



UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MECANICA

**MODELAMIENTO DE CONTRATOS DE SERVICIO PARA EL
OUTSOURCING DE MANTENIMIENTO**

**TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE MAGISTER EN
CIENCIAS DE LA INGENIERIA MENCION MECANICA**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TITULO DE
INGENIERO CIVIL MECANICO**

CANEK JACKSON DE CASTRO

**PROFESOR GUÍA:
RODRIGO PASCUAL JIMÉNEZ**

**MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
PABLO REY SOSA
AQUILES SEPÚLVEDA OSSES
JOSÉ MIGUEL BENAVENTE HORMAZÁBAL**

**SANTIAGO DE CHILE
SEPTIEMBRE 2007**

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL MECÁNICO Y
MAGISTER EN CS. DE LA ING. MENCIÓN MECÁNICA
POR: CANEK JACKSON DE CASTRO
FECHA: SEPTIEMBRE 2007
PROF. GUÍA: Sr. RODRIGO PASCUAL JIMÉNEZ

“MODELAMIENTO DE CONTRATOS DE SERVICIO PARA EL OUTSOURCING DE MANTENIMIENTO”

En la actualidad, en las empresas existe una gran tendencia en subcontratar operaciones como un servicio que es abastecido de manera externa. En general, el proveedor del servicio es denominado contratista y el cliente, mandante. En mantenimiento, el mandante es el dueño de una máquina que le reporta ingresos por concepto de producción, los cuales se reducen a raíz de los costos de falla que surgen cuando la máquina no opera. De esta manera la confiabilidad del equipo aparece como factor relevante al momento en que el mandante debe decidir si externaliza las operaciones de mantenimiento. Así mismo, para el contratista, el margen de ganancia resultante de la subcontratación es afectado por varios parámetros como los términos del contrato, la confiabilidad del equipo, y el número de clientes a servir.

En el presente trabajo se desarrollan y analizan varios modelos para determinar de manera óptima los términos de un contrato para servicios de mantenimiento, de manera que tanto mandante como contratista maximicen sendas utilidades. Además, desde la perspectiva del contratista los modelos proveen el número óptimo de clientes a servir, como parte de los resultados obtenidos. Los modelos derivan en una formulación de juego no cooperativo cuya solución es obtenida mediante negociación.

Los resultados numéricos fueron obtenidos mediante un solver comercial de optimización. En el primer modelo, además, mediante otro software comercial se realiza una simulación computacional con el fin de validar el enfoque analítico utilizado en la tesis.

Como principales resultados, se cuantifica el impacto que tienen los distintos tipos de intervención (y por lo tanto la confiabilidad) sobre la utilidad generada por las partes (mandante y contratista) y sobre los términos (condiciones) del contrato.

La cantidad óptima de clientes que debe servir el contratista se reduce hasta en un 85 %, sólo por el hecho de considerar que el equipo envejece en el tiempo. Esta baja en la clientela, a su vez, conduce a reducciones de hasta un 95 % en las utilidades generadas.

El enfoque analítico empleado en este trabajo resultó ser una herramienta útil para especificar el honorario en un contrato para servicios de mantenimiento. En especial, cuando los términos y condiciones del contrato son especificados mediante negociación entre las partes. Además, en comparación con la simulación, el enfoque analítico facilita la realización de análisis de sensibilidad que permiten cuantificar la influencia de los distintos parámetros involucrados sin tener que incurrir en tiempos computacionales excesivos.

A MIS PADRES

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer en especial a mis padres, Donald y Nelka, por haber sido mis pilares y haber creado las condiciones necesarias para que yo pudiera alcanzar todas mis metas propuestas.

Al Profesor Rodrigo Pascual por ser mi guía en este trabajo, por la confianza que puso en mis ideas y por su buena disposición. Agradezco también al resto de la comisión evaluadora: Pablo Rey, del Departamento de Ingeniería Industrial; Aquiles Sepúlveda, del Departamento de Ingeniería Mecánica; y José Miguel Benavente, de la Facultad de Economía. También quisiera agradecer, por supuesto, al director del programa de magister del DIMEC: Profesor Mauricio Osses.

A mi familia en Colombia: A mis abuelos, el viejo Lucho y la vieja Fred. A mi tío Vivanco y a mis tías Nina, Irene y Oriana. A mis bros Uli y JP, y a mi sis Rinagirl. A mis primos Giordanito y Davicito. A Cristián y a todos los buenos amigos en La Arenosa.

A mi familia en Chile: A la Ita. A todos(as) mis tíos(as) y primos(as). A Daniela. A Roxana. También quisiera agradecer a todos aquellos de la familia mecánica con los que compartí estos últimos años de la carrera, y en especial al núcleo fuerte del CMI.

Finalmente quisiera aprovechar este medio para inmortalizar la memoria de dos personas que ya no están, pero que fueron parte importante en lo transcurrido de mi vida: mi bisabuela Carmen y mi amigo David. DEP.

Índice

1. Introducción	1
1.1. Antecedentes generales	1
1.1.1. Subcontratación de las operaciones de mantenimiento	2
1.1.2. Contratos para servicios de mantenimiento	2
1.2. Objetivos	3
1.3. Metodología	3
1.3.1. Formulación del modelo	3
1.3.2. Análisis del modelo	3
1.3.3. Implementación numérica	4
1.4. Alcances de la tesis	6
1.4.1. Teoría de juegos	6
1.4.2. Procesos de conteo	6
1.5. Organización de la tesis	7
2. Revisión y discusión de antecedentes	8
2.1. Modelos de tercerización	8
2.1.1. Términos y condiciones del contrato	9
2.1.2. Juegos de Stackelberg	10
2.1.3. Juegos de negociación	12
2.2. Modelos de confiabilidad	14
2.2.1. Procesos homogéneos de Poisson	14
2.2.2. Procesos de renovación	15
2.2.3. Procesos no-homogéneos de Poisson	16
2.2.4. Procesos de reparación imperfecta	17
3. Modelo I: Equipo sin envejecimiento	18
3.1. Formulación del modelo	18
3.1.1. Caracterización de las fallas	18

3.1.2.	Caracterización de las reparaciones	18
3.1.3.	Problemas de decisión	18
3.2.	Análisis del modelo	19
3.2.1.	Valor esperado para los tiempos de espera y reparación	19
3.2.2.	Valor esperado para la cantidad de fallas	20
3.2.3.	Problemas de decisión	20
3.2.4.	Equilibrio de Nash	21
3.3.	Implementación numérica	22
3.4.	Análisis de sensibilidad	23
3.5.	Selección del tipo de outsourcing	23
3.6.	Validación	26
3.6.1.	Benchmarking	26
3.6.2.	Simulación	27
3.7.	Mejoramiento del modelo	29
3.8.	Discusión	31
4.	Modelo II: Overhaul imperfecto	33
4.1.	Formulación del modelo	33
4.1.1.	Caracterización de las fallas	33
4.1.2.	Caracterización de las reparaciones	33
4.1.3.	Problemas de decisión	34
4.2.	Análisis del modelo	35
4.2.1.	Valor esperado para los tiempos de espera y reparación	35
4.2.2.	Valor esperado para la cantidad de fallas	35
4.2.3.	Problemas de decisión	36
4.2.4.	Equilibrio de Nash	36
4.3.	Implementación numérica	37
4.4.	Análisis de sensibilidad	38
4.5.	Mejoramiento del modelo	39
4.6.	Discusión	39

5. Modelo III: Intervenciones mínimas	41
5.1. Formulación del modelo	41
5.2. Implementación numérica	41
5.3. Mejoramiento del modelo	42
5.4. Discusión	43
6. Modelo IV: Renovaciones	44
6.1. Formulación del modelo	44
6.2. Implementación numérica	44
6.3. Intervenciones perfectas	45
6.3.1. Caso 1	45
6.3.2. Caso 2	45
6.3.3. Caso combinado	46
6.4. Mejoramiento del modelo	47
6.4.1. Overhauls perfectos	47
6.4.2. Intervenciones perfectas	48
6.5. Discusión	48
7. Integración de modelos	49
8. Conclusiones	51
8.1. Comentarios	51
8.2. Extensiones	52
A. Valor esperado para el delay post deadline	58
B. Tiempos computacionales para cada simulación realizada	61
C. Intensidad media de falla para equipos con envejecimiento lineal	63

Índice de figuras

1.1.	Esquema conceptual para la formulación y análisis del modelo.	4
1.2.	Esquema conceptual para el análisis del modelo y su implementación numérica.	4
1.3.	Mapa conceptual de la tesis.	5
2.1.	Honorario en función de la cantidad de clientes.	10
2.2.	Estrategia para la determinación de las decisiones óptimas.	11
2.3.	Caracterización del equilibrio de Nash involucrado en la negociación.	12
2.4.	Ilustración de la confiabilidad de un equipo condicionado a un HPP.	15
2.5.	Ilustración de la confiabilidad de un equipo sujeto a reparaciones perfectas.	15
2.6.	Ilustración de la confiabilidad de un equipo condicionado a un NHPP.	16
2.7.	Ilustración de la confiabilidad de un equipo sujeto a reparaciones imperfectas.	17
3.1.	Determinación y caracterización del precio.	22
3.2.	Primer modelo propuesto vs referencia.	22
3.3.	Mapa para la selección óptima del tipo de outsourcing.	25
3.4.	Efecto de variaciones en la tarifa de penalización.	25
3.5.	Diagrama de flujo del proceso.	27
3.6.	Diagrama de simulación del proceso.	28
3.7.	Comparación entre el modelo analítico y la simulación.	29
3.8.	Caracterización de la primera fuente de error.	30
3.9.	Caracterización de la segunda fuente de error.	30
3.10.	Comparación entre el modelo analítico mejorado y la simulación.	31
4.1.	Determinación de las estrategias asociadas al mantenimiento preventivo.	37
4.2.	Segundo modelo propuesto vs referencia.	38
5.1.	Tercer modelo propuesto vs referencia.	41
5.2.	Espacio de soluciones factibles para la existencia de negociación.	42
6.1.	Cuarto modelo propuesto vs referencia.	44

ÍNDICE DE FIGURAS

6.2. Modelo de intervenciones perfectas vs referencia.	47
7.1. Integración de los modelos propuestos inicialmente.	49
7.2. Integración de los modelos propuestos mejorados.	49

Índice de tablas

3.1. Estrategia para distintos valores de la intensidad de falla	23
3.2. Estrategia para distintos valores de la tasa de reparación	23
3.3. Definición de bloques y parámetros involucrados en la simulación	28
4.1. Estrategia para distintos valores de la tasa de envejecimiento	38
4.2. Estrategia para distintos valores del factor de mejora	39
7.1. Integración de modelos iniciales	50
7.2. Integración de modelos mejorados	50
B.1. Minutos que demora la simulación.	61
B.2. Minutos que demora el post-procesamiento de datos.	62

Notación

Símbolo	Descripción	Unidad
α	tarifa de penalización por demora excesiva en la reparación del equipo	um/ut
C	honorario basado en un servicio de mantenimiento sin contrato	um
C_m	costo de cada intervención correctiva	um
C_o	costo de cada intervención preventiva	um
C_r	valor de compra del equipo	um
X	excedente total generado debido al contrato para servicios de mantenimiento	um/ut
f	función objetivo para la determinación de las estrategias de mantenimiento	um/ut
f^*	función objetivo evaluada en el escenario óptimo de posibles estrategias	um/ut
T_r	vida útil del equipo	ut
T_r^*	período óptimo de reemplazo	ut
$\lambda(t)$	intensidad de falla del equipo	1/ut
λ_0	intensidad de falla en $t=0$	1/ut
M	número de clientes	
M^*	número óptimo de clientes	
MTBF	Tiempo medio entre fallas	ut
MTTF	Tiempo medio de falla	ut
MTTR	Tiempo medio de reparación	ut
MTTS	Tiempo medio de servicio	ut
MTTW	Tiempo medio de espera	ut
μ	tasa de reparación del equipo	1/ut
N	número de overhauls a lo largo de la vida útil del equipo	
N^*	número óptimo de overhauls a lo largo de la vida útil del equipo	
Ω	utilidad monetaria para el dueño de la máquina	um
Π	utilidad monetaria para el proveedor del servicio	um
P	honorario basado en un contrato de tarifa fija	um
P^*	honorario negociado en el contrato	um
p	factor de mejora asociado a la calidad de los overhauls	
R	riqueza por unidad de tiempo generada por el equipo	um
r	tasa de envejecimiento del equipo	1/ut ²
T_s	período entre overhauls	
T_s^*	período óptimo entre overhauls	
τ	tiempo límite para la reparación del equipo	ut
U	función de utilidad genérica para el cliente	
V	función de utilidad genérica para el contratista	

As far as the laws of mathematics refer to reality,
they are not certain; and as far as they are certain,
they do not refer to reality.

Albert Einstein

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes generales

Los equipos industriales son poco confiables en el sentido de que se deterioran con el tiempo y/o uso, y finalmente fallan. Estas fallas pueden tener un impacto significativo en el desempeño de un negocio. De ahí la necesidad de tener operaciones de mantenimiento que aseguren un buen funcionamiento de los equipos.

Los equipos complejos requieren herramientas y personal especializado para llevar a cabo las operaciones de mantenimiento. Generalmente resulta poco económico, para el dueño del equipo, tener estas herramientas y personal como una función dentro de la empresa. Más aún, existen situaciones en las que tanto el conocimiento como los repuestos necesarios para realizar el mantenimiento, sólo pueden ser adquiridas desde el fabricante original del equipo. En este caso, el propietario de la máquina está forzado a establecer un contrato para servicios de mantenimiento con el fabricante original del equipo, quien por lo demás tiende a actuar como un agente monopólico. En este sentido, las operaciones de mantenimiento son necesariamente llevadas a cabo por un agente externo a la empresa en la cual el equipo está generando utilidades, y por lo tanto el fabricante del equipo juega el rol de contratista mientras el dueño del equipo el de cliente.

En la literatura existen varios modelos matemáticos que caracterizan las estrategias seguidas por las distintas partes, en un contrato para servicios de mantenimiento. Entre los primeros modelos, se encuentra el desarrollado por Murthy & Yeung (1995), y considera un único cliente. En este sentido, la única variable de decisión para el agente es la estructura de precios. Los autores formulan el modelo como un juego de Stackelberg, con el contratista como líder y el cliente como seguidor.

Posteriormente, el modelo es extendido al caso de múltiples clientes pero con un único canal de servicio (Asgharizadeh & Murthy, 1996; Murthy & Asgharizadeh, 1995, 1996). Ello implica que si un equipo falla, éste no puede ser reparado inmediatamente ya que pueden existir otros equipos en reparación y/o espera. Así, el número de clientes es una variable de decisión extra, además de la estructura de precios. Los autores formulan el modelo usando resultados de la teoría de colas.

Con muchos clientes y un único canal, el tiempo medio de espera de los equipos en falla, aumenta con el número de clientes. Sin embargo, entre más clientes existen mayor es el pago que recibe el proveedor del servicio. Una manera de resolver este dilema es agregando más de un canal de servicio, con lo que se puede disminuir el tiempo medio de espera sin necesidad de reducir la clientela. Así, el número de canales es una variable de decisión extra, además de la estructura de precios y el número de clientes (Murthy & Asgharizadeh, 1999).

Por otro lado, aparece la necesidad de resolver problemas complejos de colas en los que un tratamiento analítico de los procesos estocásticos involucrados se hace inmanejable. Ello obligó el uso de enfoques de simulación. Por ejemplo, Vigus (2003) construye un modelo para simular el proceso de mantenimiento en un helicóptero de rescate de la guardia costera norteamericana y de ésta manera evaluar el impacto de subcontratar recursos para llevar a cabo dicho proceso. Posteriormente, Lhorente *et al.* (2004) combinan los enfoques de outsourcing y simulación para determinar las estrategias óptimas de mantenimiento preventivo en una flota de camiones de transporte para aplicaciones mineras en Chile.

1.1.1. Subcontratación de las operaciones de mantenimiento

La subcontratación de la mantención implica que algunas o todas las operaciones de mantenimiento son llevadas a cabo por un agente externo, sujeto a los términos y condiciones de un contrato.

Las ventajas de subcontratar la mantención como un servicio externo a la empresa son:

1. Mejor calidad de la mantención, debido a la experiencia del proveedor del servicio.
2. Acceso a especialistas de alto nivel.
3. Los costos del servicio remueven el riesgo de altos costos.
4. Acceso a la última tecnología en cuanto a herramientas de mantención.
5. Menor capital de inversión.
6. Se puede dedicar más tiempo y focalizar el esfuerzo en otras áreas del negocio.

Las desventajas de hacer la subcontratación de las operaciones de mantenimiento son:

1. Dependencia del proveedor del servicio.
2. Costo de subcontratación.
3. Pérdida del conocimiento en cuanto a operaciones de mantenimiento se refiere.

1.1.2. Contratos para servicios de mantenimiento

Un contrato para servicios de mantenimiento involucra dos elementos:

1. Las partes; constituidas por el contratista y el cliente. El primero corresponde al agente externo a la empresa y el segundo corresponde al dueño de la máquina a ser mantenida.
2. Los términos del contrato; que define el honorario a ser pagado. Además deben ser bien definidos los plazos a cumplir así como posibles penalizaciones en caso de negligencias.

La filosofía detrás la modelación de contratos es motivada, entonces, por cómo el tipo de interacción entre las partes tiene un impacto sobre los términos del contrato.

1.2. Objetivos

El principal objetivo de este trabajo es modelar la toma de decisiones, tanto del contratista como del cliente, en un contrato para servicios de mantenimiento cuyas condiciones son establecidas mediante negociación. De acuerdo a esto, los objetivos generales son:

- Construir modelos de optimización asociados a la toma de decisiones en un contrato para servicios de mantenimiento.
- Resolver los modelos, implementándolos numéricamente para determinar el valor óptimo de las variables de decisión involucradas.
- Realizar un análisis de sensibilidad sobre los factores que influyen en la intensidad de falla del equipo y, por lo tanto, en su confiabilidad.

1.3. Metodología

A continuación se detalla la metodología seguida en cada uno de los modelos a desarrollar.

1.3.1. Formulación del modelo

Primero se formula un modelo de confiabilidad para el equipo y se caracterizan matemáticamente las acciones de mantenimiento a seguir, obteniendo así una función de confiabilidad $R(t)$. Luego son modelados los tiempos de espera/reparación asociados al servicio prestado por el contratista, mediante resultados analíticos obtenidos de la teoría de colas, obteniendo así una función de distribución $Y(y)$ para dichos tiempos.

