MA57C Control Óptimo. Semestre 2007-2
Profesor: Rafael Correa **Auxiliar:** Oscar Peredo.

Clase Auxiliar #1

31 de julio de 2007

1. Problema clásico de EDO

Problema 1.1. *Considere el sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + w(t) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

con $w(t)$ función T-periódica, i.e., $w(t) = w(t+T)$. Encuentre una solución periódica del sistema.

Solución 1.1. *La solución del sistema se escribe:*

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}w(s)ds$$

Buscamos $x(t)$ tal que $x_0 = x(0) = x(T)$:

$$\begin{aligned} x(T) &= e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-s)}w(s)ds \\ x_0 &= e^{AT}x_0 + \int_0^T e^{A(T-s)}w(s)ds \\ x_0 &= (I - e^{AT})^{-1} \int_0^T e^{A(T-s)}w(s)ds \end{aligned}$$

Ahora, probemos que $x(0) = x(T)$ implica $x(t) = x(t+T)$. Denotemos $f(t) = x(T+t)$. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= Ax(t+T) + w(t+T) \\ &= Af(t) + w(t) \\ f(0) &= x(T) \\ &= x(0) \end{aligned}$$

Por teorema de existencia-unicidad de EDO, $f(t) = x(t)$, i.e., $x(t+T) = x(t)$.

2. Descomposición de Kalman

Problema 2.1 (Descomposición del espacio controlable)**.** *Pruebe que si la matríz de controlabilidad del sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

tiene rango $r < n$, entonces existe una matríz invertible T , tal que $z = Tx$ y el sistema se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} \\ 0 & \overline{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overline{B}_1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= [\overline{C}_1, \overline{C}_2] \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} + Du\end{aligned}$$

con $\overline{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

Solución 2.1. *Como el sistema no es controlable, se tiene que*

$$dim(\underbrace{Im[B|AB|A^2B|...|A^{n-1}B]}_{\mathcal{R}}) = r < n$$

Sea $\{q_1, ..., q_r\}$ base de $\mathcal{R}$. Notemos que para cada $i = 1, ..., r$, el vector Aq_i es combinación lineal de vectores en $\{q_1, ..., q_r\}$, pues $A\mathcal{R} \subset \mathcal{R}$ (por Cayley-Hamilton). Definamos

$$P^{-1} \triangleq Q \triangleq [q_1, q_2, ..., q_r, q_{r+1}, ..., q_n]$$

donde $q_{r+1}, ..., q_n$ son vectores l.i. entre si y l.i. con respecto a la base $\{q_1, ..., q_r\}$. Con esto, la transformación $z = Px$ satisface lo que necesitamos. En efecto,

$$\begin{aligned} P\dot{x} &= PAP^{-1}Px + PBu \\ y &= CP^{-1}Px + Du \end{aligned}$$

Es decir

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \overline{A}z + \overline{B}u \\ y &= \overline{C}z + Du \end{aligned}$$

De álgebra lineal, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 2.1. *Sean $\{v_1, ..., v_n\}$ y $\{q_1, ..., q_n\}$ bases de $\mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matríz real representada en la base $\{v_1, ..., v_n\}$. Entonces la matríz $\overline{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ construída de la forma*

$$\overline{A} = Q^{-1}AQ$$

con $Q = [q_1, ..., q_n]$ tal que la columna j-ésima de $\overline{A}$ es la representación del vector Aq_j en la base $\{q_1, ..., q_n\}$, es decir,

$$Aq_j = [q_1, ..., q_n] \begin{pmatrix} \overline{a}_{1j} \\ \ddots \\ \overline{a}_{nj} \end{pmatrix}$$

■

Como Aq_j se escribe de la forma

$$Aq_j = \sum_{k=1}^{r} \beta_k q_k$$

para $j = 1, ..., r$, se obtiene la igualdad

$$\sum_{k=1}^{r} \beta_k q_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{a}_{jk} q_k$$

