Capítulo 7

Flujo Viscoso

Se analizará en este capítulo las ecuaciones diferenciales de movimiento que gobiernan el movimiento de un fluido viscoso ($\mu \neq 0$). Se considerarán en el desarrollo de estas ecuaciones los esfuerzos normales de compresión[1] y los esfuerzos cortantes.

7.1 Tensor de esfuerzos

Sobre un elemento diferencial de fluido actúa una distribución de esfuerzos según todas las direcciones como se muestra en la figura 7.1. Esta distribución de esfuerzos se agrupa en un tensor denominado **tensor de esfuerzos** $\bar{\bar{\sigma}}$:

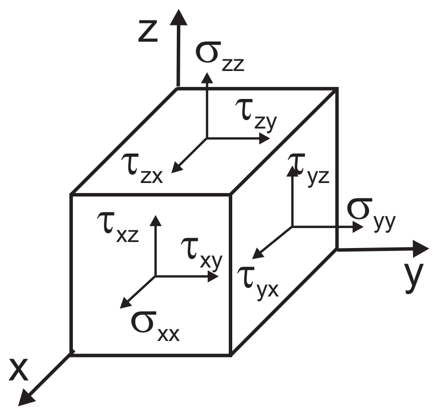


Figura 7.1: Esfuerzos sobre un elemento de fluido.

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} .$$

El elemento genérico de este tensor es $\tau_{i,j}$ donde el subíndice i representa la normal al plano asociado con la tensión y el subíndice j representa la dirección de la tensión. Por convención se adopta la siguiente convención de signos:

- La normal a la superficie es positiva hacia afuera del volumen que encierra la superficie.

[1]Los fluidos no pueden por lo general soportar esfuerzos de tracción.

- Una componente de la tensión es positiva cuando tanto el vector que representa la superficie sobre la que actúa la tensión como la tensión misma tienen sentidos coincidentes, es decir, ambos positivos o ambos negativos.

Se cumple además que $\tau_{i,i} = \sigma_{i,i}$ que representa la componente de esfuerzos normal al plano i.

Se puede demostrar que este tensor es simétrico, es decir

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{zy} = \tau_{yz}$$

$\Rightarrow$

$$\bar{\bar{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Se puede demostrar también que la suma de las tensiones normales es una invariante, es decir, no depende de los ejes del sistema coordenado (x, y, z en este caso). Se define

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$

como la tensión volumétrica que es un escalar. Para el caso de fluidos ideales o no viscosos se tiene que $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$ que se definió la presión como el negativo de la tensión normal, es decir

$$\bar{\sigma} = \sigma_{xx} = -p\,.$$

Para el caso de fluidos viscosos se define la presión termodinámica como la tensión volumétrica con signo cambiado, es decir

$$\bar{\sigma} = -p$$

7.2 Ecuaciones de movimiento / Ecuaciones de Navier-Stokes

Para determinar las ecuaciones de movimiento para un fluido viscoso se analizará el elemento diferencial de la figura 7.2 donde se han considerado solo las fuerzas según la dirección y.

Realizando un balance de fuerzas y desarrollando se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones para todas las direcciones:

$$\rho g_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho \frac{D\vec{V}_y}{Dt} \tag{7.1}$$

$$\rho g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{D\vec{V}_x}{Dt} \tag{7.2}$$

$$\rho g_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = \rho \frac{D\vec{V}_z}{Dt} \tag{7.3}$$

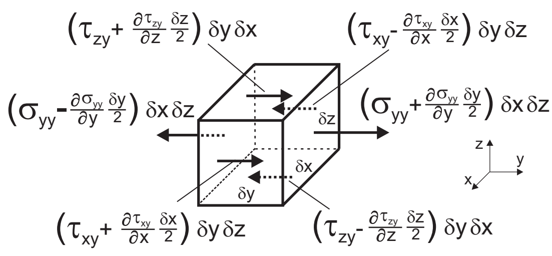


Figura 7.2: Balance de fuerzas sobre un elemento de fluido.

Se ve que si no se consideran los esfuerzos de corte el sistema de ecuaciones anterior se reduce al sistema de ecuaciones de Euler (ec. 4.3) que gobiernan el movimiento de un fluido no viscoso.