1.3.2. Análisis del modelo

La formulación del modelo es seguida por una caracterización de los procesos estocásticos involucrados, en términos de valores esperados: número esperado de fallas, y tiempo medio de espera/reparación. El primero es función de la cantidad, N , de acciones preventivas realizadas durante la vida útil del equipo y del período entre éstas, T_s . El segundo valor es función de la cantidad de clientes, M , que tenga el contratista. Los valores esperados de las variables estocásticas están, entonces, como función de las variables relevantes para la determinación de las condiciones del contrato. En la figura 1.1 se ilustra el razonamiento anterior.

De ésta manera expresamos el valor la utilidad, tanto del contratista como del cliente, en función de la esperanza de las variables no determinísticas. Notar, además, que la cantidad de clientes que decida servir el contratista debe ser finita. De lo contrario, se formarían colas de espera tan grandes que se traducirían en altos costos de falla para el cliente y por lo tanto en un servicio inadecuado por parte del proveedor.

Como resultado de la negociación entre cliente y contratista, a partir de la evaluación en sendas funciones de utilidad, U y V respectivamente, se obtiene el honorario P a ser pagado por los servicios de mantenimiento como función de las variables M , N y T_s , vale decir, $P = P(M, N, T_s)$.

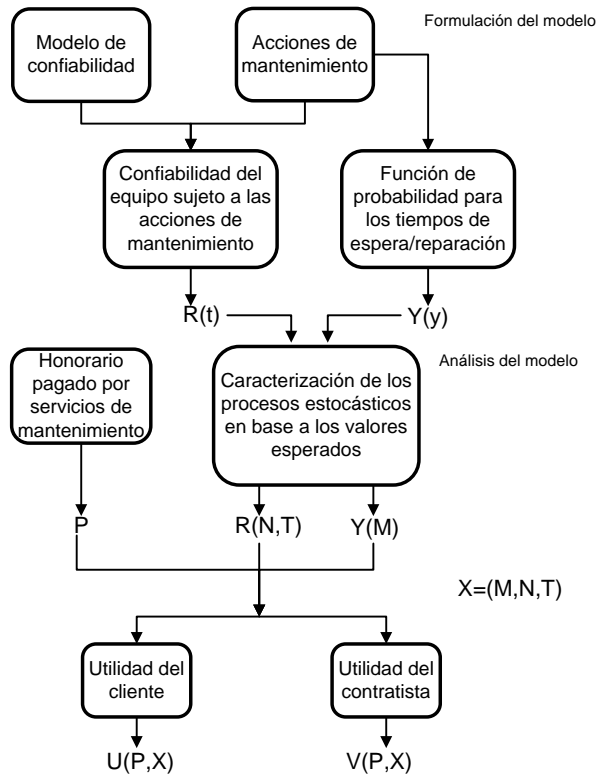


Figura 1.1: Esquema conceptual para la formulación y análisis del modelo.

1.3.3. Implementación numérica

Se quiere entonces resolver el problema de maximización de utilidades. Como resultado de la optimización se obtiene el valor óptimo para cada una de las variables: M^* , N^* , y T_s^* . Con estos valores se determina entonces el valor para el honorario negociado por las partes como $P^* = P(M^*, N^*, T_s^*)$, definiéndose así las condiciones del contrato. En la figura 1.2 se ilustra el razonamiento anterior (ver también el mapa conceptual de la figura 1.3).

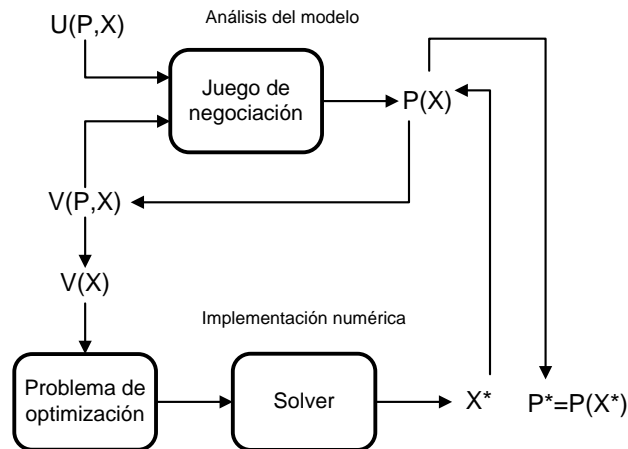


Figura 1.2: Esquema conceptual para el análisis del modelo y su implementación numérica.

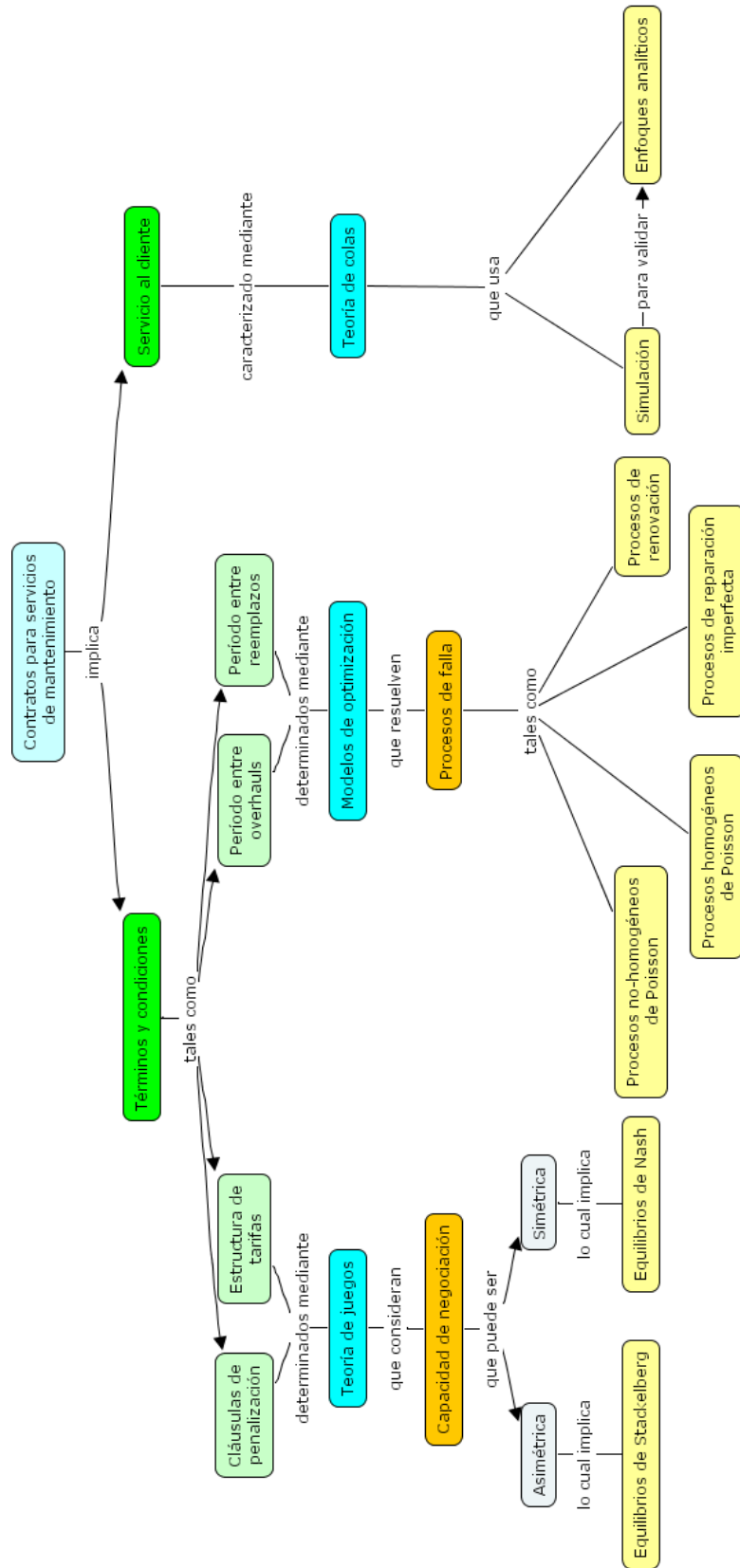


Figura 1.3: Mapa conceptual de la tesis.

1.4. Alcances de la tesis

La tesis se desarrolla en base a dos enfoques, de manera paralela: la teoría de juegos, para los modelos de outsourcing, y los procesos de conteo, para los modelos de confiabilidad.

1.4.1. Teoría de juegos

Se trata el caso de un contratista que provee servicios de mantenimiento a clientes que presentan un poder de negociación similar al de él, extendiendo así los modelos formulados hasta ahora, en donde el proveedor del servicio tendía a actuar como un agente monopólico. Por esta razón, el paradigma de una interacción tipo líder-seguidor como la que ocurre en los juegos de Stackelberg deja de ser útil y, en cambio, la solución para el juego económico involucrado es obtenida mediante negociación. Los juegos de negociación son otro tipo de interacción económica que, aunque sigue siendo no-cooperativa como la de Stackelberg, permite que las condiciones de un contrato sean establecidas de forma mancomunada. Rubinstein (1982) y Binmore *et al.* (1986) caracterizan los equilibrios involucrados en los juegos de negociación.

En general, el equilibrio de Stackelberg se asocia a casos en los el agente económico capaz de proveer el servicio, es único. Un ejemplo de esto ocurre en el mantenimiento de equipos electrónicos donde el fabricante original es el único quien tiene las herramientas, el personal y el *know-how* para llevar a cabo la mantención. Sin embargo, la naturaleza de los clientes puede conducir a que éstos tengan un impacto significativo sobre los términos y condiciones del contrato, lo que conlleva a una negociación con el contratista. Un ejemplo de ello ocurre con la compra de activos físicos militares por parte de los gobiernos más poderosos del mundo, quienes corresponden a clientela pequeña y muy importante.

1.4.2. Procesos de conteo

Se estudia la confiabilidad de un equipo como función del tiempo, caracterizándolo en términos de su deterioro. Para ello se emplea un enfoque desde la perspectiva de los procesos estocásticos. Ross (1996) y Coccozza-Thivent (1997) brindan una excelente introducción al tema de los procesos estocásticos. Ascher & Feingold (1984) presentan una revisión detallada de procesos estocásticos aplicado a la confiabilidad de equipos reparables.

La cantidad de fallas que ocurren en un equipo es de gran importancia en mantenimiento, ya que determinan el desempeño de un equipo que genera riqueza en una empresa. Dicha cantidad es un proceso estocástico, $N(t)$, ya que el número de fallas que ocurren en un intervalo $(0, t]$ es incierto. Este proceso estocástico particular se denomina proceso de conteo. Existen cuatro tipos de procesos de conteo (Rausand & Høyland, 2004):

1. Procesos homogéneos de Poisson.
2. Procesos de renovación.
3. Procesos no-homogéneos de Poisson.
4. Procesos de reparación imperfecta.

Cuál de dichos procesos es el que mejor caracteriza la cantidad de fallas durante algún intervalo de interés, depende de la naturaleza de las estrategias de mantenimiento que sean llevadas a cabo. Por esta razón, en la presente tesis se desarrollan cuatro modelos para estudiar el outsourcing de operaciones de mantenimiento para cada uno de los procesos mencionados anteriormente, y así abarcar todos los niveles de confiabilidad posibles en un equipo industrial sujeto a estrategias de mantenimiento correctivo y preventivo. En el modelamiento se dejan de lado otros aspectos como el mantenimiento centrado en la condición, el mantenimiento oportunista, y la gestión estratégica de repuestos.

1.5. Organización de la tesis

En el capítulo 2 se presenta una discusión de antecedentes. Se da especial énfasis a los modelos de subcontratación de mantenimiento en los que la interacción económica involucrada es del tipo líder-seguidor. Además se revisan en detalle los modelos de confiabilidad para equipos reparables.

El capítulo 3 trata el modelo I, en el cual se estudia el caso de procesos homogéneos de Poisson, característicos de equipos sin envejecimiento. Empieza con una formulación del modelo, seguida de un análisis del mismo a fin de determinar su rango de aplicabilidad. Posteriormente se presenta la implementación numérica del modelo, incluyendo un análisis de sensibilidad a fin de determinar cómo influye la confiabilidad del sistema en las estrategias de mantenimiento. Finaliza con la discusión de los resultados obtenidos en términos de su comparación con un modelo de referencia reproducido de la literatura. En este capítulo, además, se incluyen un benchmarking sobre un caso de estudio y una simulación computacional del mismo, ambos con el fin de validar la metodología seguida a lo largo de la tesis. También, se realiza un pequeño approach al problema de selección óptima para el caso de distintos tipos de servicio de mantenimiento.

Los capítulos 4, 5, y 6 tratan los modelos II, III y IV, respectivamente. El formato es similar al usado en el capítulo 3. En el modelo II se extiende el estudio al caso de equipos con envejecimiento, cuya confiabilidad está sujeta a procesos de reparación imperfecta caracterizados por un cierto parámetro de calidad en las intervenciones preventivas. Los modelos III y IV se obtienen como una particularización del segundo modelo, en los que la calidad de la mantención preventiva es mínima para el caso de procesos no-homogéneos de Poisson y máxima para el caso de procesos de renovación. En el caso de los procesos de renovación se extiende el modelo a la situación en que tanto las intervenciones correctivas como las preventivas son perfectas. Los resultados obtenidos, para cada una de las variables involucradas en los modelos, son integrados en el capítulo 7 a través de gráficos y tablas.

Finalmente en el capítulo 8 se presentan las conclusiones, incluyendo algunos comentarios en los que se discuten los modelos construidos. Además se presenta un set de potenciales extensiones del modelo, a desarrollar en el futuro.

Capítulo 2

Revisión y discusión de antecedentes

2.1. Modelos de tercerización

Al hablar de outsourcing cabe señalar la diferencia que existe entre lo que es la *gestión* del mantenimiento y lo que se refiere a la *implementación* de la misma. La gestión se refiere a la administración de una función de mantenimiento dentro de la empresa. La implementación tiene que ver con llevar a cabo las actividades de mantenimiento. Si bien las actividades de mantenimiento se pueden externalizar, no resulta apropiado hacerlo con la gestión de dichas actividades. De esta manera, el outsourcing de mantenimiento sólo tiene sentido a un nivel táctico-operacional y no estratégico. Murthy *et al.* (2002) justifican lo anterior argumentando que las funciones de mantenimiento y producción deben estar estrechamente ligadas para el funcionamiento apropiado del negocio. Sin embargo, tal estrechez se debilita cuando se externaliza la gestión del mantenimiento y por lo tanto las metas de largo plazo, para mandante y contratista, podrían diverger poniendo en riesgo la sobrevivencia del negocio.

La externalización de ciertas operaciones de mantenimiento es importante para el desempeño de un negocio. White (2004) realiza un estudio donde se muestra que, a nivel mundial, el 81 % de las plantas de producción están subcontratando por lo menos alguna actividad de la función de mantenimiento. El estudio muestra que, en promedio, un 25 % del presupuesto total de mantenimiento es gastado en contratistas. El 75 % de las plantas que subcontratan (63 % del total de las plantas) admiten que existe una estrategia clara y bien definida en el tema de los contratos. Un 39 % de esas plantas (33 % del total de las plantas) han establecido índices para medir el desempeño del servicio subcontratado. Seguridad, calidad del trabajo, y el cumplimiento de los programas, son los índices más comunes usados en lo que a externalización de mantenimiento se refiere.

En Chile, desde los inicios de los servicios de reparación y mantenimiento, conocidos en el mundo minero como MARC (Maintenance And Repair Contracts), ha ocurrido un proceso donde las mineras, distribuidores y fabricantes de maquinaria han ido evolucionando en la forma en que se relacionan, en un proceso de aprendizaje que aún continúa, pero que sin duda ha evolucionado en mejores prácticas (Soto, 2006; Louit & Soto, 2007). Por ejemplo, Ramos & Pérez (2006) proponen una plataforma integrada de información para la toma de decisiones, como una nueva forma de realizar proyectos tecnológicos, en el cual se abandona el viejo paradigma de que la empresa proveedora termina su acción una vez finalizadas las pruebas a los sistemas. Así, la alianza entre proveedor y el cliente es de largo aliento, siendo el objetivo principal el mejoramiento de los procesos en un plan continuo para la agregación de valor del negocio (Cervený, 2006; Gutiérrez, 2006). En la literatura internacional existen varios modelos matemáticos que permiten caracterizar las distintas estrategias seguidas por el cliente y el contratista bajo los distintos escenarios.

Murthy & Padmanabhan (1993) desarrollaron un modelo de contrato, para el caso en que éste se considera como una garantía extendida. Una garantía es un conjunto de cláusulas que permiten al usuario asegurar un desempeño satisfactorio del producto adquirido, durante un cierto de tiempo, a través un servicio de post-venta. Los contratos de servicios pueden ser vistos como un tipo de garantía que extiende el período de seguro de la garantía original. Existen varias publicaciones en las que se estudia el tema de las garantías, en distintos aspectos (Blischke & Murthy, 1994, 1996; Djamaludin & Murthy, 2001; Murthy & Blischke, 2000; Murthy & Djamaludin, 2002; Murthy *et al.*, 2004).

Murthy & Yeung (1995) formularon dos modelos, asumiendo una tasa de falla para equipos con envejecimiento. Por lo tanto, consideraron un contrato para servicios de mantenimiento con cláusulas de mantención preventiva. Existen varias publicaciones en las que se estudia el modelamiento de cláusulas para mantención preventiva dentro de un contrato de servicio (Barlow & Hunter, 1960; Barlow & Proschan, 1965; Cleroux & Hanscom, 1974; Dekker, 1996; Fox, 1996; Pierskella & Voelker, 1976; Thomas, 1986; Schouten, 1996).

Posteriormente, Asgharizadeh (1997) propone modelos de contrato para servicios de mantenimiento en equipos con tasa de falla constante, y por lo tanto las cláusulas quedan sujetas a sólo considerar actividades de mantención correctiva. Existen varias publicaciones en las que se estudia el modelamiento de cláusulas para mantención correctiva dentro de un contrato de servicio (Asgharizadeh & Murthy, 1996; Murthy & Asgharizadeh, 1995, 1996, 1999). En estos últimos cinco modelos, los autores obtenían las estrategias óptimas seguidas por el subcontratista formulando la interacción económica como un juego de Stackelberg en el que el cliente juega el rol de seguidor y el proveedor del servicio el de líder. En este sentido, el contratista actúa como fijador de precios y por lo tanto es él quien determina el honorario.