Luego, $\overline{a}_{jk} = 0$ para $k = r + 1, ..., n$ y $j = 1, ..., r$.□

Problema 2.2 (Descomposición del espacio observable)**.** *Pruebe que si la matríz de observabilidad del sistema*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

tiene rango $r < n$, entonces existe una matríz invertible T , tal que $z = Tx$ y el sistema se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\dot{z}_1 \\ \dot{z}_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}\overline{A}_{11} & 0 \\ \overline{A}_{21} & \overline{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1 \\ z_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\overline{B}_1 \\ \overline{B}_2\end{pmatrix} u \\ y &= [\overline{C}_1, 0]\begin{pmatrix}z_1 \\ z_2\end{pmatrix} + Du\end{aligned}$$

con $\overline{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r\times r}$.

Solución 2.2. *Análogo al anterior.*

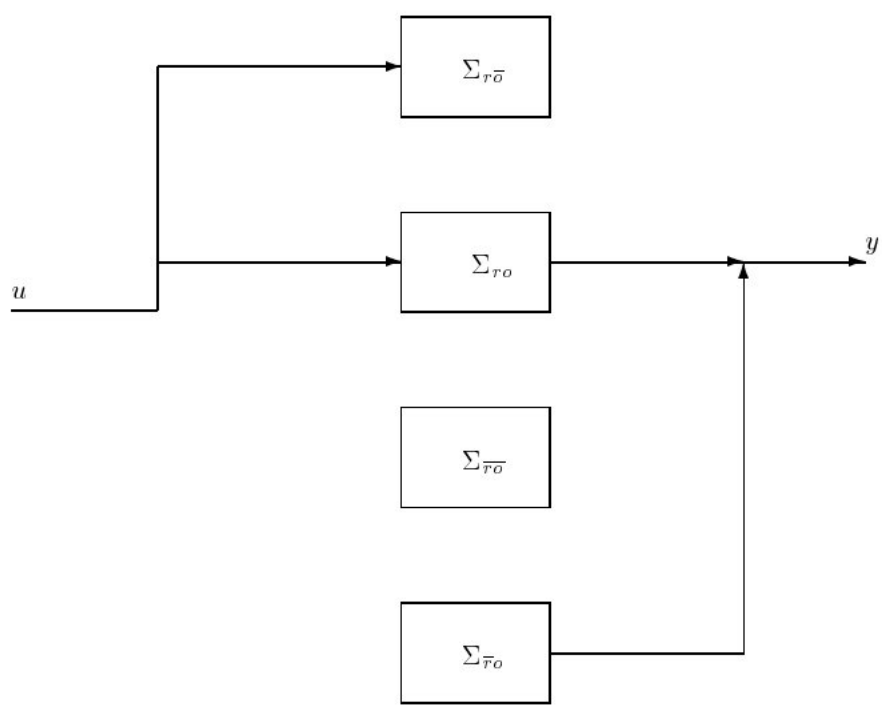
La descomposición de Kalman se construye utilizando las 2 descomposiciones anteriores:

$$T = [T_{r\overline{o}} \qquad T_{ro} \qquad T_{\overline{r}\overline{o}} \qquad T_{\overline{r}o}]$$

donde r: controlable (reachable), o: observable, $\overline{r}$: no controlable, $\overline{o}$: no observable. Las matrices transformadas quedan de la forma:

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \begin{bmatrix} A_{r\overline{o}} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{ro} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{\overline{r}\overline{o}} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{\overline{r}o}\end{bmatrix} \\ \widehat{B} &= \begin{bmatrix} B_{r\overline{o}} \\ B_{ro} \\ 0 \\ 0\end{bmatrix} \\ \widehat{C} &= \begin{bmatrix} 0 & C_{ro} & 0 & C_{\overline{r}o}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Con esto, los estados se dividen en 4 grupos: $\Sigma_{r\overline{o}}, \Sigma_{ro}, \Sigma_{\overline{r}\overline{o}}, \Sigma_{\overline{r}o}$.



