= \| \tfrac{\partial\vec{r}}{\partial w} \| \end{aligned}$$

luego

$$\begin{gathered}h_\eta=\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\|=\sqrt{\epsilon^2+\eta^2}\\ h_\epsilon=\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\epsilon}\|=\sqrt{\epsilon^2+\eta^2}\\ h_\phi=\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\phi}\|=\eta\epsilon\end{gathered}$$

por lo tanto el diferencial de volumen es:

$$dV=\left(\epsilon^2+\eta^2\right)\eta\epsilon d\eta d\epsilon d\phi$$

notemos que para que este diferencial tenga unidades de volumen necesariamente η y ϵ deben tener unidades de longitud$^{\frac{1}{2}}$, este se desprende por análisis dimensional, pero también se puede obtener de (1).

en efecto, al manipular un poco las expresiones de (1) se encuentra que:

$$\begin{gathered}x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}\left(\eta^2+\epsilon^2\right)^2\\ z=\frac{1}{2}\left(\eta^2-\epsilon^2\right)\end{gathered}$$

de donde

$$\begin{gathered}\eta=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z}\\ \epsilon=\sqrt{\sqrt{x^2+y^2+z^2}-z}\end{gathered} \tag{2}$$

de donde si asumimos que (x,y,z) tienen unidades de longitud entonces (η,ϵ) tienen unidades de longitud$^{\frac{1}{2}}$.
Ahora la razón por que se llaman coordenadas parabólicas, surge de considerar dos casos:

- $\epsilon=cte\neq 0$, despejando de (2) se obtiene

  $$z=\frac{x^2+y^2}{2\epsilon^2}-\frac{1}{2}\epsilon^2$$

  que es la ecuación de un paraboloide de revolución abierto hacia arriba.

- $\eta=cte\neq 0$, en este caso se obtiene

  $$z=\frac{\eta^2}{2}-\frac{\left(x^2+y^2\right)}{2\eta^2}$$

  que también es la ecuación de un paraboloide de revolución abierto hacia abajo.