Tsay & Lovejoy (1999) realizan un estudio del desempeño en las cadenas de suministro compuestas por un proveedor y sus clientes. Los autores identifican las fuentes que contribuyen a un suministro económicamente ineficiente para ambas partes. Posteriormente, Tsay (1999) modela los incentivos de ambas partes y sugiere la creación de contratos como un método para coordinar el flujo eficiente de materiales e información involucrados en la cadena de suministro.

En la presente tesis se extienden los modelos preliminares al caso de un contrato que incluye cláusulas tanto de mantenimiento correctivo como de mantenimiento preventivo. Además, el supuesto de contratista monopólico es relajado en pro de estudiar el caso factible en que el honorario a ser pagado, por los servicios de mantenimiento, es fijado mediante negociación.

2.1.1. Términos y condiciones del contrato

El tipo de contrato a considerar en la presente tesis se describe a continuación: A un honorario fijo, P , el contratista ofrece llevar a cabo todas las operaciones de mantenimiento (correctivas y preventivas) durante la vida útil del equipo. Si el equipo no es devuelto luego de un período límite τ subsecuente a la falla, el contratista incurre en una penalización para amortizar parte de los costos de falla de su cliente. La penalización es proporcional al tiempo transcurrido luego del período límite, a una tasa de α para el contratista.

Los términos y condiciones anteriores corresponden a un tipo de contrato de mantenimiento en específico. En general, existen varias alternativas de contrato y éstas difieren en sus cláusulas de penalización. Típicamente, las cláusulas de penalización tienen que ver con asegurarle un cierto nivel de confiabilidad al mandante, o bien, asegurarle un cierto nivel de disponibilidad (como el caso del contrato considerado en la presente tesis). En los contratos con cláusulas de penalización basadas en confiabilidad, el contratista típicamente incurre en un costo fijo cada vez que la máquina falla (Pongpech & Murthy, 2006). Por otro lado, la externalización no necesariamente involucra un contrato de por medio. En tal caso, el mandante paga un precio cada vez que el equipo es intervenido (no es a honorario fijo) y, por lo tanto, no existen mecanismos de penalización claramente definidos mediante los cuales el mandante pueda protegerse en caso de incumplimientos por parte del proveedor del servicio.

El otro elemento importante en el análisis de contratos, corresponde al de las partes involucradas. En las próximas secciones se presenta una revisión bibliográfica de los tipos de juego que caracterizan la interacción económica entre contratista y mandante.

2.1.2. Juegos de Stackelberg

Los únicos modelos que dan cuenta de una caracterización cuantitativa para determinar las estrategias de las partes involucradas en un contrato de mantenimiento son aquellos en los que el proveedor del servicio es un agente monopólico. Asgharizadeh (1997) resume varios modelos asociados a este caso. A continuación se describen los principales resultados obtenidos por el autor, los cuales se usarán de referencia para comparar y analizar los resultados obtenidos en la presente tesis.

La figura 2.1 muestra como el honorario P resulta en una función creciente con el número de clientes M . Ello se debe a que si M crece entonces la capacidad de servicio del proveedor se ve sobrepasada y por lo tanto el tiempo de espera se hace mayor, de manera que la penalización para el contratista se vuelve cada vez mas probable y de mayor costo. En este sentido, el mecanismo usado por el proveedor del servicio para amortizar dichos costos es transfiriéndolos al cliente vía el aumento de P .

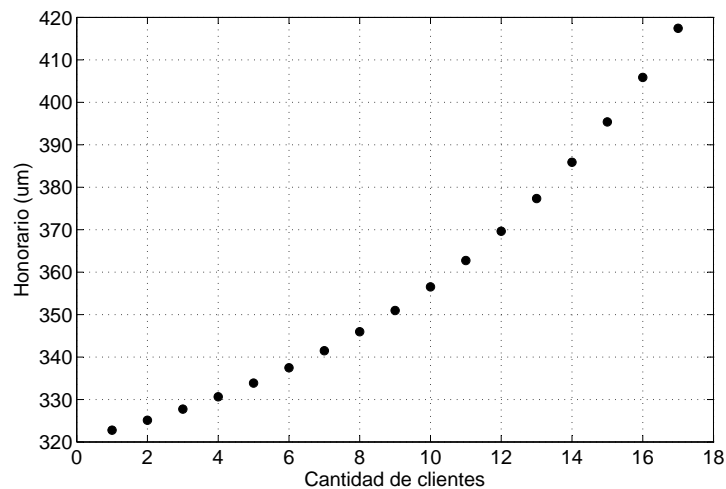


Figura 2.1: Honorario en función de la cantidad de clientes.

La figura 2.2 muestra la utilidad monetaria del contratista en función de la cantidad de clientes. El máximo que se observa es resultado de dos efectos: entre más clientes tiene el proveedor, mayor es el ingreso que recibe por concepto de servicios de mantenimiento; sin embargo, tal como se mencionó, más clientes implica mayor tiempo de espera y por lo tanto mayores egresos para el contratista por concepto de costos de penalización. Se observa además que a partir de un cierto número de clientes la utilidad monetaria es negativa, lo que define un espacio factible de soluciones.

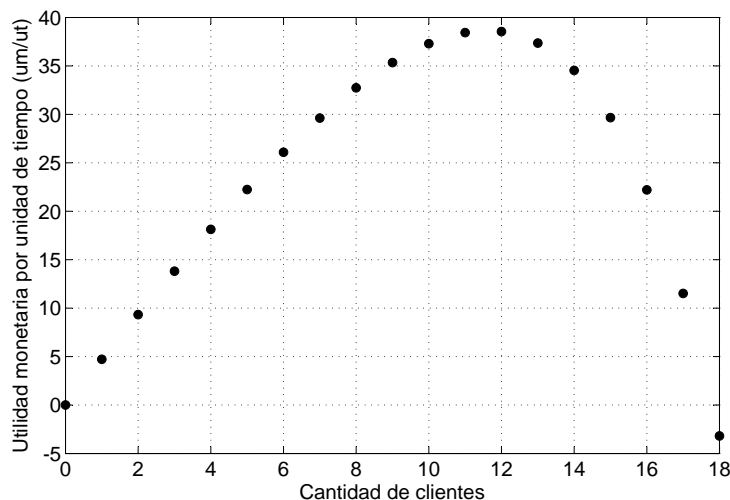


Figura 2.2: Estrategia para la determinación de las decisiones óptimas.

Los resultados son obtenidos asumiendo que la decisión de subcontratar las operaciones de mantenimiento, es rentable para el dueño de la máquina. Sin embargo, el autor también caracteriza las condiciones bajo las cuales el contrato no es llevado a cabo dada la no rentabilidad desde la perspectiva del cliente. En la presente tesis, los modelos son desarrollados bajo condiciones en las que la externalización es económicamente conveniente para el dueño de la máquina.

En general, toda externalización conlleva a pros y contras. A continuación se presenta una revisión de casos en los que aparecen problemas consecuencia del outsourcing, así como ejemplos en los cuales la tendencia de subcontratar puede ser justificada a partir del éxito que para ciertos negocios ha implicado el externalizar.

Coase (1988), por ejemplo, propone que en toda actividad económica existen dos tipos de costo: de transacción y de interacción. Bajo ciertas circunstancias, el realizar las tareas de manera interna provee mecanismos más eficientes para acceder y usar recursos que las transacciones en un mercado libre de recursos. Desde ese punto de vista, la eficiencia aparece como promotor para no externalizar.

Soliman (2003) presenta un estudio acerca de tendencias en la externalización de sistemas de información. En este sentido, Smith *et al.* (2004) presentan una formulación en variable mixta para establecer estrategias de subcontratación con costo mínimo en entornos de desarrollo y mantenimiento de sistemas de información.

Lai *et al.* (2004) discuten la vaguedad que existe en contratos de servicios de mantenimiento de infraestructuras civiles, lo que lleva a frecuentes disputas. Por otro lado, Gottfredson *et al.* (2005) presentan una visión más general del proceso de externalización. Además, presentan ejemplos de como el outsourcing estratégico ha permitido el desarrollo sustentable de varias empresas de clase mundial.

Arruñada & Vásquez (2006) estudian los riesgos asociados a la tercerización en la producción y contratos de servicio. Los autores realizan por ejemplo un interesante análisis de cómo el proveedor del servicio podría integrarse hacia adelante en la cadena de suministro, convirtiéndose así en un competidor para su cliente.

2.1.3. Juegos de negociación

A pesar de que no se tienen antecedentes de este enfoque aplicado específicamente al outsourcing de mantenimiento, existen varias publicaciones científicas que estudian la solución de los juegos de negociación involucrados en el modelamiento de interacciones económicas en general. De ahí el potencial o motivación para aplicar los resultados obtenidos en dichos estudios y así extender los modelos de outsourcing desarrollados hasta ahora en cuanto a operaciones de mantenimiento se refiere.

Las publicaciones más importantes en el estudio económico de la negociación entre partes, son debidas a Rubinstein (1982) y Binmore *et al.* (1986). Los autores muestran que la solución de un juego de negociación corresponde al equilibrio de Nash de un juego no-cooperativo, en cuyo caso los jugadores o agentes económicos involucrados reparten en partes iguales el excedente total generado debido al negocio realizado.

Como veremos más adelante tanto la utilidad del cliente, Ω , como del contratista, Π , son funciones estrictamente monótonas con el honorario P . La del cliente es decreciente ya que paga P y la del contratista es creciente ya que recibe P . De esta manera la solución que se obtiene mediante negociación de los términos del contrato resulta en un equilibrio de Nash único. Dicha interacción económica es representada en la figura 2.3.

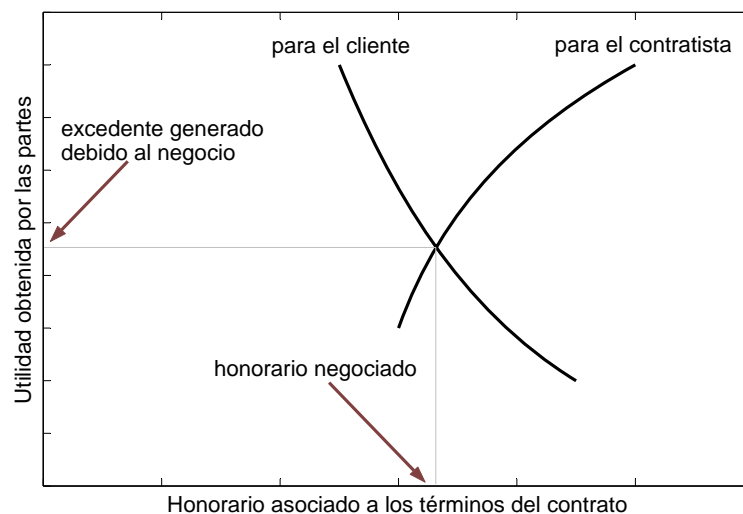


Figura 2.3: Caracterización del equilibrio de Nash involucrado en la negociación.

Notar que el excedente total resultante de subcontratar las operaciones de mantenimiento (vale decir, dado que existe oferta y demanda de outsourcing) corresponde a la suma dada por $\Omega(P) + \Pi(P)$. Por lo tanto en la condición de equilibrio las utilidades para cliente y contratista son, respectivamente:

$$\Pi(P^*) = \frac{\Omega(P^*) + \Pi(P^*)}{2} \quad (2.1)$$

$$\Omega(P^*) = \frac{\Omega(P^*) + \Pi(P^*)}{2} \quad (2.2)$$

De las ecuaciones 2.1 y 2.2, cada una por separado, se desprende la misma condición de negociación para el contrato de mantenimiento. Ello muestra que P^* es un equilibrio si satisface la ecuación:

$$\Omega(P^*) = \Pi(P^*) \quad (2.3)$$

Una vez que el equilibrio de la negociación es alcanzado, la firma proveedora del servicio fija los términos del contrato de tal manera que se maximice la utilidad monetaria. En la presente tesis, la función objetivo a optimizar es la utilidad monetaria por unidad de tiempo, lo que corresponde a un criterio de largo plazo.

En general, existen casos en que los resultados obtenidos por una firma divergen de la meta propuesta cuando ésta maximiza la utilidad. Ello sugiere definir objetivos alternativos al de la maximización de utilidades con el fin de efectivamente alcanzar las metas propuestas. A continuación se presenta una revisión de la literatura asociada.

Aoki (1980, 1982) realiza aportes al planteamiento de juegos cooperativos entre las distintas funciones de una misma firma, lo que deriva en objetivos mixtos. Posteriormente, el autor propone como objetivo el equilibrio de Nash asociado al juego de negociación entre las firmas que componen un oligopolio (Aoki, 1983). Para ello, el autor modela la interacción económica como una coalición entre las firmas.

Brander & Spencer (1983) proponen como modelo la optimización de objetivos mixtos, es decir, interacciones en las que un grupo de jugadores toma las decisiones basándose en la maximización de la utilidad monetaria y otro grupo las toma basándose en algún otro criterio, como por ejemplo disponibilidad en el caso de equipos de emergencia. Posteriormente, Fershtman & Judd (1987), Sklivas (1987), Bolton & Scharfstein (1990), Reitman (1993) y Barcena-Ruiz & Espinosa (1996) realizaron importantes aportes relacionados con este mismo tipo de modelos.

Vega-Redondo (1997) Considera un oligopolio de Cournot con n firmas. En su modelo, entre mayor es la utilidad monetaria de una firma, más tienden las otras a imitar su comportamiento. El autor muestra que, como resultado de aquello, las firmas que sobreviven en el largo plazo son precisamente aquellas que no maximizan su riqueza individual. Como resultado, se forman los carteles económicos.

2.2. Modelos de confiabilidad

Se considera un equipo reparable que es puesto en operación en $t = 0$. La primera falla ocurre en $t = S_1$. Cuando el equipo falla, éste es reemplazado o reparado con el fin de ponerlo operativo nuevamente. La segunda falla ocurrirá en $t = S_2$ y así sucesivamente. De esta manera, se tiene una secuencia de fallas $\{S_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$. Así mismo, sea T_i el tiempo transcurrido entre la $(i-1)$ -ésima y la i -ésima fallas, entonces la secuencia $\{T_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$ define los *tiempos entre fallas*, denominados también *tiempos entre eventos* o *tiempos entre arribos* desde el enfoque de los procesos estocásticos en general. Tal como se mencionó en el capítulo anterior, en general, los procesos estocásticos de conteo son la herramienta matemática por excelencia para modelar la cantidad de fallas que ocurren en cierto intervalo.

Una definición precisa de lo que es un proceso de conteo lo brindan Rausand & Høyland (2004). Esta y el resto de las definiciones especificadas en la presente sección son debidas a los mismos autores. Un proceso estocástico $\{N(t), t \geq 0\}$ se denomina *proceso de conteo* si $N(t)$ satisface:

1. $N(t) \geq 0$.
2. $N(t)$ toma valores enteros.
3. Si $s < t$, entonces $N(s) \leq N(t)$.
4. Para $s < t$, $N(t) - N(s)$ representa el número de fallas que han ocurrido en $(s, t]$.

Alternativamente, un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ puede representarse por la especificación explícita de la secuencia de fallas $\{S_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$ o por la secuencia de tiempos entre fallas $\{T_i, i = 1, 2, 3, \dots\}$. Las tres representaciones contienen la misma información del proceso estocástico.

2.2.1. Procesos homogéneos de Poisson

En dichos modelos, todos los tiempos entre fallas son independientes y están distribuidos exponencialmente. El proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ se denomina *proceso homogéneo de Poisson* de parámetro $\lambda > 0$, si:

1. $N(0) = 0$.
2. El proceso tiene *incrementos independientes*. Esto es, para $0 < t_1 < \dots < t_k, k = 2, 3, \dots$, $N(t_1) - N(0), N(t_2) - N(t_1), \dots, N(t_k) - N(t_{k-1})$ son variables aleatorias independientes.
3. El número de fallas en un intervalo de largo t corresponde a una variable aleatoria distribuida según una Poisson de parámetro λt . Ello implica que el proceso presenta *incrementos estacionarios*. Esto es, para $t > s \geq 0$ y una constante $c > 0$, las variables aleatorias dadas por $N(t) - N(s)$ y $N(t+c) - N(s+c)$ están idénticamente distribuidas.

El comportamiento de la intensidad de falla en un proceso homogéneo de Poisson (HPP) se muestra en la figura 2.4. Ello ocurre típicamente en equipos sin envejecimiento.

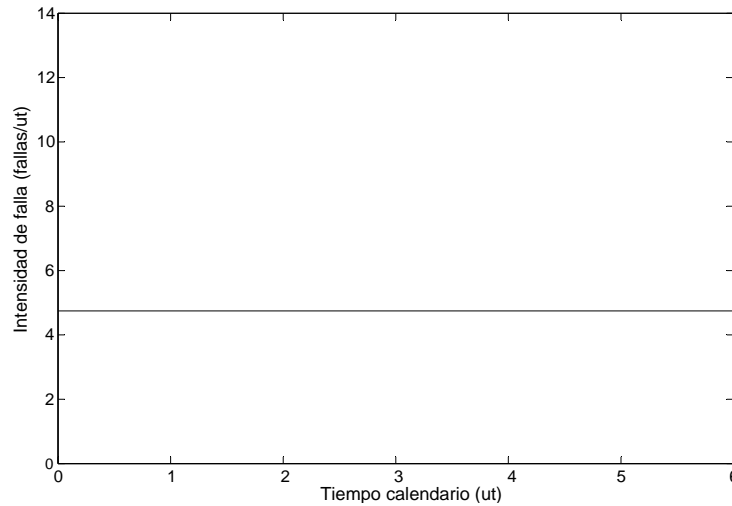


Figura 2.4: Ilustración de la confiabilidad de un equipo condicionado a un HPP.

2.2.2. Procesos de renovación

Los procesos de renovación son una generalización del proceso homogéneo de Poisson. Un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ se denomina *proceso de reparación perfecta* cuando los tiempos entre fallas T_1, T_2, \dots , son independientes e idénticamente distribuidos según alguna función arbitraria. Tal como su nombre lo indica, dichos procesos se emplean para modelar la renovación o reemplazo de un equipo. En este sentido, luego de la falla el equipo o componente es reemplazado o reparado hasta dejarlo en una condición *tan bueno como nuevo*. Por esta misma razón, generalmente dicho proceso se denomina *renovación*. Notar que, en particular, el proceso homogéneo de Poisson presenta esta característica.

El comportamiento de la intensidad de falla en un proceso de renovación se muestra en la figura 2.5. La figura está basada en una simulación de los tiempos entre fallas para una distribución de Weibull con parámetros de forma $\beta = 3$ y de escala $\eta = 1$.

