MA36A-**Variable Compleja y Funciones Especiales**
Profesor: Juan Dávila
Auxiliares: Julio Backhoff y Omar Larré
Clase auxiliar 5

1. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y f holomorfa en D.

- Pruebe que si existe $z_o \in D$ y $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z_o) = 0$ para todo $n \geq n_o$, entonces f es un polinomio.
- Pruebe que si para todo $z \in D$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(z) = 0$, entonces f es un polinomio.

2.

- Sea $P(z)$ un polinomio no constante. Muestre que P es sobreyectivo.
- Sea f analítica en U un dominio. Pruebe que si $|f(z)|$ es constante en U, entonces f es constante

3. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función analítica tal que $|f(z)| = 1$ si $|z| = 1$. Probar que $f(z) = e^{i\theta} z^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

   .

4. Sea f analítica en $\Delta = \{z \ ; |z| < 1\}$. Pruebe que existe una sucesión (z_n) en Δ tal que $z_n \to z \in \partial\Delta$ y de manera que $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ existe (es finito).Para esto, considere los casos en que f tiene infinitos ceros, ninguno o una cantidad finita de estos y concluya.