La existencia de esfuerzos de corte esta asociada a las deformaciones a que esta sometido un elemento diferencial de fluido. Debe por lo tanto existir una relación entre el tensor de esfuerzos $\bar{\bar{\sigma}}$ y el tensor de deformaciones $\bar{\bar{\epsilon}}$ analizado en el capítulo 3 $\Rightarrow$

$$\bar{\bar{\sigma}} = f(\bar{\bar{\epsilon}}) \ .$$

Fluidos de Stokes

Se define un fluido de Strokes al fluido que comple con las siguientes condiciones:

1. Tensor de esfuerzos $\bar{\bar{\sigma}}$ es una función continua del tensor de velocidad de deformación $\bar{\bar{\epsilon}}$ y del estado termodinámico local.
2. $\bar{\bar{\sigma}}$ es independiente de la traslación y rotación del elemento considerado.
3. las propiedades del fluido son independientes del sistema de referencia utilizado.
4. El fluido carece de elasticidad.
5. El fluido es homogéneo, la función f no depende explicitamente de las coordenadas.
6. El fluido es isótropo, es decir, las propiedades son independientes de la dirección y las direcciones principales de $\bar{\bar{\sigma}}$ y$\bar{\bar{\epsilon}}$ coinciden.

Fluido Newtoniano

Se define un fluido Newtoniano como un fluido de Stokes lineal, es decir, las componentes de $\bar{\bar{\sigma}}$ son funciones lineales de las componentes de $\bar{\bar{\epsilon}}$.

Bajo las condiciones anteriores la relación que se obtiene es la siguiente:

$$\bar{\bar{\sigma}} + p\bar{\bar{I}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} + \left(\lambda\nabla \cdot \vec{V}\right)\bar{\bar{I}} \tag{7.4}$$

donde

- $$-p = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$$
- μ (viscosidad dinámica) y λ (segundo coeficiente de viscosidad) son constantes de proporcionalidad.

- $\bar{\bar{I}}$ es el tensor identidad.

De acuerdo a la ec. 7.4 el elemento genérico para los esfuerzos de corte esta dado por

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) .$$

Según los distintos ejes coordenados la relación anterior resulta

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{xz} = \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right)$$

Para un flujo con un perfil de velocidades según un solo eje (x) se obtiene

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

que representa la Ley de viscosidad de Newton vista en el capítulo 1.

Para los esfuerzos normales la ecuación 7.4 según x queda

$$\sigma_{xx} + p = 2\mu\epsilon_{xx} + \lambda \frac{\partial V_x}{\partial x} \tag{7.5}$$

Sumando las tres componentes y recordando que $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -3p$ se obtiene

$$\lambda = -\frac{2}{3}\mu .$$

Reemplazando el resultado anterior en la ec. 7.4 se obtiene finalmente

$$\bar{\bar{\sigma}} = 2\mu\bar{\bar{\epsilon}} - \underbrace{\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} \right) \bar{\bar{I}}}_{\substack{\text{componente normal} \\ \text{de la deformación}}} . \tag{7.6}$$

En notación indicial la ecuación anterior queda:

$$\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} - \left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla \cdot \vec{V} \right) \delta_{ij} \tag{7.7}$$

Si el flujo esta en reposo ($\vec{V} = 0$) o es uniforme ($\vec{V} = \text{cte}$) se recupera lo visto en el capítulo 2:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}.$$

Si el flujo es incompresible ($\nabla \cdot \vec{V} = 0$) se obtiene para la componente normal del esfuerzo

$$\sigma_{ii} = 2\mu \frac{\partial V_i}{\partial x_i} - p .$$

Reemplazando el tensor de esfuerzos obtenido (ec. 7.6) en el sistema de ecuaciones 7.3 y considerando que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[\%]\delta_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}[\%] \,,$$

se obtiene

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\mu\bar{\bar{\epsilon}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right).$$

Como

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

se obtiene finalmente

$$\rho\left(\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right) = \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{V}\right) \tag{7.8}$$

Las ecuaciones anteriores (3 ecuaciones escalares) representan las ecuaciones de movimiento general para un fluido newtoniano y se denominan ecuaciones de Navier-Stokes. La ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\vec{V}) = 0\,,$$

proporciona la ecuación faltante para cerrar el sistema de ecuaciones. En el caso mas general deben incluirse además la ecuación de estado del fluido ($f(p,\rho,T) = 0$) y la dependencia de la viscosidad con la temperatura y la presión ($\mu = \mu(T,p)$). Estas ecuaciones no han sido resueltas salvo en casos muy particulares y simples.