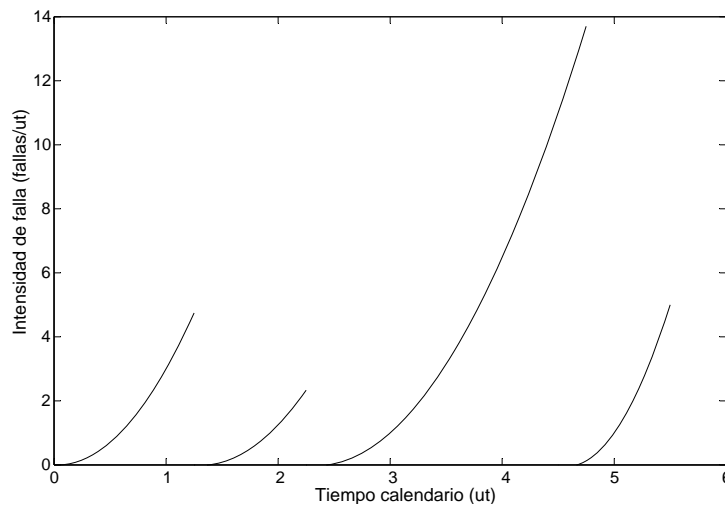


Figura 2.5: Ilustración de la confiabilidad de un equipo sujeto a reparaciones perfectas.

2.2.3. Procesos no-homogéneos de Poisson

Los procesos no-homogéneos de Poisson son otra generalización del HPP, cuya principal característica radica en el hecho de que su tasa de fallas es una función del tiempo, vale decir $\lambda = \lambda(t)$. Un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ se denomina *proceso no-homogéneo de Poisson* de parámetro $\lambda(t)$, si:

1. $N(0) = 0$.
2. El proceso tiene incrementos independientes.
3. El sistema no experimenta más de una falla al mismo tiempo.
4. La probabilidad de que ocurra una falla en un intervalo dt es $\lambda(t)dt$ cuando $dt \rightarrow 0$.

Es importante notar que los procesos no-homogéneos de Poisson (NHPP) no experimentan incrementos estacionarios. Esto significa que las fallas se encuentran más susceptibles a ocurrir en ciertos momentos que en otros. Como consecuencia, los tiempos entre fallas no son necesariamente variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Por otro lado, en relación al modelo anterior y éste, cabe mencionar que la confiabilidad de un equipo sujeto al reemplazo de sus componentes no necesariamente se comporta como un proceso de renovación. De hecho, la tasa de falla puede seguir un modelo tipo NHPP cuando se trata de equipos multicomponentes en el que la renovación de una de sus componentes (o unas cuantas pocas de éstas) tiene un impacto despreciable sobre la intensidad de falla del conjunto como un todo.

El comportamiento de la intensidad de falla en un proceso no-homogéneo de Poisson se muestra en la figura 2.6. Notar que el equipo es reparado sólo con el fin de volverlo a poner en marcha, de manera que la intensidad de falla justo después de la intervención permanece igual a aquella justo antes de la misma. En este sentido, luego de la falla el equipo es reparado hasta dejarlo en una condición *tan mala como antes*. Por esta misma razón, generalmente dicho proceso se denomina *reparación mínima*.

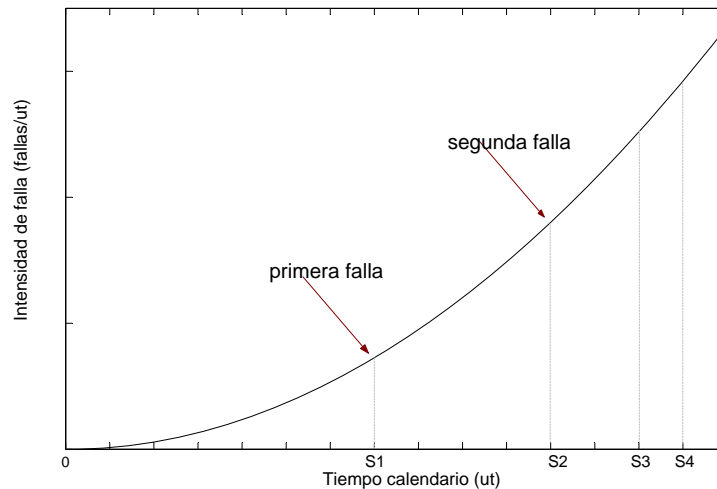


Figura 2.6: Ilustración de la confiabilidad de un equipo condicionado a un NHPP.

2.2.4. Procesos de reparación imperfecta

Un proceso de conteo $\{N(t), t \geq 0\}$ se denomina *proceso de reparación imperfecta* cuando la confiabilidad del equipo sujeto a las intervenciones de mantenimiento resulta en una situación intermedia entre entre reparación mínima y reparación perfecta, en términos de la tasa de falla. En el presente trabajo se utilizará el modelo de Malik (1979), en el cual los procesos de reparación están caracterizados por un parámetro p llamado *factor de mejora*. Existen tres escenarios posibles en los que se puede clasificar p según el valor que toma:

1. $0 < p < 1$: La reparación del equipo es imperfecta.
2. $p = 1$: La reparación del equipo es perfecta.
3. $p = 0$: La reparación del equipo es mínima.

Brown & Proschan (1983) conservaron esta misma idea para desarrollar un modelo de reparación imperfecta en el que luego de cada intervención, el equipo era dejado operativo en una condición perfecta con probabilidad ρ , o bien, en una condición mínima con probabilidad $1 - \rho$. Block *et al.* (1985) extendieron el modelo al caso de reparaciones dependientes del tiempo en las que $\rho = \rho(t)$. Existen otros modelos similares que también se basan en la reducción de la tasa de falla (Lie & Chun, 1986; Chan & Shaw, 1993; Suresh & Chaudhuri, 1994). Así mismo, se han desarrollado modelos basados en la reducción de la edad virtual del equipo y no en la reducción de su intensidad de falla (Uematsu & Nishida, 1987; Kijima *et al.*, 1988; Kijima, 1989; Kijima & Nakagawa, 1991, 1992). Pham & Wang (1996) brindan un resumen bastante completo de los modelos disponibles en el tema de reparación imperfecta.

El comportamiento de la intensidad de falla en un proceso de reparación imperfecta se muestra en la figura 2.7. Notar entonces que este modelo corresponde a una generalización de los tres procesos revisados anteriormente. De todos los procesos revisados anteriormente, éste constituye el caso más común y realista. Por esta misma razón, generalmente dicho proceso se denomina *reparación normal*.

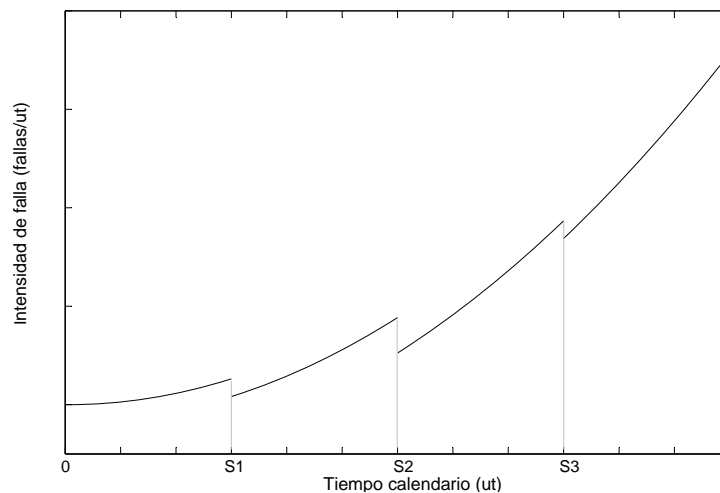


Figura 2.7: Ilustración de la confiabilidad de un equipo sujeto a reparaciones imperfectas.

Capítulo 3

Modelo I: Equipo sin envejecimiento

3.1. Formulación del modelo

En esta sección se presentan los detalles de la formulación del modelo para el caso de un equipo descrito por un proceso homogéneo de Poisson, vale decir, sin envejecimiento.

3.1.1. Caracterización de las fallas

Cada cliente potencial posee una máquina que genera riqueza. La riqueza generada por unidad de tiempo es R , cuando el equipo está en funcionamiento. El valor de compra del mismo es C_r . En general, dicho precio incluye costos de inversión asociados a la puesta en marcha del equipo.

Todas las unidades son estadísticamente similares en términos de su confiabilidad. Para este tipo de procesos, dicha confiabilidad está caracterizada por una intensidad de falla $\lambda = \lambda_0$ constante.

3.1.2. Caracterización de las reparaciones

El equipo está sujeto a sólo tareas de mantenimiento correctivo. Las acciones de mantenimiento preventivo no tienen sentido dado que la intensidad de falla es constante. En este sentido, se puede demostrar que la decisión óptima entrega como solución hacer intervenciones preventivas cada $T_s = \infty$ períodos, lo que equivale a no hacer nunca mantenimiento preventivo. Por lo tanto, $N = 0$ y entonces las variables de decisión se reducen a determinar M y P . Evidentemente, ello resulta razonable puesto que las estrategias de mantenimiento preventivo buscan la reducción en la intensidad de falla cuando ésta crece debido al envejecimiento natural que sufre el equipo, cosa que no ocurre en el presente modelo.

El tiempo de reparación está distribuido exponencialmente con parámetro μ . Por lo tanto, $1/\mu$ define el tiempo medio de reparación asociado a los eventos de emergencia, vale decir, intervenciones de tipo correctivas.

3.1.3. Problemas de decisión

Clientes

Para cada cliente j ($j = 1, \dots, M$), se define F_j como el número de fallas que ocurren el intervalo $(0, T_r]$, donde T_r denota la vida útil del equipo y por lo tanto corresponde al período donde es válido el contrato. Además, también se define Y_{ji} como el tiempo que transcurre antes de que un equipo sea puesto en operación luego de la i -ésima falla. Este tiempo incluye el tiempo de espera y el tiempo de reparación. Notar entonces que F_j y Y_{ji} describen procesos estocásticos.

De esta manera, es fácil notar que la utilidad del j -ésimo cliente viene dada por:

$$\Omega = R \left(T_r - \sum_{i=1}^{F_j} Y_{ji} \right) + \alpha \left(\sum_{i=1}^{F_j} \max\{0, Y_{ji} - \tau\} \right) - C_r - P \quad (3.1)$$

Contratista

El proveedor del servicio presenta egresos por concepto de costos de reparación. El costo de cada intervención es C_m . Este costo incluye los materiales y la mano de obra.

De esta manera, es fácil notar que la utilidad del contratista viene dada por:

$$\Pi = \sum_{j=1}^M \left[P - C_m F_j - \alpha \left(\sum_{i=1}^{F_j} \max\{0, Y_{ji} - \tau\} \right) \right] \quad (3.2)$$

3.2. Análisis del modelo

Para que el modelo sea tratable analíticamente, se hacen las siguientes suposiciones:

1. Los equipos que fallan son reparados según orden de llegada. Ello implica que el sistema de espera y reparación se comporta como un modelo estocástico de colas.
2. Tanto cliente como contratista poseen información completa. Es decir, ambos conocen los parámetros relevantes que influyen sobre sus respectivas utilidades.
3. La vida útil de los equipos se asume suficientemente larga. Ello implica que en el análisis se puede asociar una distribución estacionaria para Y_{ji} .
4. Se asume que $M\lambda < \mu$. Si no, la cola crece en el tiempo y como resultado el tiempo de espera de cada unidad también lo hace.

3.2.1. Valor esperado para los tiempos de espera y reparación

La formulación del modelo es idéntica a una cola de Markov con población finita M de servidor único. Cuando hay k máquinas en estado de falla, la tasa de llegada de las unidades es $\lambda_k = (M - k)\lambda_0$ para $0 \leq k \leq M$. La tasa de reparación que define la capacidad del servicio es μ . Sea $f(y)$ la función de distribución estacionaria asociada los Y_{ji} , entonces la expresión para $f(y)$ puede ser obtenida usando resultados de la teoría de colas. De White *et al.* (1975) o Gross & Harris (1985) tenemos que:

$$f(y) = \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^k}{k!} \quad (3.3)$$

donde P_k ($k = 0, \dots, M - 1$) está dado por:

$$P_k = \frac{(M-k)(\lambda_0/\mu)^k \{M!/(M-k)!\}}{\sum_{k=0}^{M-1} (M-k)(\lambda_0/\mu)^k \{M!/(M-k)!\}} \quad (3.4)$$

La esperanza de la variable asociada a dicha distribución está dada por:

$$E[Y_{ji}] = \int_0^\infty yf(y)dy = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \quad (3.5)$$

Además, se puede demostrar (ver Anexo A) que la esperanza de la variable asociada a la penalización por demora excesiva está dada por:

$$\begin{aligned} E[\max\{0, Y_{ji} - \tau\}] &= \int_\tau^\infty (y - \tau)f(y)dy = \\ &= \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l} (k+1 - \mu\tau)}{\mu^{l+1} (k-l)!} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.2. Valor esperado para la cantidad de fallas

De la definición de distribución de Poisson, se puede expresar la probabilidad de que ocurran n fallas en el intervalo $(0, t]$ como:

$$\Pr[N(t) = n] = \frac{[W(t)]^n}{n!} e^{-W(t)} \quad (3.7)$$

donde $W(t)$ se denomina tasa acumulativa del proceso. Su valor corresponde a la media de $N(t)$ en el intervalo $(0, t]$ y se define de la siguiente manera:

$$W(t) = \int_0^t \lambda(u)du \quad (3.8)$$

De esta manera, para el caso de un HPP la tasa $\lambda = \lambda_0$ es constante y por lo tanto el valor medio del número de fallas ocurridas es $W(t) = \lambda_0 t$. Por lo tanto, a lo largo de la vida útil del equipo, la cantidad esperada de fallas es $E[F_j] = \lambda_0 T_r$.

Caracterizadas ya las variables estocásticas en función de sus respectivos valores esperados, ahora se pueden expresar las utilidades de ambas partes en términos de dichos valores, tal como se detalla en la siguiente sección.

3.2.3. Problemas de decisión

Clientes

La utilidad monetaria de cada cliente, en términos de los valores esperados de cada una de las variables aleatorias involucradas, está dada por:

$$\begin{aligned} \Omega &= RT_r \left(1 - \lambda_0 \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) + \\ &+ \alpha \lambda_0 T_r \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l} (k+1 - \mu\tau)}{\mu^{l+1} (k-l)!} \right) - C_r - P \end{aligned} \quad (3.9)$$

Contratista

Así mismo, al reemplazar los valores esperados de las variables estocásticas, la utilidad del contratista queda determinada por:

$$\Pi = M \left[P - C_m \lambda_0 T_r - \alpha \lambda_0 T_r \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l} (k+1 - \mu\tau)}{\mu^{l+1} (k-l)!} \right) \right] \quad (3.10)$$

3.2.4. Equilibrio de Nash

Tal como lo señala la ecuación 2.3, el equilibrio para la negociación del honorario se obtiene cuando se igualan las utilidades de ambas partes. Notar que la negociación se lleva cabo bilateralmente, por lo que el equilibrio resultante por cada cliente se obtiene sin considerar el factor M que multiplica toda la expresión en la utilidad del contratista.

Tal condición deriva en la siguiente expresión para el honorario negociado:

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{RT_r}{2} \left(1 - \lambda_0 \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) + \\ &+ \alpha \lambda_0 T_r \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l} (k+1 - \mu\tau)}{\mu^{l+1} (k-l)!} \right) - \frac{C_r}{2} + \frac{C_m}{2} \lambda_0 T_r \end{aligned} \quad (3.11)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación 3.10 se tiene que:

$$\Pi(M) = M \left[\frac{RT_r}{2} \left(1 - \lambda_0 \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) - \frac{C_m}{2} \lambda_0 T_r - \frac{C_r}{2} \right] \quad (3.12)$$

Luego, basta dividir por T_r la ecuación anterior para definir la función objetivo de largo plazo $f(M)$ como:

$$f(M) = \frac{\Pi(M)}{T_r} = M \left[\frac{R}{2} \left(1 - \lambda_0 \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) - \frac{C_m}{2} \lambda_0 - \frac{C_r}{2T_r} \right] \quad (3.13)$$

3.3. Implementación numérica

Para la implementación del modelo propuesto se emplean los mismos valores numéricos con los que se obtuvieron los resultados del modelo de referencia revisado en el capítulo 2, cuya función objetivo alcanza su valor máximo en $f^*=38.54$ (um/año) para una cantidad óptima de clientes $M^*=12$ y un valor negociado de honorario $P^*=369.6$ (um). Los datos son: $\lambda_0=0.001$ (1/hora), $\mu=0.02$ (1/hora) $\alpha=0.06$ (um/hora), $\tau=70$ (horas), $C_r=300$ (um), $T_r=40000$ (horas), $C_m=5$ (um), $R=0.015$ (um/hora).

Los resultados obtenidos para el modelo propuesto se presentan en las figuras 3.1 y 3.2, junto al modelo de referencia reproducido de la literatura revisada. De la figura 3.2 se observa que el óptimo es alcanzado para $M^*=12$. Así, con este valor, de la figura 3.1 se obtiene un honorario de $P^*=327.9$ (um). Como resultado de lo anterior, el contratista genera utilidades por $f^*=13.16$ (um/año).

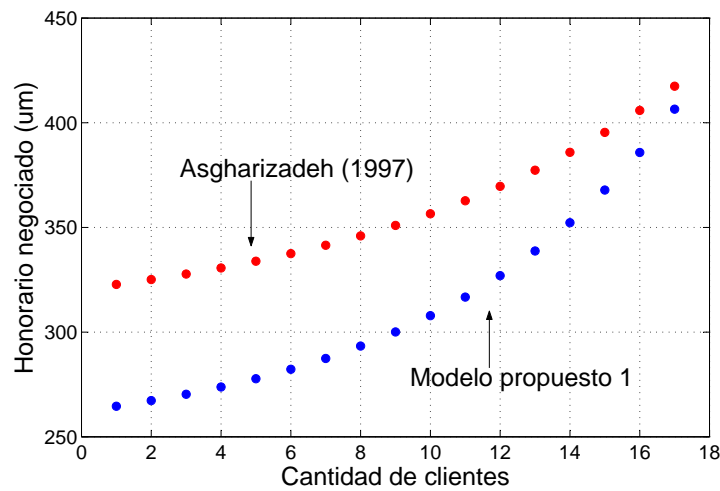


Figura 3.1: Determinación y caracterización del precio.

