

# SOLUCION AUXILIAR NUMERO TRES

## MA34B

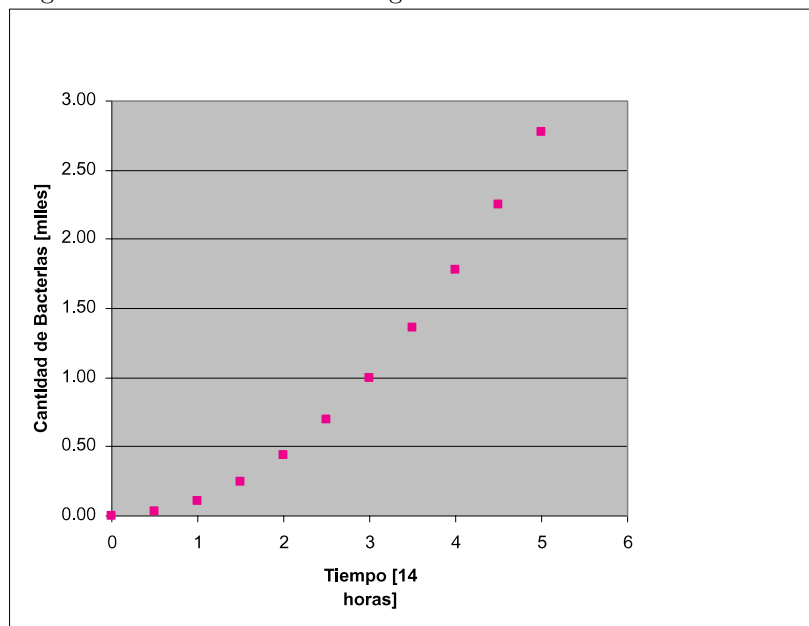
Auxiliar: Diego Díaz Espinoza, Profesor: Alexis Peña

August 25, 2007

### 1 Ejercicio con nota.

#### 1.1 Gráfico.

Se grafica la tabla de datos entregada.



## 1.2 Estimación de $\theta$ .

### 1.2.1 Usando EMM.

$$\mu_1 = E[x] = m_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}$$

Calculando la esperanza:

$$\begin{aligned} E[x] &= \int_0^\theta x \frac{(\alpha+1)}{\theta^{\alpha+1}} x^\alpha = \frac{(\alpha+1)}{\theta^{\alpha+1}} \int_0^\theta x^{\alpha+1} = \frac{(\alpha+1)}{\theta^{\alpha+1}(\alpha+2)} x^{\alpha+2} \Big|_0^\theta \\ &= \frac{(\alpha+1)}{(\alpha+2)} \theta \end{aligned}$$

Luego el estimador quedaría:

$$\hat{\theta} = \frac{(\alpha+2)}{(\alpha+1)} \bar{x}$$

Ejercicio: Verificar si es sesgado y si es suficiente.

### 1.2.2 Usando EMV.

Debemos maximizar la función de verosimilitud respecto al parámetro buscado ( $\theta$ ). Veamos primero la función de verosimilitud:

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i|\theta) = \prod_{i=1}^n \frac{(\alpha+1)}{\theta^{\alpha+1}} x_i^\alpha = \frac{(\alpha+1)^n}{\theta^{n\alpha+n}} \prod_{i=1}^n x_i^\alpha$$

Recordar que estamos viendo esta función respecto a  $\theta$  no respecto a  $x$ . Así tenemos que maximizar esta función, es decir, encontrar el valor de  $\theta$  que hace máximo al evaluar. Pero como esta es una función estrictamente decreciente tal que  $L(\theta) \rightarrow 0$  cuando  $\theta \rightarrow \infty$  y  $L(\theta) \rightarrow \infty$  cuando  $\theta \rightarrow 0$  y por otro lado el dominio está acotado puesto que  $0 < x < \theta \Rightarrow \theta > x_i \quad \forall x_i$  esto implica necesariamente que  $\theta > \max\{x_i\}$ . Así la función puede tomar valores para  $\theta$  muy cercanos al  $\max\{x_i\}$  pero nunca alcanzarlo, de este modo el estimador máximo verosímil es  $\hat{\theta} = \max\{x_i\}$ .

## 1.3 Buscar un estimador insesgado para el EMV.

Usando la fórmula que se entrega para la Esperanza generalizada del estimador se tiene:

$$E[\hat{\theta}] = \theta \frac{(n\alpha + 1)}{(n\alpha + n + 1)}$$

Luego se busca un estimador tal

$$E[\hat{\theta}] = \theta$$

Supongamos el estimador insesgado es

$$\tilde{\theta} = \text{Max}\{x_i\} \frac{(n\alpha + n + 1)}{(n\alpha + 1)}$$

Calculemos la esperanza:

$$\begin{aligned} E[\tilde{\theta}] &= E[\text{Max}\{x_i\} \frac{(n\alpha + n + 1)}{(n\alpha + 1)}] = \frac{(n\alpha + n + 1)}{(n\alpha + 1)} E[\text{Max}\{x_i\}] \\ &= \frac{(n\alpha + n + 1)}{(n\alpha + 1)} \theta \frac{(n\alpha + 1)}{(n\alpha + n + 1)} = \theta \end{aligned}$$

Luego el estimador propuesto es insesgado.

