

1 Solución Ejercicio auxiliar número uno:

Sea el vector de muestra aleatoria \vec{X} con componentes distribuidas iid $U \sim (0, \theta)$ determinar sesgo, ECM y eficiencia relativa para el estimador: $\hat{\theta} = \text{Max}\{x_i\}$ (para la eficiencia relativa comparar con el estimador: $\hat{t} = \frac{(n+1)\text{Max}\{x_i\}}{n}$)

1.1 Sesgo.

Necesitamos la esperanza del estimador. Luego necesitamos la función de distribución asociada a la variable aleatoria $\hat{t} = \text{Max}\{x_i\}$. Para ello se buscará primero la función acumulada (la derivada de la acumulada es la función densidad).

$$F_t(t) = P(\text{Max}\{x_i\} < t) = P(x_1 < t, x_2 < t, \dots, x_n < t) = P(x_1 < t)P(x_2 < t) \dots P(x_n < t) = [P(x_i < t)]^n$$

Pero sabemos la función de distribución acumulada para x_i . Esta es:

$$F_x(t) = \frac{x}{\theta} = P(x < t)$$

con $0 < x < \theta$ y 1 si $x \geq \theta$ y 0 si $x < 0$.

Luego

$$F_t(t) = [P(x_i < t)]^n = \frac{n}{\theta} I_{\{0, \theta\}}(t)$$

$$\Rightarrow f_t(t) = n \frac{t^{n-1}}{\theta^n}$$

$$\Rightarrow E(t^k) = \int_0^\theta t^k \frac{nt^{n-1}}{\theta^n} dt = \frac{\theta^k n}{(n+k)}$$

$$k=1 \Rightarrow E(t) = \frac{\theta n}{(n+1)}$$

Opcionalmente, se podría haber visto la tabla de distribuciones (:P).
Luego el sesgo queda:

$$\text{sesgo} = \frac{\theta n}{(n+1)} - \theta$$

Ejercicio: interpretar el resultado del sesgo.

1.2 ECM.

Necesitamos la varianza. Podemos usar la fórmula de modo que :

$$Var(t) = E(\hat{\theta}^2) - E(\hat{\theta})^2 = \frac{\theta^2 n}{(n+2)} - \frac{\theta^2 n^2}{(n+1)^2}$$

Luego tenemos

$$ECM(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2 n}{(n+2)} - \frac{\theta^2 n^2}{(n+1)^2} + \frac{\theta^2 (n-1)}{(n+1)} = \theta^2 \frac{(n^3 + 2n^2 - 2)}{(n+1)^2(n+2)}$$

θ

Ejercicio: interpretar.

1.3 Eficiencia relativa (usando como segundo estimador $\tilde{\theta} = \frac{(n+1)Max\{x_i\}}{n}$).

$$E(\tilde{\theta}) = \theta$$

Verificar como ejercicio (Hint: usar esperanza del estimador $\hat{\theta}$ y propiedades de la esperanza).

$$Var(\tilde{\theta}) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

Con esto:

$$Ef(\hat{\theta}, \tilde{\theta}) = \frac{n^2}{(n+1)^2} < 1, \forall n$$

Entonces: $\hat{\theta}$ es más eficiente que $\tilde{\theta}$.

Dudas, sugerencias, errores: didiaz@ing.uchile.cl o por el foro de ucursos.