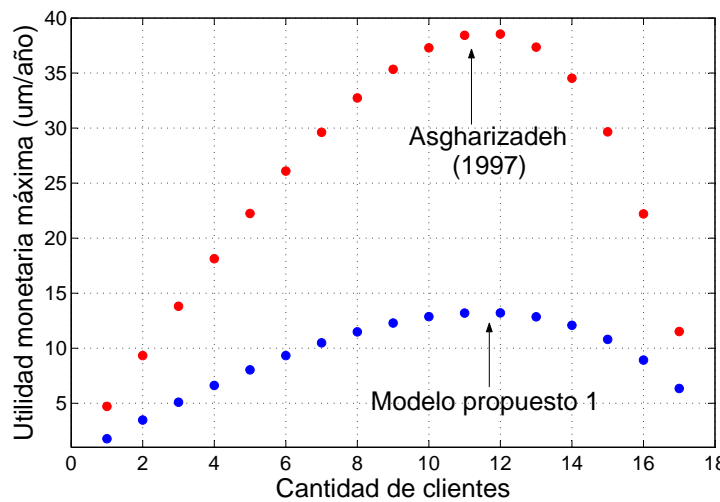


Figura 3.2: Primer modelo propuesto vs referencia.

3.4. Análisis de sensibilidad

En esta sección se evalúa el impacto de tener un equipo con mayor tasa de fallas. En la tabla 3.1 se muestran las soluciones obtenidas. El análisis de sensibilidad es llevado a cabo aumentando dicha tasa hasta un valor máximo de 30 % más que el valor de referencia $\lambda_0=0.001(1/\text{hora})$. Se observa que los valores óptimos decrecen al aumentar λ_0 .

Tabla 3.1: Estrategia para distintos valores de la intensidad de falla

$\lambda_0(1/\text{hora})$	M	$P(\text{um})$	$f(\text{um/año})$
$1.000 \cdot 10^{-3}$	12	327.851	13.16
$1.075 \cdot 10^{-3}$	10	325.548	7.559
$1.150 \cdot 10^{-3}$	7	313.315	3.673
$1.225 \cdot 10^{-3}$	4	304.372	1.130
$1.300 \cdot 10^{-3}$	1	298.969	0.025

Cabe señalar, sin embargo, que un análisis de sensibilidad respecto la intensidad de falla podría resultar poco aprovechable ya que este parámetro puede no ser controlable. En cambio, se podría evaluar el impacto que tiene la calidad del servicio sobre las decisiones óptimas, mediante la variación del tiempo medio de reparación que define parte del tiempo total en que el equipo demora en falla. En la tabla 3.2 se muestran las soluciones obtenidas para varios valores de la tasa de reparación. El análisis de sensibilidad es llevado a cabo reduciendo dicha tasa hasta la mitad del valor de referencia $\mu=0.02(1/\text{hora})$. A excepción del honorario a negociar, se observa que los valores óptimos decrecen al disminuir μ .

Tabla 3.2: Estrategia para distintos valores de la tasa de reparación

$\mu(1/\text{hora})$	M	$P(\text{um})$	$f(\text{um/año})$
$2.00 \cdot 10^{-2}$	12	327.271	13.16
$1.75 \cdot 10^{-2}$	9	327.851	9.956
$1.50 \cdot 10^{-2}$	7	339.364	7.005
$1.25 \cdot 10^{-2}$	5	354.387	4.365
$1.00 \cdot 10^{-2}$	3	373.615	2.141

3.5. Selección del tipo de outsourcing

En muchos casos el dueño del equipo se enfrenta a la posibilidad de elegir entre distintos tipos de servicio para el outsourcing de mantenimiento, además del contrato específico detallado en el capítulo anterior y que llamaremos opción 1. Sin embargo, puede ser que para el cliente resulte más conveniente la opción de un servicio en el que se paga una tarifa unitaria cada vez que el equipo falla.

De esta manera tenemos a continuación un set de opciones en las que el cliente puede basar el outsourcing en lo que a mantenimiento se refiere:

- **Opción 1: Contrato de tarifa fija.** Corresponde al tipo de servicio estudiado en el grueso del presente trabajo, en el cual por un precio fijo el contratista ofrece realizar todas las operaciones de mantenimiento durante el período de validez del contrato, que coincide con la vida útil del equipo. El outsourcing basado en la contratación del servicio implica garantías que protegen al cliente en caso de tiempos de demora excesivos en la devolución de la máquina, mediante cláusulas de penalización que fijan una tarifa pagada por el contratista para amortizar parte de los costos de falla del propietario del equipo.
- **Opción 2: Pago por intervención.** En este tipo de outsourcing no existe un contrato de por medio y cada vez que el equipo falla, su dueño paga una tarifa unitaria por el servicio. Por esta razón, típicamente este tipo de servicios no incluye cláusulas de penalización por demora excesiva.
- **Opción 0: Sin outsourcing.** Cualquiera de las dos opciones anteriores resulta económicamente inconveniente para el cliente. No hay outsourcing.

De esta manera, sean P y C las tarifas asociadas a las opciones 1 y 2, respectivamente, entonces retomando la expresión 3.9 se observa que para el cliente la opción más conveniente es la 1 siempre y cuando se cumpla que:

$$\alpha\lambda_0 T_r \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l} (k+1-\mu\tau)}{\mu^{l+1} (k-l)!} \right) - P > -C\lambda_0 T_r \quad (3.14)$$

Evidentemente, la opción más conveniente será la 2 siempre y cuando se cumpla que:

$$\alpha\lambda_0 T_r \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l} (k+1-\mu\tau)}{\mu^{l+1} (k-l)!} \right) - P < -C\lambda_0 T_r \quad (3.15)$$

Además, como se dijo, las dos opciones pueden resultar inconvenientes si es que la utilidad del propietario de la máquina es negativo en ambos casos. De esta manera, la condición para que no exista outsourcing se tiene cuando se cumplen simultáneamente, para P y C , las dos restricciones siguientes:

$$P > RT_r \left(1 - \lambda_0 \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k (k+1)}{\mu} \right) + \alpha\lambda_0 T_r \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l} (k+1-\mu\tau)}{\mu^{l+1} (k-l)!} \right) - C_r \quad (3.16)$$

$$C > \frac{R}{\lambda_0} \left(1 - \lambda_0 \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k (k+1)}{\mu} \right) - \frac{C_r}{\lambda_0 T_r} \quad (3.17)$$

Mediante el análisis anterior se puede entonces elaborar un mapa de selección como el de la figura 3.3, en el cual para cada combinación de tarifas P y C dadas, el cliente puede elegir de manera óptima la opción de servicio que más le conviene. Se observa que la condición para que exista outsourcing exige un valor de P no mayor a los 350(um) o bien, un valor máximo de 6(um) por intervención para C , aproximadamente.

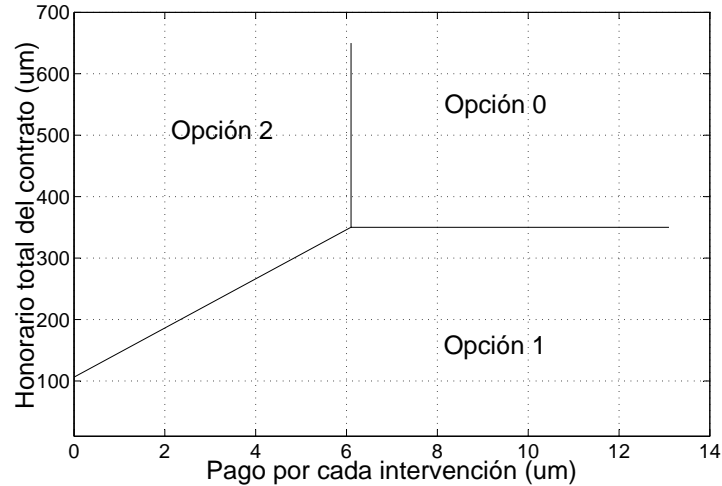


Figura 3.3: Mapa para la selección óptima del tipo de outsourcing.

En la figura 3.4 se presenta el efecto de reducir la tarifa de penalización a la mitad del valor de referencia $\alpha = 0.06(\text{um/hora})$. En la figura se observa que al disminuir α se genera un espacio (comprendido entre las dos tendencias crecientes, roja y azul) en el cual para combinaciones de P y C resulta mejor decisión elegir la opción 2, situación que no ocurría para $\alpha = 0.06(\text{um/hora})$. Así mismo, también crece la posibilidad de que el cliente elija no hacer outsourcing ya que para valores grandes de C , la opción 1 también deja de ser conveniente a menos que la tarifa P sea lo suficientemente baja respecto la situación en que el cliente recibe más ingresos por concepto de penalizaciones.

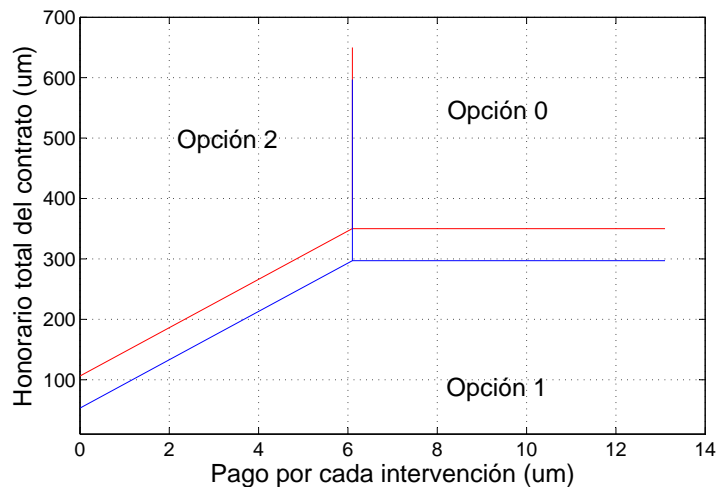


Figura 3.4: Efecto de variaciones en la tarifa de penalización.

3.6. Validación

En esta sección se validan los dos aspectos importantes abordados en el presente trabajo. Primero, en lo que se refiere a outsourcing, a través un benchmarking se evalúan los resultados obtenidos mediante la utilización de juegos de negociación (cuya solución corresponde a un equilibrio de Nash) comparándolos con el modelamiento por juegos del tipo líder-seguidor (cuya solución corresponde a un equilibrio de Stackelberg). Segundo, en lo que se refiere a confiabilidad, mediante simulación numérica en software se confrontan los resultados obtenidos del manejo analítico con que se ha enfrentado el modelamiento del proceso de colas asociado.

3.6.1. Benchmarking

El gráfico $P = P(M)$ es consistente en el sentido de que el honorario a pagar es creciente con la cantidad de clientes. Así mismo, el gráfico $f = f(M)$ también resultó según lo esperado ya que se observa la existencia de un máximo en función del número de clientes. La explicación para tales comportamientos ya fueron explicados en el capítulo 2, con el modelo de referencia.

Los resultados interesantes radican en la comparación de los valores obtenidos para el modelo propuesto, relativos al modelo de referencia. En la figura 3.1 se observa que entre mayor es la cantidad de clientes, la brecha entre ambos modelos se hace cada vez menor. Esto se debe a que entre más clientes existen, menor es la relevancia que representa cada uno de ellos para el contratista, tendiendo así a una situación monopólica (modelo de referencia) para M suficientemente grande. Cabe mencionar que, evidentemente, el modelo propuesto genera una función $P = P(M)$ por debajo de la asociada al modelo de referencia puesto que en el caso monopólico el proveedor del servicio fija el precio con el fin de extraer el máximo excedente del cliente. En el caso de la negociación, el precio a pagar es determinado por ambas partes en forma mancomunada por lo que tiene sentido que el equilibrio resultante sea menor.

En la figura 3.2 se observa la estrategia óptima para la cantidad de clientes se mantiene en $M^* = 12$, a pesar de que la utilidad por unidad de tiempo obtenida para dicho valor es bastante menor comparado con el modelo de referencia. Esto se debe a que en un juego de Stackelberg, el monopolista extrae todo el excedente total. Por otro lado, en un juego de negociación, el excedente total se divide en partes iguales. La interacción económica abordada en la presente tesis consta de dos partes: cliente y contratista. Por lo tanto, el excedente total es dividido en 50-50.

Lo anterior, sugiere que este primer modelo propuesto corresponde a un benchmarking para validar el uso del equilibrio de Nash a partir de su comparación con los resultados obtenidos en un equilibrio de Stackelberg, bajo las mismas estructura de costo involucrada y condiciones de confiabilidad en el equipo. En efecto, si definimos el excedente total (utilidad monetaria de ambas partes), X , resultante del contrato para servicios de mantenimiento, entonces al usar negociación en vez de una estructura tipo líder-seguidor se está modificando el problema de optimización, desde la perspectiva del contratista, en el sentido:

$$\max_{\{M\}} f = X(M) \quad \longrightarrow \quad \max_{\{M\}} f = \frac{1}{2}X(M)$$

De esta manera, resulta evidente que la estrategia óptima $M^* = 12$ no haya cambiado de un modelo a otro puesto que se está maximizando la misma función objetivo salvo un factor $1/2$. Cabe mencionar, sin embargo, que al duplicar las utilidades generadas por el contratista en el modelo propuesto, se evalúa una baja de más del 31 %, en la función objetivo, respecto el modelo de referencia. Esta diferencia, entre ambos modelos, radica en el hecho de que el modelo propuesto considera costos de falla asociados a los períodos en que no opera la máquina cuando esta siendo reparada (o en espera para ser reparada), término que es despreciado en el modelo de referencia. De esta manera, se ha evaluado además la sobrestimación de utilidades resultantes en el modelo de referencia por no considerar los costos de falla. Es en este sentido, además de otros ya mencionados, es que la presente tesis constituye un aporte relativo a los modelos construidos hasta ahora en lo referido a contratos para servicios de mantenimiento.

3.6.2. Simulación

Lógica del sistema

En la figura 3.5 se presenta el diagrama de flujo del proceso para el caso de dos clientes. Para el caso de múltiples clientes, por ejemplo M , el diagrama de flujo es el mismo pero con la diferencia de que se incluyen M bloques al comienzo del flujo y por lo tanto se deben tomar $M - 1$ decisiones al final del mismo.

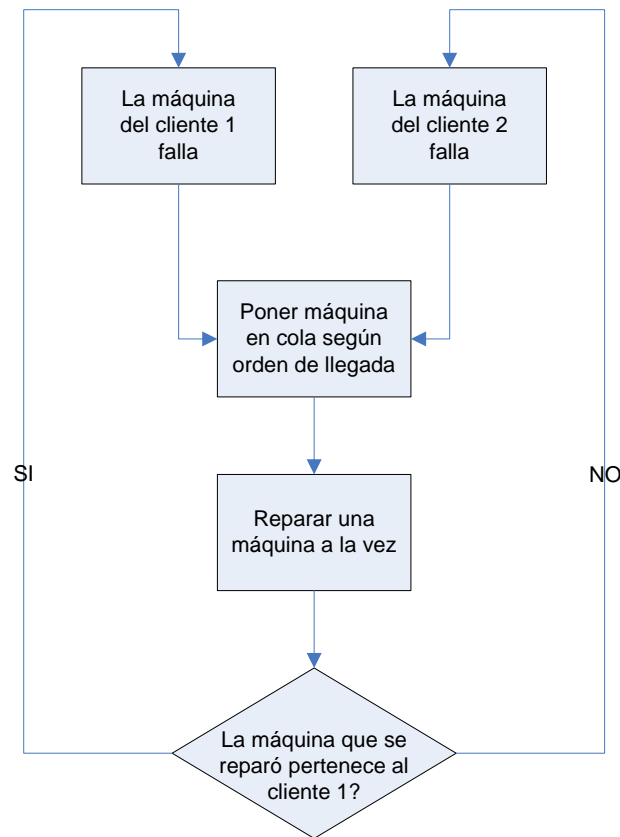


Figura 3.5: Diagrama de flujo del proceso.

Modelo de simulación

En la figura 3.6 se presenta el diagrama de simulación del proceso tal como fue implementado desde el software. En seguida, la tabla 3.3 indica la función que cumple cada bloque así como los parámetros seteados en cada uno de los mismos. Cabe notar que como el modelo analítico considera un único canal de servicio, en el programa se debe imponer que la capacidad de recursos sea igual a los requerimientos para llevar a cabo el proceso de reparación.

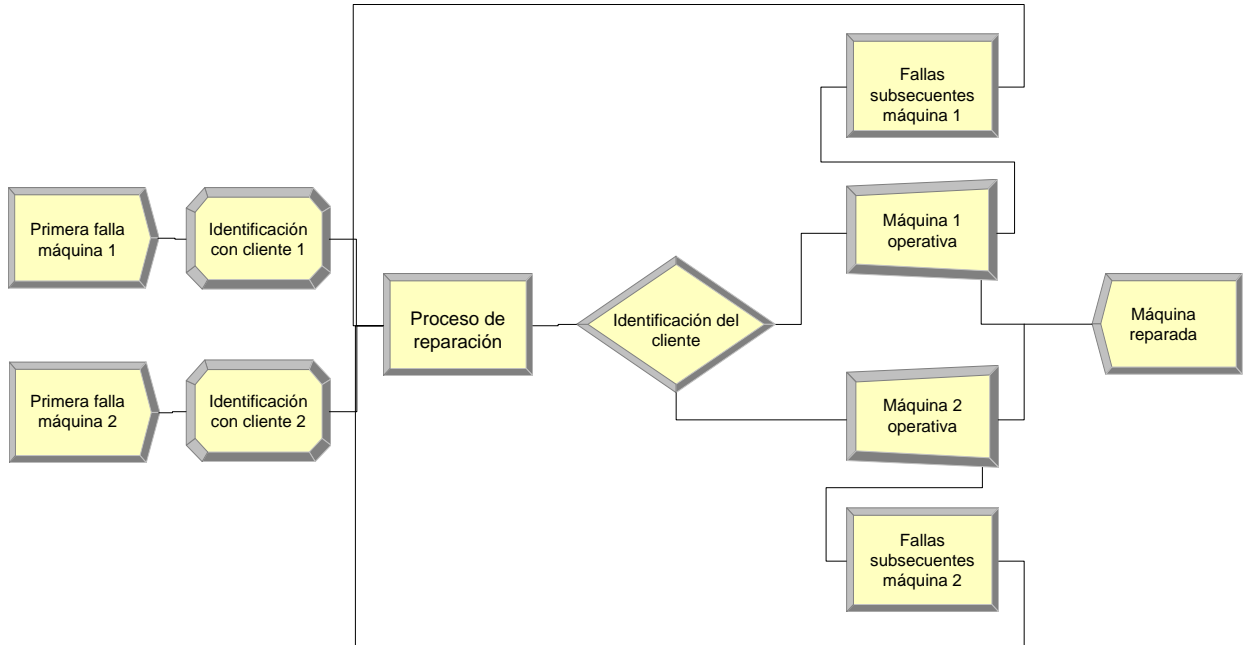


Figura 3.6: Diagrama de simulación del proceso.