#### 1.4 Estimación relativa.

Se usa:  $ef(\hat{\theta}, \tilde{\theta}) = \frac{Var(\hat{\theta})}{Var(\tilde{\theta})}$ . Calculemos entonces las varianzas correspondientes:

Luego si  $k = 2$  se tiene

$$Var(\tilde{\theta}) = \frac{(n\alpha + n + 2)}{(n\alpha + 1)} \theta^2 - \theta^2 \frac{(n\alpha + 1)^2}{(n\alpha + n + 1)^2} = \theta^2 \left[ \frac{(n\alpha + n + 2)}{(n\alpha + 1)} - \frac{(n\alpha + 1)^2}{(n\alpha + n + 1)^2} \right]$$

Y la otra varianza queda:

$$Var(\hat{\theta}) = \theta^2 \frac{(n\alpha + 1)}{(n\alpha + n + 2)} - \theta^2 \frac{(n\alpha + 1)^2}{(n\alpha + n + 1)^2} = \theta^2 \left[ \frac{(n\alpha + 1)}{(n\alpha + n + 2)} - \frac{(n\alpha + 1)^2}{(n\alpha + n + 1)^2} \right]$$

Ahora para calcular la eficiencia hagamos  $\alpha = 1$  tal como lo indica el enunciado, así:

$$\begin{aligned} ef(\hat{\theta}, \tilde{\theta}) &= \frac{Var(\hat{\theta})}{Var(\tilde{\theta})} \\ Var(\hat{\theta}) &= Var(\text{Max}\{x_i\}) \end{aligned}$$

$$Var(\tilde{\theta}) = Var(Max\{x_i\} \frac{(n\alpha + n + 1)}{(n\alpha + 1)}) = \frac{(n\alpha + n + 1)^2}{(n\alpha + 1)^2} Var(Max\{x_i\})$$

Luego el cociente queda

$$\frac{Var(\hat{\theta})}{Var(\tilde{\theta})} = \frac{Var(Max\{x_i\})}{\frac{(n\alpha + n + 1)^2}{(n\alpha + 1)^2} Var(Max\{x_i\})} = \frac{(n\alpha + 1)^2}{(n\alpha + n + 1)^2} < 1$$

Con lo que

$$\frac{Var(\hat{\theta})}{Var(\tilde{\theta})} < 1 \Leftrightarrow Var(\hat{\theta}) < Var(\tilde{\theta})$$

Y esto implica que  $\hat{\theta}$  es más eficiente.

## 2 Ejercicio resuelto en pizarra.

### 2.1 Ejercicio.

### 2.2 Demostración.

#### 2.2.1 Usando función generadora de momentos (f.g.m.).

$$\begin{aligned} E(e^{x^2 t}) &= \int_0^\infty e^{x^2 t} \frac{2}{\alpha} x e^{-\frac{x^2}{\alpha}} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty x e^{x^2 t - \frac{x^2}{\alpha}} dx = \frac{2}{\alpha} \int_0^\infty x e^{-(t - \frac{1}{\alpha})x^2} dx \\ &= \frac{2}{\alpha} \left[ \frac{e^{-(t - \frac{1}{\alpha})x^2}}{2(t - \frac{1}{\alpha})} \right]_0^\infty = \frac{1}{\alpha} \left[ \frac{1}{(t - \frac{1}{\alpha})} \right] = \frac{\frac{1}{\alpha}}{(t - \frac{1}{\alpha})} \end{aligned}$$

Viendo en las tablas de distribuciones la f.g.m. de la exponencial vemos que es  $\frac{\lambda}{(t - \lambda)}$ . Luego si  $\lambda = \frac{1}{\alpha}$  entonces  $x^2 \sim \exp(\frac{1}{\alpha})$ . Además si se calcula el EMV para la exponencial, se tendrá que  $\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$ . Con lo que  $\hat{\alpha} = \bar{x}$ .

#### 2.2.2 Usando el teorema de cambio de variable de probabilidades.

Sea

$$u = x^2$$

Entonces:

$$\frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{1}{2x}$$

Luego:

$$f(x^2|\alpha) = \frac{2}{\alpha} x e^{\frac{-x^2}{\alpha}} \left\| \frac{1}{2x} \right\| = \frac{e^{\frac{-x^2}{\alpha}}}{\alpha}$$

Esto es la distribución de  $\exp(\frac{1}{\alpha})$ .

### 2.3 ¿EMV es estadístico suficiente?.

Primero encontremos el EMV. El estadístico suficiente es  $\hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$  (demostración: ejercicio). Luego es suficiente puesto que se puede descomponer en dos funciones, una que depende sólo de la muestra  $H(X) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$  y otra función que depende solamente del parámetro,  $G(\alpha) = 1 : P$ .