7.2.1 Flujo incompresible

La ecuación de continuidad para un flujo incompresible esta dada por la siguiente relación

$$\nabla\cdot\vec{V} = 0\,.$$

Veremos a continuación como se modifican las ecuaciones de Navier-Stokes bajo esta condición. Para esto desarrollaremos la componente x ($i = x$) del segundo término del lado derecho de la ec. 7.8:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right] &= \mu\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}\right)\right] \\
&= \mu\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}_{\nabla\cdot\vec{V}=0}\right] \\
&= \mu\left[\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right] = \mu\nabla^2 V_x\,.
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}+\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)\right]=\mu\nabla^2 V_i\,.$$

Realizando un desarrollo análogo según los otros ejes coordenados y reemplazando en las ecuación 7.8 se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho g_x+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{7.9}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho g_y+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right), \tag{7.10}$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g_z+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right). \tag{7.11}$$

En forma vectorial estas ecuaciones quedan de la siguiente forma:

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}+\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V}\right)=-\nabla p+\rho\vec{g}+\mu\nabla^2\vec{V}\,. \tag{7.12}$$

Se ve que para el caso de flujos no viscosos ($\mu=0$) es sistema de ecuaciones se reduce al sistema de ecuaciones de Euler (ec. 4.3) visto anteriormente.

7.3 Flujo turbulento

En esta sección se verán las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo turbulento. Un flujo turbulento se caracteriza por un movimiento aleatorio de las partículas fluidas con un comportamiento aleatorio de las variables del flujo como la velocidad, los esfuerzos de corte, etc.. Este tipo de flujo se representa o modela por el valor medio ($\overline{A}$) de la variable A más una fluctuación (A'). Para la velocidad por ejemplo lo anterior queda expresado por

$$V=\overline{V}+V'$$

donde

$$\overline{V}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}V(x,y,z,t)dt\,.$$

T es un tiempo grande en comparación con las pequeñas fluctuaciones turbulentas y pequeño en comparación con las inestabilidades globales del flujo. Aplicando la definición de promedio o media a la componente fluctuante ($\overline{V'}$) se obtiene:

$$\overline{V'}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}(V-\overline{V})dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\left[\int_{t_0}^{t_0+T} V\,dt - \int_{t_0}^{t_0+T} \overline{V})dt\right] \\
&= \overline{V} - \overline{V} = 0\ ,
\end{aligned}
$$

es decir la media de las fluctuaciones es igual a cero.

Se desarrollarán las ecuaciones de Navier-Stokes para las medias temporales de la velocidad (ya que esta medida es fácilmente cuantificable) y se verá el efecto de las fluctuaciones sobre estas. Según la coordenada x la ecuación de Navier-Stokes es:

$$
\rho\left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z\frac{\partial V_x}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right)\ . \tag{7.13}
$$

En la ecuación anterior se debe reemplazar $V_i = \overline{V_i} + V_i'$. Por ejemplo, el término $V_x\,(\partial V_x/\partial x)$ queda

$$
\begin{aligned}
V_x\,(\partial V_x/\partial x) &= \left(\overline{V_x} + V_x'\right)\left[\frac{\partial(\overline{V_x} + V_x')}{\partial x}\right] \\
&= \overline{V_x}\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial x} + \overline{V_x}\frac{\partial V_x'}{\partial x} + V_x'\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial x} + V_x'\frac{\partial V_x'}{\partial x}
\end{aligned}
$$

Realizando todos los reemplazos y tomando la media temporal sobre toda la ecuación (se propone hacerlo como ejercicio) se obtiene:

$$
\rho\left(\overline{V_x}\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial x} + \overline{V_y}\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial y} + \overline{V_z}\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial z}\right) = -\frac{\partial\overline{p}}{\partial x} + \rho g_x + \mu\nabla^2\overline{V_x} - \rho\left(\overline{V_x'\frac{\partial V_x'}{\partial x}} + \overline{V_y'\frac{\partial V_x'}{\partial y}} + \overline{V_z'\frac{\partial V_x'}{\partial z}}\right). \tag{7.14}
$$

La ecuación de continuidad para un flujo turbulento queda expresada mediante la siguiente relación:

$$
\frac{\partial(V_x + V_x')}{\partial x} + \frac{\partial(V_y + V_y')}{\partial y} + \frac{\partial(V_z + V_z')}{\partial z} = 0. \tag{7.15}
$$