Tabla 3.3: Definición de bloques y parámetros involucrados en la simulación

Bloque	Tipo	Función	Parámetros
Primera falla máquina i	Create	Creación y delay de la máquina i	Arribos: 1 EXPO(1000)
Identificación con cliente i	Assign	Asigna la máquina i al cliente i	Tipo: atributo
Proceso de reparación	Process	Delay con uso de recursos	EXPO(50) Requerimientos: 1
Identificación del cliente	Decide	Reconoce de cual cliente es la máquina reparada	Tipo: condicional
Máquina i operativa	Separate	Bloque auxiliar para la retroalimentación de i	
Fallas subsecuentes máquina i	Process	Delay de la máquina i	EXPO(1000)
Máquina reparada	Dispose	Bloque auxiliar para el conteo de fallas	

Evaluación de casos

Previamente se comprobó que 1000 réplicas es suficiente para converger a los valores teóricos. Para ello se definió como test case el modelo con cliente único ya que éste no implica colas de espera y por lo tanto sólo se debe verificar (por Ley de los Grandes Números) que los promedios registrados converjan al MTTR teórico, vale decir $1/\mu = 50$ (horas). De esta manera, se asegura que las diferencias encontradas entre el modelo analítico y la simulación no provengan de un error asociado a la insuficiencia en el muestreo. Al final del trabajo se muestran los tiempos computacionales involucrados, dependiendo del número de réplicas y de clientes a servir (ver Anexo B).

La figura 3.7 muestra la diferencia, en la utilidad generada por el negocio, entre los resultados obtenidos a partir de la simulación versus el modelo analítico desarrollado en las secciones anteriores. Se observa que la predicción del modelo analítico no es muy buena puesto que si el tomador de decisiones selecciona 12 clientes a servir, éste va a cometer un error del -10% respecto a la máxima utilidad que puede generar (la cual ocurre para 17 clientes, según lo predice la simulación).

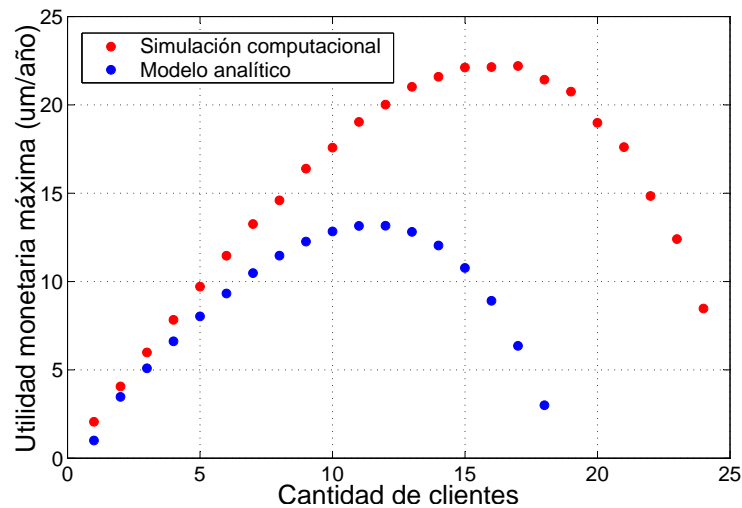


Figura 3.7: Comparación entre el modelo analítico y la simulación.

3.7. Mejoramiento del modelo

Las fuentes de error asociadas al modelo analítico propuesto son dos:

1. Cálculo del número esperado de fallas. La figura 3.8 muestra que el modelo analítico sobreestima el número esperado de fallas que ocurren en el horizonte de interés. Esto es resultado de suponer tiempos medios de servicio despreciables para el cálculo del MTBF, lo que resulta demasiado inapropiado en lo que se refiere a la estimación de los costos de intervención (especialmente cuando existen muchos clientes que servir). Como veremos, basta con corregir este aspecto del modelo para obtener una mejora sustancial que permita validar el enfoque analítico a partir de los resultados obtenidos en la simulación computacional.

- Supuesto de estacionaridad para la función de distribución probabilística que define los tiempos de servicio (reparación + espera). La figura 3.9 muestra que el modelo analítico también sobreestima los tiempos medios de servicio, los cuales se usan para estimar los costos de falla. Se observa, sin embargo, un error máximo no mayor al 1.275 % respecto de la simulación computacional. Teniendo en cuenta esta aspecto, y el hecho de que asociar una distribución no estacionaria implicaría un tratamiento analítico poco manejable del modelo, se ha decidido no realizar un mejoramiento del modelo en lo que a este ítem se refiere.

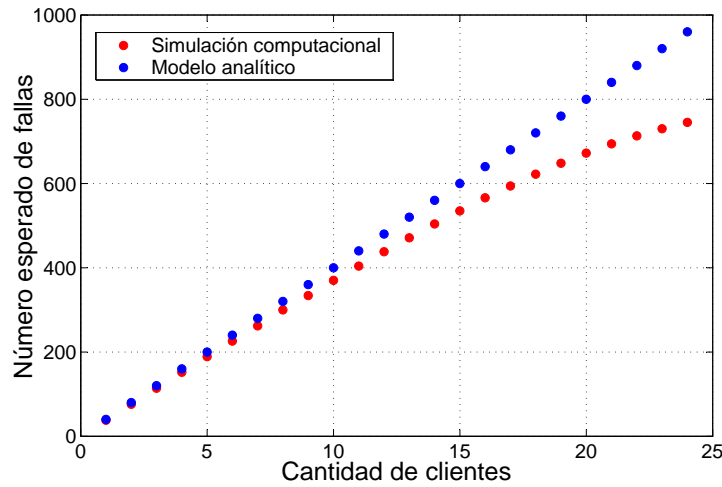


Figura 3.8: Caracterización de la primera fuente de error.

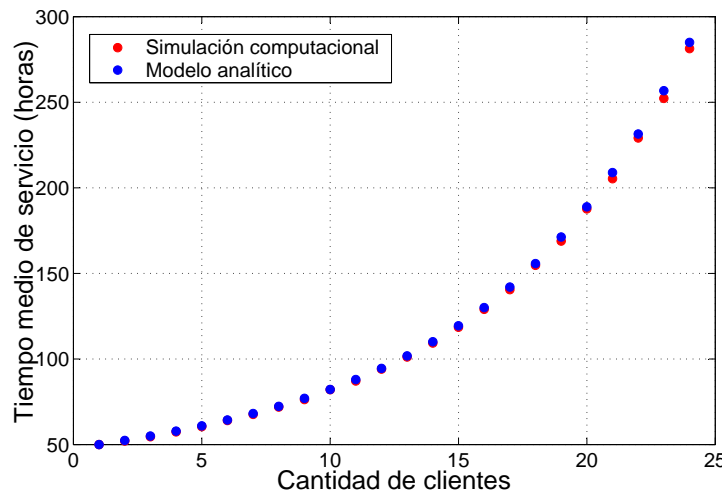


Figura 3.9: Caracterización de la segunda fuente de error.

Se considera el siguiente reemplazo para la evaluación del número esperado de fallas:

$$E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTTF}} = \frac{T_r}{\frac{1}{\lambda_0}} \quad \longrightarrow \quad E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTBF}} = \frac{T_r}{\frac{1}{\lambda_0} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu}}$$

De esta manera, a partir de la ecuación 3.5, se agrega el término que da cuenta del tiempo medio de servicio ($MTTS=MTTR+MTTW$) logrando así una mejor evaluación del tiempo medio entre fallas ($MTBF=MTTF+MTTS$) y por lo tanto, del número esperado de fallas que ocurren durante el período de interés.

La figura 3.10 muestra la diferencia, en la utilidad generada por el negocio, entre los resultados obtenidos a partir de la simulación versus el modelo analítico mejorado. Se observa que la predicción del modelo mejorado es bastante buena puesto que la utilidad monetaria máxima se obtiene para 16 clientes. Luego, si el tomador de decisiones selecciona 16 clientes a servir, éste sólo va a cometer un error no mayor al -0.3% respecto a la máxima utilidad que puede generar (la cual ocurre para 17 clientes, según lo predice la simulación). Como ya se había enunciado, esta pequeña diferencia que no se pudo corregir respecto de la simulación viene del supuesto de estacionaridad para la función de distribución probabilística asociada a los tiempos de espera en la cola de servicio. Considerando entonces lo pequeño que resulta el error porcentual cometido, se valida por simulación el enfoque analítico empleado en éste modelo y en el resto de los modelos a desarrollar en la presente tesis.

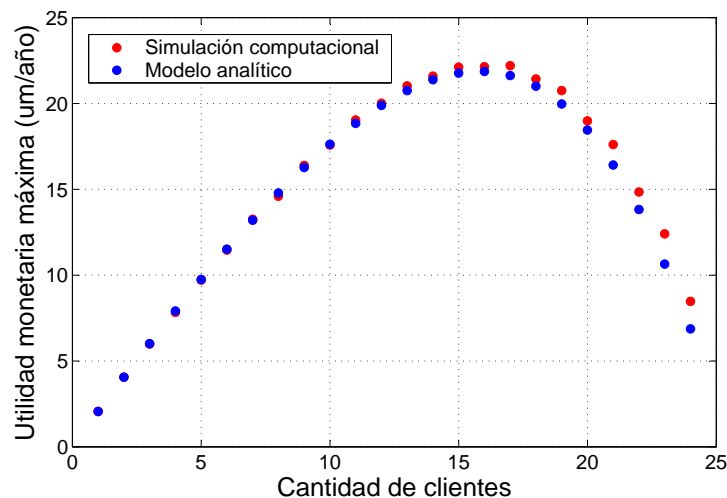


Figura 3.10: Comparación entre el modelo analítico mejorado y la simulación.

En resumen, para el modelo analítico mejorado se tiene entonces que el número óptimo de clientes a servir es alcanzado para $M^*=16$. Ello implica que se negocia un honorario de $P^*=361.9(\text{um})$. Como resultado del equilibrio anterior, el contratista genera utilidades por $f^*=21.86(\text{um/año})$.

3.8. Discusión

Se ha desarrollado un modelo estocástico propio de los procesos homogéneos de Poisson que ocurren durante el mantenimiento de equipos con una tasa de falla constante, vale decir, sin envejecimiento. En este sentido, la única variable de decisión involucrada en la optimización corresponde al número de clientes que debe tener el proveedor del servicio. No existen, por lo tanto, ni estrategias de mantenimiento preventivo ni período óptimo entre reemplazos.

Tal como se concluye de las secciones anteriores, se han validado satisfactoriamente los resultados obtenidos de un modelo desarrollado analíticamente, tanto en el plano de la teoría de juegos asociado al tema de la interacción económica que hay detrás, como en el plano de la teoría de colas involucrado en el mantenimiento propiamente tal (para lo cual se corrigió el modelo usando una mejor evaluación del número esperado de fallas). Además, previamente se ha llevado a cabo un análisis de sensibilidad con resultados consistentes según lo esperado. Ello reafirma aún más que el enfoque analítico con que se construyen éste y los modelos siguientes, no presenta problemas y apunta en buena dirección. De este manera, mediante pequeñas variantes del mismo, el modelo 1 establece las bases para desarrollar los modelos que involucran envejecimiento, y que se detallan en lo que sigue de la tesis.

Por otra parte, se ha aprovechado la simplicidad de este primer modelo con el fin de abordar en primera instancia el problema que involucra la selección del tipo de outsourcing por parte del cliente, en el cual se evalúa el efecto que tiene la posibilidad de dos opciones de servicio, con distintas estructuras tarifarias y otras cláusulas. En este aspecto, también se ha verificado una buena respuesta del modelo al observarse resultados consistentes en términos del efecto que tiene, sobre el criterio de selección entre opciones, una variación en la tarifa de penalización.

Los modelos que se presentan en los próximos capítulos extienden la situación al caso de equipos que sufren envejecimiento en el tiempo. Ello se traduce en una intensidad de falla creciente y por lo tanto se esperan mayores costos de falla. Se observó que implementar numéricamente dichos modelos con un costo de mantención correctiva de 5 mil dólares por intervención (cifra usada en el modelo de referencia) hace que el problema de optimización asociado se vuelva infactible por el hecho de los costos esperados de falla extras debido a envejecimiento del equipo. Por esta razón, se ha renormalizado el valor de dicho costo a una cifra de mil dólares por intervención correctiva. La comparación entre modelos que se muestra al final de la presente tesis está implementada usando este nuevo valor en todos los modelos.

Lo anterior implica además una renormalización del valor para la vida útil del equipo ya que la reducción en el costo de intervención correctiva entrega como resultado, en los próximos modelos, períodos óptimos de reemplazo mayores al valor de referencia $T_r=40000$ (horas). De esta manera, la renormalización en el costo de mantención correctiva debe venir acompañado de una renormalización en la vida útil del equipo para que el problema tenga sentido en los modelos que involucran envejecimiento del equipo. Según los valores óptimos encontrados en los siguientes modelos, se escogió un nuevo valor de $T_r=70000$ (horas) para asegurar que el período óptimo de reemplazo no sobrepase la vida útil de la máquina. La comparación entre modelos que se muestra al final de la presente tesis está implementada usando este nuevo valor en todos los modelos.

Capítulo 4

Modelo II: Overhaul imperfecto

4.1. Formulación del modelo

En esta sección se presentan los detalles de la formulación del modelo para el caso de un equipo sujeto a procesos de reparación imperfecta, en los que los overhauls asociados al mantenimiento preventivo se caracterizan por una calidad entre *tan buena como nueva* y *tan mala como antes*. El tema de la negociación de contratos para servicios de mantenimiento, para equipos sujetos a overhauls imperfectos de tipo preventivo, ya ha sido previamente estudiado y validado por el autor mediante la publicación en una revista de carácter científico-profesional de nivel internacional (Jackson & Pascual, 2007a).

4.1.1. Caracterización de las fallas

Cada cliente potencial posee una máquina que genera riqueza. La riqueza generada por unidad de tiempo es R , cuando el equipo está en funcionamiento. El valor de compra del mismo es C_r . En general, dicho precio incluye costos de inversión asociados a la puesta en marcha del equipo.

Todas las unidades son estadísticamente similares en términos de su confiabilidad. Se caracterizará una confiabilidad propia de los modos de falla por desgaste mecánico. Típicamente, este tipo de envejecimiento puede ser descrito por una intensidad de falla lineal:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + rt \quad (4.1)$$

donde λ_0 corresponde a la tasa de fallas cuando la unidad está nueva, en $t = 0$, y r a la tasa de envejecimiento del equipo. Notar que t corresponde a la edad de la unidad, y no al tiempo calendario.

4.1.2. Caracterización de las reparaciones

A diferencia del primer modelo, en éste el equipo está sujeto tanto a mantenimiento preventivo como correctivo. El tiempo de reparación está distribuido exponencialmente con parámetro μ . Por lo tanto, $1/\mu$ define el tiempo medio de reparación asociado a los eventos de emergencia, vale decir, intervenciones de tipo correctivas. Como las intervenciones preventivas son planificadas, se asume que el tiempo para llevarlas a cabo es despreciable comparado con el tiempo medio de reparación, $1/\mu$, asociado a las tareas de emergencia.

Durante las intervenciones correctivas, la unidad que falló es devuelta a estado operativo por reparación mínima (la confiabilidad del equipo permanece *tan mala como antes*). Este enfoque es apropiado en sistemas grandes y complejos en los que la falla ocurre debido a uno o pocos componentes.

Para las acciones preventivas, la unidad recibe $N - 1$ overhauls imperfectos durante su vida útil ($N \geq 1$, entero). Un overhaul mejora la intensidad de falla del equipo en el sentido de que retrasa la próxima ocurrencia de la falla. Sea $\lambda_n(t)$ la tasa de falla luego del n -ésimo overhaul ($n = 1, \dots, N - 1$). Zhang & Jardine (1998) expresan dicha tasa como:

$$\lambda_n(t) = p\lambda_{n-1}(t - T) + (1 - p)\lambda_{n-1}(t) \quad (4.2)$$

donde p es el factor de mejora que caracteriza la calidad de los overhauls ($0 < p < 1$). Si $p = 0$, significa que el sistema sufre reparaciones mínimas. Si $p = 1$, significa que el sistema sufre reparaciones perfectas.

El intervalo entre overhauls T_p es constante. El equipo es reemplazado periódicamente una vez que ha sido alcanzada su vida útil. Luego, la vida útil del equipo, $T_r = NT_s$, también corresponde a una variable de decisión ya que N y T_s lo son.

4.1.3. Problemas de decisión

Clientes

Para cada cliente j ($j = 1, \dots, M$), se define F_j como el número de fallas que ocurren el intervalo $(0, T_r]$, donde $T_r = NT_s$ denota la vida útil del equipo y por lo tanto corresponde al período donde es válido el contrato. Además, también se define Y_{ji} como el tiempo que transcurre antes de que un equipo sea puesto en operación luego de la i -ésima falla. Este tiempo incluye el tiempo de espera y el tiempo de reparación. Notar entonces que F_j y Y_{ji} describen procesos estocásticos.

De esta manera, es fácil notar que la utilidad del j -ésimo cliente viene dada por:

$$\Omega = R \left(NT_s - \sum_{i=1}^{F_j} Y_{ji} \right) + \alpha \left(\sum_{i=1}^{F_j} \max\{0, Y_{ji} - \tau\} \right) - C_r - P \quad (4.3)$$

Contratista

En este modelo, los costos de intervención están desglosados en el costo de cada tarea correctiva, C_m , y en el de cada overhaul preventivo, C_o . Estos costs incluyen los materiales y la mano de obra.

De esta manera, es fácil notar que la utilidad del contratista viene dada por:

$$\Pi = \sum_{j=1}^M \left[P - C_m F_j - C_o(N - 1) - \alpha \left(\sum_{i=1}^{F_j} \max\{0, Y_{ji} - \tau\} \right) \right] \quad (4.4)$$

Notar que ya aparecen las primeras diferencias con el primer modelo. Estas tienen que ver con la manera como se plantea la estructura de costos, en el sentido de que aparecen costos asociados a las tareas preventivas.

4.2. Análisis del modelo

Las suposiciones necesarias para realizar un tratamiento analítico del problema son las mismas que aquellas realizadas en el primer modelo.

4.2.1. Valor esperado para los tiempos de espera y reparación

El tratamiento en esta sección es igual al de la sección 3.2.1. La única diferencia radica en la expresión para la intensidad de falla que se emplea en las fórmulas, vale decir, reemplazar λ_0 por un valor esperado $\bar{\lambda}$ asociado a la intensidad de falla del equipo cuando está sujeto a overhauls imperfectos, y cuya expresión en función del tiempo viene dada por la combinación de las ecuaciones 4.1 y 4.2.