3. Sistemas Lineales Discretos de Primer Orden

Consideremos el sistema lineal autónomo

$$\begin{cases} x_{t+1} = Ax_t + B \\ x_0 \text{ dado} \end{cases} \tag{1}$$

con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^n$ y $x_t \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{N}$. La solución de este sistema se construye iterando hacia atrás:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + B \\ x_2 &= A(Ax_1 + B) + B \\ &= A^2x_0 + AB + B \\ x_3 &= A(A^2x_0 + AB + B) + B \\ &= A^3x_0 + A^2B + AB + B \\ &\vdots \\ x_t &= A^tx_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^iB \end{aligned}$$

Recordemos que $\sum_{i=0}^{t-1} A^i = (I - A^t)(I - A)^{-1}$ si $det(I - A) \neq 0$, pues

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{t-1} A^i(I - A) &= I + A + A^2 + ... + A^{t-1} - (A + A^2 + ... + A^t) \\ &= I - A^t \end{aligned}$$

Luego, si $det(I - A) \neq 0$, la solución se caracteriza de la forma

$$x_t = A^t(x_0 - (I - A)^{-1}B) + (I - A)^{-1}B$$

Definición 3.1. *Un punto de equilibrio del sistema 1 es un vector $\overline{x}$ que satisface $\overline{x} = A\overline{x} + B$.*

Recordemos la descomposición de Jordan para la matríz A:

Lema 3.1 (Descomposición de Jordan)**.** *Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces existe una matríz $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular tal que $A = QDQ^{-1}$ y*

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & D_m \end{bmatrix}$$

con $D_1, ..., D_m$ bloques cuadrados.
Los bloques de Jordan pueden ser de 4 tipos, dependiendo de los valores propios de A asociados a ese bloque:

- *Valores propios reales diferentes: $D_i = \lambda_i$ (bloques de tamaño 1).*
- *Valores propios reales repetidos:*

$$D_i = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

- *Valores propios complejos diferentes ($\lambda_i = \alpha + i\beta$):*

$$D_i = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

- *Valores propios complejos repetidos:*

$$D_i = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & \dots & & & & \\ \beta & \alpha & 0 & \dots & & & & \\ 1 & 0 & \alpha & -\beta & & & & \\ 0 & 1 & \beta & \alpha & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 1 & 0 & \alpha & -\beta \\ & & & & 1 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Finalmente, la caracterización de la solución de 1 usando el lema anterior es la siguiente:

Lema 3.2. *La solución de 1, cuando* $det(I - A) \neq 0$ *y* $\overline{x}$ *es punto de equilibrio del sistema, se escribe de la forma*

$$x_t \quad = \quad QDQ^{-1}(x_0 - \overline{x}) + \overline{x} \tag{2}$$

con D *matríz de Jordan asociada y* Q *no singular tal que* $A = QDQ^{-1}$.

Demostración. *Definamos* $z_t = x_t - \overline{x}$. *Escribiendo* z_{t+1} *se tiene:*

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= x_{t+1} - \overline{x} \\ &= Ax_t + B - \overline{x} \\ &= A(x_t - \overline{x}) - (I - A)\overline{x} + B \\ &= Az_t - (I - A)(I - A)^{-1}B + B \\ &= Az_t \end{aligned}$$

Usando la descomposición de Jordan, $z_{t+1} = QDQ^{-1}z_t$ *y tomando* $y_t = Q^{-1}z_t$, *el sistema queda de la forma*

$$y_{t+1} \quad = \quad Dy_t \tag{3}$$

La solución de lo anterior, usando iteración hacia atrás, es $y_t = D^t y_0$. *Devolviendose el los cambios de variable, se obtiene*

$$x_t = QDQ^{-1}(x_0 - \overline{x}) + \overline{x}$$

□