Promediando en el tiempo se obtiene:

$$
\frac{\partial\overline{V_x}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{V_y}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{V_z}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{V_x'}}{\partial x} + \frac{\partial\overline{V_y'}}{\partial y} + \frac{\partial\overline{V_z'}}{\partial z} = 0. \tag{7.16}
$$

Como las perturbaciones promedio son cero se obtiene finalmente:La media a la ecuación anterior queda

$$
\overline{\frac{\partial V_x}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial V_y}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial V_z}{\partial z}} = 0 \tag{7.17}
$$

y

$$
\overline{\frac{\partial V_x'}{\partial x}} + \overline{\frac{\partial V_y'}{\partial y}} + \overline{\frac{\partial V_z'}{\partial z}} = 0. \tag{7.18}
$$

De lo anterior se puede demostrar que

$$\overline{V_x' \frac{\partial V_x'}{\partial x}} + \overline{V_y' \frac{\partial V_y'}{\partial y}} + \overline{V_z' \frac{\partial V_z'}{\partial z}} = \frac{\partial \overline{(V_x')^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(V_y')^2}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{(V_z')^2}}{\partial z} \,. \tag{7.19}$$

Sustituyendo en la ecuación 7.14 se obtiene

$$\rho \frac{D\overline{V_x}}{Dt} = -\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 \overline{V_x} - \rho \left(\frac{\partial \overline{(V_x')^2}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{(V_x'V_y')}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{(V_x'V_z')}}{\partial z} \right) \,. \tag{7.20}$$

Comparando la ecuación anterior con la ecuación 7.9 se puede ver que la existencia de fluctuaciones en la velocidad genera esfuerzos en el fluido y estos afectan la velocidad media del flujo. Estos esfuerzos se denominan esfuerzos aparentes o de Reynolds. Considerando todas las direcciones se obtiene un tensor de esfuerzos denominado tensor de esfuerzos aparente:

$$\bar{\bar{\sigma}}' = \left[\begin{array}{ccc} \sigma'_{xx} & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_{yy} & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_{zz} \end{array} \right] = -\rho \left(\begin{array}{ccc} \overline{(V_x')^2} & \overline{(V_x'V_y')} & \overline{(V_x'V_z')} \\ \overline{(V_y'V_x')} & \overline{(V_y')^2} & \overline{(V_y'V_z')} \\ \overline{(V_z'V_x')} & \overline{(V_z'V_y')} & \overline{(V_z')^2} \end{array} \right) \,.$$

Lo anterior se puede interpretar también como que el esfuerzo total en un flujo turbulento se compone de un valor medio, asociado a la viscosidad del fluido, más una fluctuación, asociada naturalmente a la turbulencia existente en el flujo, es decir:

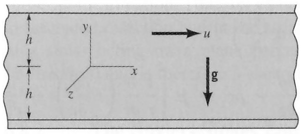
$$\tau = \overline{\tau} + \tau' . \tag{7.21}$$

Escribiendo las ecuaciones de Navier-Stokes en estos términos en notación indicial resulta:

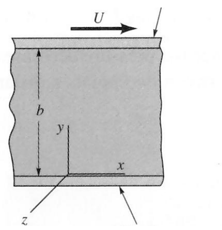
$$\frac{D\overline{V_i}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + g_i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{\tau_{ji}} + \tau_{ji}^T \right) \,. \tag{7.22}$$

Un punto importante a considerar es que la existencia de fluctuaciones introduce nuevas incógnitas y por lo tanto se requiere de nuevas ecuaciones para cerrar y solucionar (numéricamente) el sistema ecuaciones. Existen diversos modelos, llamados modelos de cierre, que proporcionan estas ecuaciones adicionales. El estudio de estos modelos queda fuera del alcance de este curso por lo que no serán tratados.

7.4 Aplicaciones



Determinar el campo de velocidades que se establece para el flujo permanente e incompresible entre dos placas paralelas e infinitas.



Determinar el campo de velocidades que se establece para el flujo permanente e incompresible entre dos placas paralelas e infinitas donde la placa inferior esta fija y la superior se mueve con una velocidad constante U. Este tipo de flujo se denomina Flujo de Couette.

Determinar el campo de velocidades que se establece en un tubo horizontal de radio R si el flujo es permanente e incompresible y se mueve paralelamente al eje z. Este tipo de flujo se denomina Flujo de Hagen-Poiseuille.