La siguiente sección tiene como objeto calcular dicho valor esperado $\bar{\lambda}$.

4.2.2. Valor esperado para la cantidad de fallas

Sea $H(t)$ la cantidad de fallas esperadas en el período $(0, t)$ cuando la unidad no es sujeta a ningún overhaul. Por otro lado, sea $\hat{H}(t)$ dicha cantidad esperada de fallas cuando el equipo ha sido sujeto a una cierta cantidad de overhauls en el período $(0, t]$. Luego, se puede demostrar (Zhang & Jardine, 1998) que:

$$\hat{H}(NT_s) = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^{N-n} (1-p)^{n-1} H(nT_s) \quad (4.5)$$

donde

$$H(nT_s) = \int_0^{nT_s} \lambda(t) dt = \lambda_0 nT_s + r \frac{(nT_s)^2}{2} \quad (4.6)$$

Luego, reemplazando 4.6 en 4.5 se puede demostrar (ver Anexo C) que el número esperado de fallas a lo largo de la vida útil del equipo, $\hat{H}(NT_s) = E[F_j]$, está dado por:

$$\hat{H}(NT_s) = \lambda_0 NT_s + rT_s^2 \frac{N^2(1-p) + Np}{2} \quad (4.7)$$

De esta manera, es fácil observar que el valor esperado para la intensidad de falla se puede obtener como:

$$\bar{\lambda} = \frac{\hat{H}}{NT_s} = \lambda_0 + rT_s \frac{N(1-p) + p}{2} \quad (4.8)$$

donde, por simplicidad en la notación, se ha suprimido el argumento (NT_s) del número esperado de fallas $\hat{H}(NT_s)$ a lo largo de la vida útil del equipo. Además, se debe notar que las probabilidades P_k que aparecen están referidas al valor esperado de la intensidad de falla, es decir, $P_k = P_k(\bar{\lambda}) = P_k(NT_s)$.

4.2.3. Problemas de decisión

Clientes

La utilidad monetaria de cada cliente, en términos de los valores esperados de cada una de las variables aleatorias involucradas, está dada por:

$$\begin{aligned} \Omega = & R \left(NT_s - \hat{H} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) + \\ & + \alpha \hat{H} \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l}(k+1-\mu\tau)}{\mu^{l+1}(k-l)!} \right) - C_r - P \end{aligned} \quad (4.9)$$

Contratista

Así mismo, al reemplazar los valores esperados de las variables estocásticas, la utilidad del contratista queda determinada por:

$$\begin{aligned} \Pi = & M \left[P - C_m \hat{H} - C_o(N-1) \right] + \\ & - M \left[\alpha \hat{H} \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l}(k+1-\mu\tau)}{\mu^{l+1}(k-l)!} + \frac{\tau^{k+1}}{k!} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

4.2.4. Equilibrio de Nash

La condición de negociación señalada en la ecuación 2.3 deriva en la siguiente expresión para el honorario negociado:

$$\begin{aligned} P^* = & \frac{R}{2} \left(NT_s - \hat{H} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) + \\ & + \alpha \hat{H} \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l}(k+1-\mu\tau)}{\mu^{l+1}(k-l)!} \right) - \frac{C_r}{2} + \frac{C_m}{2} \hat{H} + \frac{C_o}{2}(N-1) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación 4.10 se obtiene la utilidad del contratista como función de las variables de decisión:

$$\Pi(M, N, T_s) = M \left[\frac{R}{2} \left(NT_s - \hat{H} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) - \frac{C_m}{2} \hat{H} - \frac{C_o}{2}(N-1) - \frac{C_r}{2} \right] \quad (4.12)$$

Finalmente, la división por $T_r = NT_s$ entrega la función objetivo de largo plazo:

$$f(M, N, T_s) = \frac{\Pi(M, N, T_s)}{NT_s} = M \left[\frac{R}{2} \left(1 - \bar{\lambda} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) \right] + \\ - M \left[\frac{C_m \bar{\lambda}}{2} + \frac{C_o}{2} \left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{NT_s} \right) + \frac{C_r}{2NT_s} \right] \quad (4.13)$$

El caso en que existe un único cliente es de especial interés en el análisis inicial de los resultados obtenidos. Por ello, también se plantea a continuación la expresión de la función objetivo para ese caso particular:

$$f(N, T_s) = \frac{\Pi(N, T_s)}{NT_s} = \frac{R}{2} \left(1 - \frac{\bar{\lambda}}{\mu} \right) - \frac{C_m \bar{\lambda}}{2} - \frac{C_o}{2} \left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{NT_s} \right) - \frac{C_r}{2NT_s} \quad (4.14)$$

4.3. Implementación numérica

Para la implementación del modelo 2 se emplean los mismos valores numéricos con los que se obtuvieron los resultados del modelo 1. La única diferencia radica en el hecho de que la vida útil L es variable de decisión y no un parámetro. Además se incluyen los valores para el costo de las intervenciones correctivas, $C_m=1(\text{um})$, el de las preventivas, $C_o=4(\text{um})$, la tasa de envejecimiento, $r=0.01(10^{-5}/\text{hora}^2)$, y el factor de mejora, $p=0.5$.

Se considera primero una negociación con un único cliente, $M=1$, con el fin de caracterizar el comportamiento de la utilidad como función de N y T_s . De esta manera, en la figura 4.1 se observa la topología de la función objetivo (um/año) alrededor de la solución óptima (N^* , T_s^*). Se puede distinguir claramente el conjunto de curvas de nivel que muestran la existencia del máximo global.

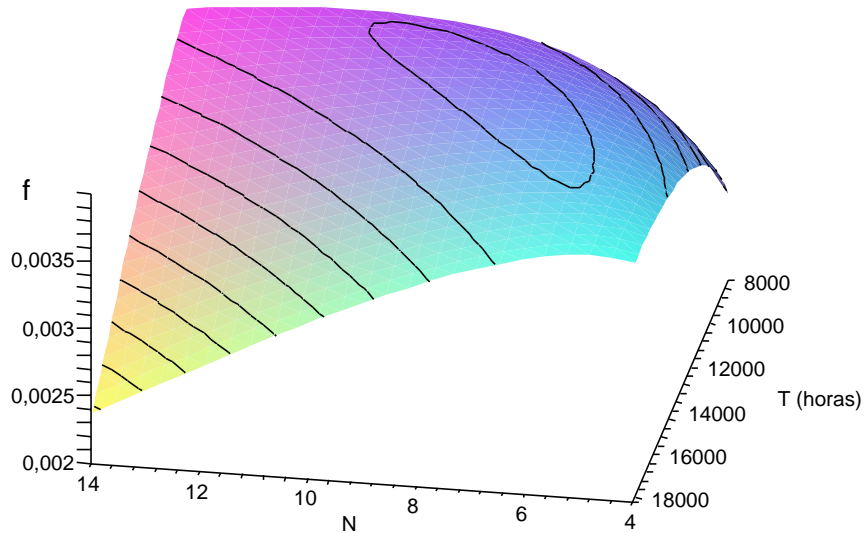


Figura 4.1: Determinación de las estrategias asociadas al mantenimiento preventivo.

La solución óptima para el caso de múltiples clientes se obtiene resolviendo el problema de optimización para cada M , vale decir, para cada una de las funciones objetivo $f(2, N, T_s)$, $f(3, N, T_s)$, ..., $f(M, N, T_s)$, donde el máximo valor usado para M viene dado por la restricción $M < \mu/\lambda_0 = 0.02/0.001 = 20$. Notar, sin embargo, que dicha restricción se hace activa mucho antes (entre los 9 y 10 clientes) como resultado de que el envejecimiento en la máquina hace más restrictiva la condición dado el aumento en la intensidad media de falla.

De la figura 4.2 se observa que el óptimo es alcanzado para $M^*=6$; cantidad de clientes para la cual se obtiene una estrategia óptima de mantenimiento preventivo definida por $N^*=9$ y $T_s^*=33.5$ (meses), lo que implica un período de reemplazo de $T_r^*=30$ (años), suponiendo un uso de 45 horas a la semana y 45 semanas al año. Reemplazando dichos valores óptimos en la ecuación 4.11, se obtiene un honorario de $P^*=720.7$ (um). Como resultado de lo anterior, el contratista genera utilidades por $f^*=18.29$ (um/año).

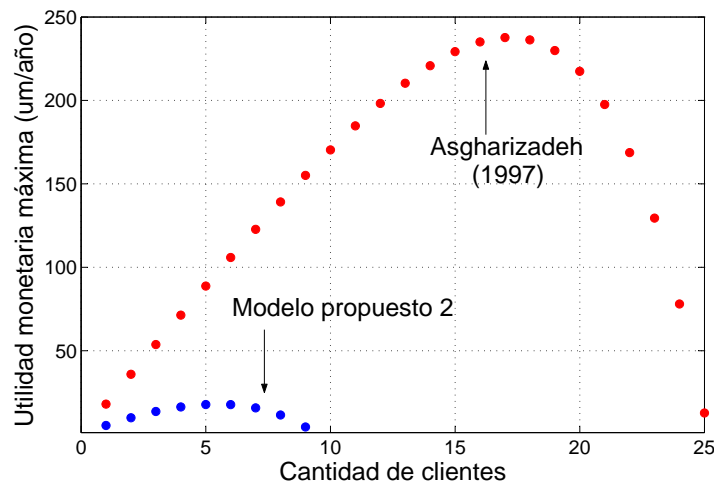


Figura 4.2: Segundo modelo propuesto vs referencia.

4.4. Análisis de sensibilidad

En esta sección se evalúa el impacto de tener un equipo con mayor tasa de envejecimiento. En la tabla 4.1 se muestran las soluciones obtenidas. El análisis de sensibilidad es llevado a cabo aumentando dicha tasa hasta un valor máximo del doble que el valor de referencia $r=0.01(10^{-5}/\text{hora}^2)$. Se observa que los valores óptimos decrecen al aumentar r .

Tabla 4.1: Estrategia para distintos valores de la tasa de envejecimiento

r (1/hora ²)	M	N	T_r (años)	P (um)	f (um/año)
$1.00 \cdot 10^{-7}$	6	9	30.00	720.704	18.26
$1.25 \cdot 10^{-7}$	5	9	28.75	670.018	11.87
$1.50 \cdot 10^{-7}$	4	9	28.00	621.322	7.634
$1.75 \cdot 10^{-7}$	3	9	27.25	562.388	4.770
$2.00 \cdot 10^{-7}$	2	9	27.00	518.894	2.741

Al igual que en el modelo 1, se ha realizado un primer análisis de sensibilidad sobre un parámetro propio del comportamiento del equipo y por lo tanto ello podría resultar poco aprovechable. Sin embargo, nuevamente se podría evaluar el impacto que tiene la calidad del servicio, siendo esta vez el factor de mejora el parámetro controlable de interés por influir éste directamente en los costos de falla esperados. En la tabla 4.2 se muestran las soluciones obtenidas para varios valores del factor de mejora. El análisis de sensibilidad es llevado a cabo aumentando dicho factor desde 0.3 hasta 0.7, de 0.1 en 0.1 unidades. Se observa que los valores óptimos crecen al aumentar p .

Tabla 4.2: Estrategia para distintos valores del factor de mejora

p	M	N	T_r (años)	P (um)	f (um/año)
0.3	4	6	28.75	606.080	10.93
0.4	5	7	29.00	653.035	14.15
0.5	6	9	30.00	720.704	18.26
0.6	7	11	32.75	847.586	23.92
0.7	8	12	34.25	894.174	32.24

4.5. Mejoramiento del modelo

Se considera el siguiente reemplazo para la evaluación del número esperado de fallas:

$$E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTTF}} = \frac{T_r}{\frac{1}{\lambda_0 + rT_s \frac{N(1-p)+p}{2}}} \quad \longrightarrow \quad E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTBF}} = \frac{T_r}{\frac{1}{\lambda_0 + rT_s \frac{N(1-p)+p}{2}} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu}}$$

De esta manera, para el modelo analítico mejorado se tiene entonces que el número óptimo de clientes a servir es alcanzado para $M^*=7$; cantidad de clientes para la cual se obtiene una estrategia óptima de mantenimiento preventivo definida por $N^*=9$ y $T_s^*=37.25$ (meses), lo que implica un período de reemplazo de $T_r^*=33.5$ (años), suponiendo un uso de 45 horas a la semana y 45 semanas al año. Notar que el período entre overhauls se extiende dado que ocurren menos fallas respecto del modelo inicial desarrollado a lo largo del presente capítulo. Ello implica que se negocia un honorario de $P^*=856.9$ (um). Se observa que el equilibrio crece como resultado del aumento en la cantidad de clientes y el período de reemplazo. En consecuencia, el contratista genera utilidades por $f^*=24.4$ (um/año).

4.6. Discusión

Se ha desarrollado un modelo propio de los procesos de reparación imperfecta para caracterizar los overhauls que definen las estrategias preventivas en el mantenimiento de equipos con envejecimiento. En este sentido, aparecen dos nuevos parámetros respecto al modelo 1, que tienen un impacto sobre la confiabilidad de la máquina: el factor de mejora p y la tasa de envejecimiento r .

Tal como fue discutido en el modelo 1, existe una reducción del 50% en la utilidad generada debido a la naturaleza propia de la interacción económica, en la que se ha justificado un escenario de negociación entre las partes y que resulta por lo tanto menos favorable para el contratista, en términos económicos, en relación a un escenario monopolístico de líder-seguidor. En este sentido, según la figura, si se duplican las utilidades generadas según el modelo propuesto para estimar el valor óptimo bajo condiciones de equilibrio de Stackelberg, se evalúa una baja de más del 84%, en la función objetivo, respecto el modelo de referencia. Esta cifra extra corresponde entonces al impacto que tiene el envejecimiento del equipo sobre las utilidades generadas, debido a su influencia directa en el valor esperado para los costos de falla. Posteriormente, en pro de recalcular los valores óptimos involucrados, se ha corregido el modelo analítico realizando una mejor evaluación del número esperado de fallas.

En lo que respecta al análisis de sensibilidad, se observa el efecto que tiene afectar la confiabilidad del equipo ya sea reduciendo el factor de mejora o bien aumentando la tasa de envejecimiento. En las tablas, se observa que cualquiera de estas dos variaciones trae consigo una baja en la cantidad óptima de clientes que el contratista puede tener, ya que los costos de falla esperados son mayores y por lo tanto el contratista debe disminuir su clientela en pro de la calidad del servicio. Así mismo, se tiene un período de reemplazo cada vez menor a medida que se afecta la confiabilidad del equipo, ya que los crecientes costos de falla esperados implican una ineficiencia económica del equipo cada vez más temprana. Como resultado, el contratista genera menos utilidades a medida que la confiabilidad de la máquina es afectada.

En lo que respecta al equilibrio de Nash, el análisis de sensibilidad permite entender los mecanismos involucrados en la dinámica de negociación. En primer lugar, se encuentra la confiabilidad del equipo. En este sentido, cuando se tiene un menor factor de mejora (y/o una mayor tasa de envejecimiento), el honorario negociado debe aumentar para que el contratista pueda protegerse del incremento en los costos de penalización que surgen debido al crecimiento en la frecuencia de llegada a la cola de espera. En segundo lugar, e independientemente de la influencia que la confiabilidad tiene sobre éste, se encuentra el número de clientes. Tal como se revisó en los antecedentes, la tarifa debe aumentar a medida que lo hace el número de cliente para así amortizar el crecimiento esperado en los costos de penalización. En el análisis de sensibilidad, contribuyen estos dos factores en direcciones opuestas, ya que al empeorarse la confiabilidad se reduce la clientela óptima, teniéndose como resultado global una reducción en el honorario de equilibrio. Con ello se deduce que el efecto de aumento en la tarifa negociada, debido a un empeoramiento en la confiabilidad del equipo, es menor que el efecto de baja, por concepto de reducción de clientela.

Capítulo 5

Modelo III: Intervenciones mínimas

5.1. Formulación del modelo

En esta sección se presentan la implementación numérica del modelo 2 para el caso particular de un factor de mejora $p=0$, correspondiente a un equipo sujeto a un proceso no-homogéneo de Poisson. En este sentido y al igual que en el modelo 1, la decisión óptima entrega como solución no hacer nunca intervenciones preventivas. Evidentemente, ello resulta razonable puesto que en este modelo las estrategias de mantenimiento preventivo no logran el objetivo de reducir la intensidad de falla y por lo tanto es económicamente inconveniente tener egresos de dinero por concepto de este tipo de intervenciones. Notar, sin embargo, que en este modelo el período entre reemplazos sí constituye una variable de decisión ya que afecta la intensidad media de falla.

5.2. Implementación numérica

Para la implementación del modelo 3 se emplean los mismos valores numéricos con los que se obtuvieron los resultados del modelo 2. La única diferencia radica en el hecho de que ya no se incurre en costos por mantenimiento preventivo, al igual que en el modelo 1.

De la figura 5.1 se observa que el óptimo es alcanzado para $M^*=3$; cantidad de clientes para la cual se obtiene un período óptimo de reemplazo de unos $T_r^*=28.25$ (años), suponiendo un uso de 45 horas a la semana y 45 semanas al año. Reemplazando dichos valores óptimos en la ecuación 3.11, se obtiene un honorario de $P^*=591.5$ (um). Como resultado de lo anterior, el contratista genera utilidades por $f^*=5.882$ (um/año).

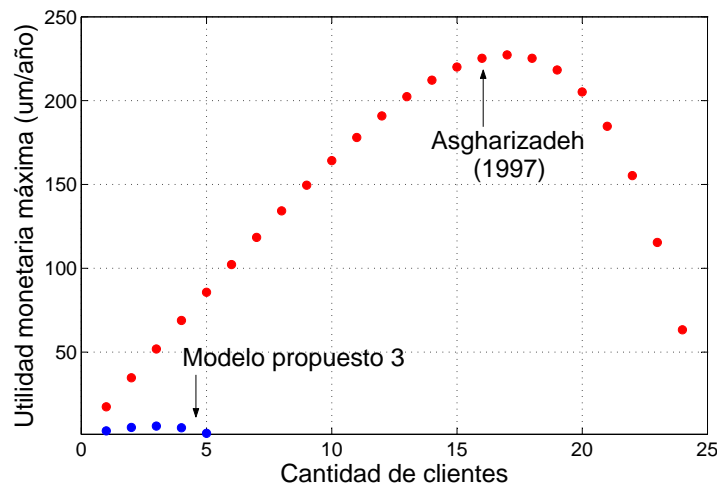


Figura 5.1: Tercer modelo propuesto vs referencia.

Este modelo es particularmente interesante, ya que permite evaluar la factibilidad de la negociación en función del número de clientes y el período de reemplazo. En la figura 5.2 se aprecia, de hecho, que el honorario a pagar por el propietario de la máquina toma valores negativos cuando el período de reemplazo es menor a un umbral que se encuentra alrededor de las 12 mil horas dependiendo del número de clientes. De esta manera, el espacio de soluciones factibles para el período de reemplazo del equipo, además de exigir utilidades positivas para las partes, debe respetar el rango comprendido entre las 12 mil horas, señaladas anteriormente y que aseguran una tarifa positiva, y las 70 mil horas, de vida útil del equipo y que define el período máximo entre reemplazos.

Notar además que la otra variable de decisión del modelo, dada por el número de clientes, también presenta un espacio factible de soluciones y que es bastante reducido, en comparación a los modelos anteriores. En este sentido, se observa una cantidad factible de uno a cinco clientes. Es sólo en este espacio reducido de soluciones para el cual la negociación entre las partes entrega utilidades positivas.

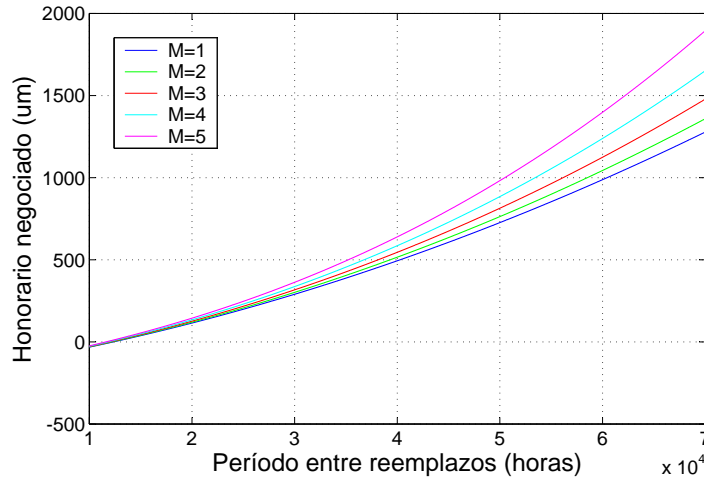


Figura 5.2: Espacio de soluciones factibles para la existencia de negociación.

5.3. Mejoramiento del modelo

Se considera el siguiente reemplazo para la evaluación del número esperado de fallas:

$$E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTTF}} = \frac{T_r}{\frac{1}{\lambda_0 + r \frac{T_r}{2}}} \quad \longrightarrow \quad E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTBF}} = \frac{T_r}{\frac{1}{\lambda_0 + r \frac{T_r}{2}} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu}}$$

De esta manera, para el modelo analítico mejorado se tiene entonces que el número óptimo de clientes a servir es alcanzado para $M^*=4$; cantidad de clientes para la cual se obtiene un período óptimo de reemplazo de unos $T_r^*=30.5$ (años), suponiendo un uso de 45 horas a la semana y 45 semanas al año. Ello implica que se negocia un honorario de $P^*=680.1$ (um). Como resultado del equilibrio anterior, el contratista genera utilidades por $f^*=9.105$ (um/año).

5.4. Discusión

Se ha desarrollado un modelo estocástico propio de los procesos de no-homogéneos de Poisson que ocurren durante el mantenimiento de equipos con envejecimiento y que son reparados mínimamente. Ello implica que las mantenciones preventivas dejan de tener sentido y por lo tanto, respecto al modelo anterior, las variables de decisión se reducen a dos: el número de clientes del contratista y el período de reemplazo del equipo.

Al igual que en los capítulos anteriores, si se duplican las utilidades generadas según el modelo propuesto para estimar el valor óptimo bajo condiciones de equilibrio de Stackelberg, se evalúa una baja de más del 94 %, en la función objetivo, respecto el modelo de referencia. Este baja debida al envejecimiento del equipo es evidentemente mayor que en el caso del modelo 2, ya que los costos de falla son mayores como resultado del tipo de intervenciones que se abordan en el presente modelo. Posteriormente, en pro de recalcular los valores óptimos involucrados, se ha corregido el modelo analítico realizando una mejor evaluación del número esperado de fallas.

Finalmente se observa que el espacio de soluciones factibles para las variables de decisión, involucradas en el problema de optimización, define un rango para el honorario de tal manera que exista negociación. En la ultima figura que se presenta se tiene que dicho rango toma valores máximos que van desde el millón 250 mil dólares hasta un poco menos de los dos millones de dólares, dependiendo del número de clientes. Notar entonces que el espacio de soluciones factibles define la robustez de la negociación ya que, por ejemplo, en los modelos 1 y 2 la cantidad factible de clientes es mayor que en el presente modelo y por lo tanto existen mayores posibilidades tarifarias a negociar. En consecuencia, una observación interesante resulta en el hecho de que el tipo de intervenciones a las que se someta el equipo influye en la dinámica de la negociación, de manera que para estrategias de mantenimiento que impliquen una mayor cantidad esperada de fallas, menor será la gama de honorarios que se maneja durante la negociación del contrato.

Capítulo 6

Modelo IV: Renovaciones

6.1. Formulación del modelo

En esta sección se presentan la implementación numérica del modelo 2 para el caso particular de un factor de mejora $p=1$, correspondiente a un equipo sujeto a procesos de renovación con mantenimiento correctivo mínimo. El modelo presente constituye un caso extremo al igual que el modelo anterior, pero totalmente opuesto al mismo. En este sentido la decisión óptima entrega como solución no hacer infinitas intervenciones preventivas y nunca reemplazar el equipo. Evidentemente, ello resulta razonable puesto que en este modelo las estrategias de mantenimiento preventivo están teniendo el mismo impacto de un reemplazo y por lo tanto resulta económicamente conveniente no realizar reemplazos antes de que el equipo llegue a su vida útil de diseño. Así, el período de reemplazo del equipo coincide con su vida útil y, de esta manera, las estrategias preventivas quedan sujetas a la restricción $NT_s = T_r$.

6.2. Implementación numérica

Para la implementación del modelo 4 se emplean los mismos valores numéricos con los que se obtuvieron los resultados del modelo 2.

De la figura 6.1 se observa que el óptimo es alcanzado para $M^*=17$; cantidad de clientes para la cual se obtiene una estrategia óptima de mantenimiento preventivo definida por $N^*=21$ y $T_s^*=16.5$ (meses). Notar entonces que el período óptimo de reemplazo queda definido por la vida útil del equipo $T_r^*=34.5$ (años), al igual que en modelo 1. Reemplazando dichos valores óptimos en la ecuación 4.11, se obtiene un honorario de $P^*=903.1$ (um). Como resultado de lo anterior, el contratista genera utilidades por $f^* = 92.56$ (um/año).

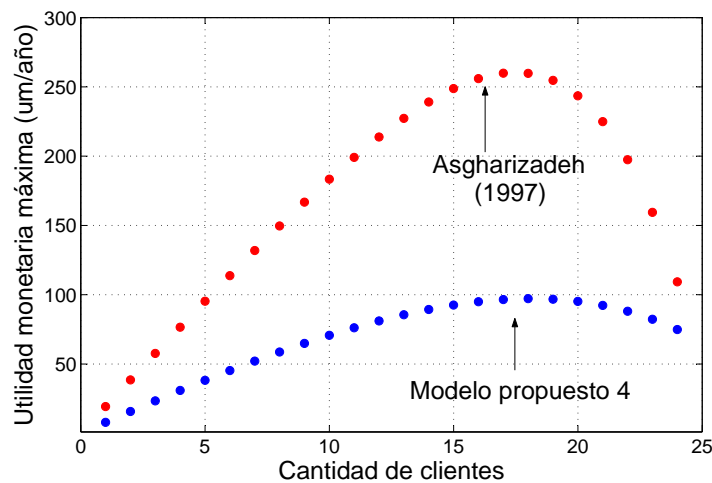


Figura 6.1: Cuarto modelo propuesto vs referencia.

6.3. Intervenciones perfectas

Una extensión interesante del presente modelo es aquella que considera un mantenimiento correctivo perfecto también, además de los overhauls que definen las estrategias preventivas. Ello requiere una nueva formulación, a desarrollar en la presente sección, debido a que se deben analizar dos escenarios posibles:

- **Caso 1:** En el cual se realiza el overhaul antes ocurrir la falla.
- **Caso 2:** En el cual ocurre la falla antes de realizar el overhaul.

6.3.1. Caso 1

Siguiendo el mismo enfoque analítico de los modelos anteriores, es fácil notar que este escenario se reduce simplemente a una situación en la que sólo se realizan intervenciones preventivas. Ello es efectivo dado el hecho de que si se realiza por lo menos un overhaul antes de ocurrir la falla del equipo, entonces la falla nunca ocurrirá (en término de valores esperados) ya que los overhauls son perfectos y por lo tanto dejan el equipo *tan bueno como nuevo*.

De esta manera se deriva en la siguiente expresión para el honorario negociado:

$$P^* = \frac{R}{2}T_r - \frac{C_r}{2} + \frac{C_o}{2}(N - 1) \quad (6.1)$$

Por lo tanto, la función objetivo a maximizar viene dada por la siguiente expresión:

$$f(M, T_s) = M \left[\frac{R}{2} - \frac{C_o}{2} \left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_r} \right) - \frac{C_r}{2T_r} \right] \quad (6.2)$$

6.3.2. Caso 2

Bajo este nuevo escenario, la situación original en la que se supone a priori una combinación de estrategias correctivas y preventivas, también se simplifica como resultado de la optimización. En este sentido, sólo conviene realizar mantenimiento correctivo. En efecto, pues no existe razón alguna para hacer overhauls siendo que el mantenimiento correctivo es más barato y presenta una calidad de intervención con el mismo efecto de renovación que los overhauls.

El equilibrio de la negociación deriva en la siguiente expresión para el honorario:

$$P^* = \frac{RT_r}{2} \left(1 - \bar{\lambda} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) + \alpha \bar{\lambda} \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l}(k+1-\mu\tau)}{\mu^{l+1}(k-l)!} \right) - \frac{C_r}{2} + \frac{C_m}{2} \bar{\lambda} T_r \quad (6.3)$$

Luego, la función objetivo queda definida por:

$$f(M, T_s) = M \left[\frac{R}{2} \left(1 - \bar{\lambda} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) - \frac{C_m}{2} \bar{\lambda} - \frac{C_r}{2T_r} \right] \quad (6.4)$$

donde la intensidad media de falla viene dada por el recíproco del tiempo medio entre fallas:

$$\frac{1}{\bar{\lambda}} = \int_0^{T_s} t f(t) dt \quad (6.5)$$

con $f(t)$ correspondiente a la densidad probabilística de falla, definida a partir de la confiabilidad, $R(t)$, del equipo. A su vez, la confiabilidad viene definida por la tasa acumulativa del proceso:

$$R(t) = e^{-W(t)} \quad (6.6)$$

Notar entonces que, según la definición 3.8, la tasa acumulativa del proceso con envejecimiento lineal es:

$$W(t) = \lambda_0 t + r \frac{t^2}{2} \quad (6.7)$$

Por lo tanto, la densidad probabilística de falla queda:

$$f(t) = -\frac{dR(t)}{dt} = \frac{dW(t)}{dt} e^{-W(t)} = (\lambda_0 + rt) e^{-(\lambda_0 t + r \frac{t^2}{2})} \quad (6.8)$$

6.3.3. Caso combinado

Para integrar los dos escenarios en una misma formulación analítica, se realiza la combinación lineal de los casos 1 y 2, en donde la ponderación de ocurrencia en cada caso viene dada por la probabilidad de que el equipo no falle antes del overhaul, $R(T_s)$, y la probabilidad de que falle antes del overhaul, $1 - R(T_s)$, respectivamente.

De esta manera, el equilibrio deriva en la siguiente expresión:

$$P^* = \frac{RT_r}{2} \left(1 - \frac{1 - R(T_s)}{\int_0^{T_s} t f(t) dt} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) + \frac{C_o}{2} R(T_s)(N-1) + \alpha \frac{1 - R(T_s)}{\int_0^{T_s} t f(t) dt} \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l} (k+1 - \mu\tau)}{\mu^{l+1} (k-l)!} \right) - \frac{C_r}{2} + \frac{C_m}{2} \frac{1 - R(T_s)}{\int_0^{T_s} t f(t) dt} T_r \quad (6.9)$$

Así mismo, la función objetivo queda de la siguiente manera:

$$f(M, T_s) = M \left[\frac{R}{2} \left(1 - \frac{1 - R(T_s)}{\int_0^{T_s} t f(t) dt} \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu} \right) \right] +$$

$$- M \left[\frac{C_m}{2} \frac{1 - R(T_s)}{\int_0^{T_s} t f(t) dt} + \frac{C_o}{2} R(T_s) \left(\frac{1}{T_s} - \frac{1}{T_r} \right) + \frac{C_r}{2T_r} \right] \quad (6.10)$$

De la figura 6.2 se observa que el óptimo es alcanzado para $M^*=19$; cantidad de clientes para la cual se obtiene una estrategia óptima de mantenimiento preventivo definida por $N^*=1$ y $T_s^*=34.5$ (años). Notar entonces que como resultado de la optimización no conviene realizar overhauls, lo que resulta razonable dado que las intervenciones correctivas son más baratas y producen el mismo efecto de renovación que los overhauls. Por lo tanto, conviene más esperar la falla que gastar presupuesto en estrategias de mantenimiento planificado. Por otro lado, notar además que el período óptimo de reemplazo queda nuevamente definido por la vida útil del equipo. Reemplazando dichos valores óptimos en la ecuación 6.9, se obtiene un honorario de $P^*=903.4$ (um). Como resultado del equilibrio anterior, el contratista genera utilidades por $f^* = 124.7$ (um/año).

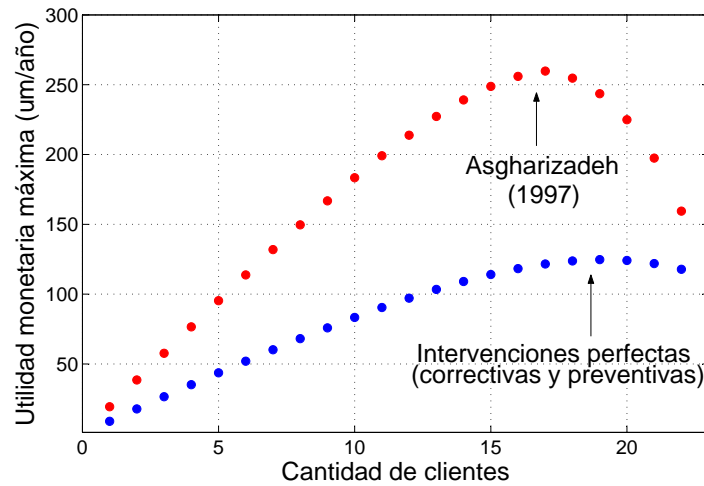


Figura 6.2: Modelo de intervenciones perfectas vs referencia.

6.4. Mejoramiento del modelo

6.4.1. Overhauls perfectos

Se considera el siguiente reemplazo para la evaluación del número esperado de fallas:

$$E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTTF}} = \frac{T_r}{\frac{1}{\lambda_0 + r \frac{T_s}{2}}} \quad \longrightarrow \quad E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTBF}} = \frac{T_r}{\frac{1}{\lambda_0 + r \frac{T_s}{2}} + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu}}$$

De esta manera, para el modelo analítico mejorado se tiene entonces que el número óptimo de clientes a servir es alcanzado para $M^*=19$; cantidad de clientes para la cual se obtiene una estrategia óptima de mantenimiento preventivo definida por $N^*=20$ y $T_s^*=17.25$ (meses), con lo que el período de reemplazo se mantiene en el valor nominal definido por la vida útil del equipo $T_r=34.5$ (años). Ello implica que se negocia un honorario de $P^*=946.2$ (um). En consecuencia, el contratista genera utilidades por $f^*=103.9$ (um/año).

6.4.2. Intervenciones perfectas

Se considera el siguiente reemplazo para la evaluación del número esperado de fallas:

$$E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTTF}} = \frac{T_r}{\int_0^{T_s} t f(t) dt} \quad \longrightarrow \quad E[F_j] = \frac{T_r}{\text{MTBF}} = \frac{T_r}{\int_0^{T_s} t f(t) dt + \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k(k+1)}{\mu}}$$

De esta manera, para el modelo analítico mejorado se tiene entonces que el número óptimo de clientes a servir es alcanzado para $M^*=23$. Ello implica que se negocia un honorario de $P^*=1071.7$ (um). En consecuencia, el contratista genera utilidades por $f^*=145.2$ (um/año).

6.5. Discusión

Se ha desarrollado un modelo estocástico propio de los procesos de renovación que ocurren cuando el mantenimiento del equipo involucra intervenciones perfectas. Primero, se estudia el caso en que los overhauls son perfectos, manteniendo las reparaciones de emergencia como mínimas, al igual que en los modelos anteriores. Luego, se extiende la situación a un modelo en el que tanto las intervenciones correctivas como las preventivas son perfectas.

Notar que el proceso de renovación, cuando existe envejecimiento del equipo, corresponde al modelo más optimista como resultado de que los overhauls tienen el mismo impacto de un reemplazo manteniendo un costo de intervención mucho menor que el que se tendría comprando una máquina nueva. Sin embargo, y según lo esperado, se observa en la tabla comparativa que el modelo es aún más optimista cuando se permite mejorar las intervenciones correctivas desde una calidad mínima hasta una perfecta (en cuyo caso, además, no sería óptimo realizar overhauls), obteniéndose así un alza desde los 92 mil dólares y medio anuales hasta los casi 125 mil dólares anuales. Notar entonces que, al duplicar sendos valores, se evalúa sólo una baja entre el 2% y el 28%, en la función objetivo, respecto el modelo de referencia. Los costos de falla son, por lo tanto, mucho menores a los estimados en los modelos 2 y 3.

Capítulo 7

Integración de modelos

A esta instancia se puede hacer un análisis integrado de los modelos desarrollados. De esta manera, las figuras 7.1 y 7.2 caracterizan la negociación de contratos para servicios de mantenimiento, en términos de las utilidades generadas bajo distintos tipos de intervención. Comparando ambos gráficos, se observa que el contratista decide servir una mayor cantidad de clientes (aumentando sus utilidades) cuando se realiza una mejor evaluación del número esperado de fallas. Ello corresponde a un gran aporte de la presente tesis respecto de los artículos existentes en la literatura.

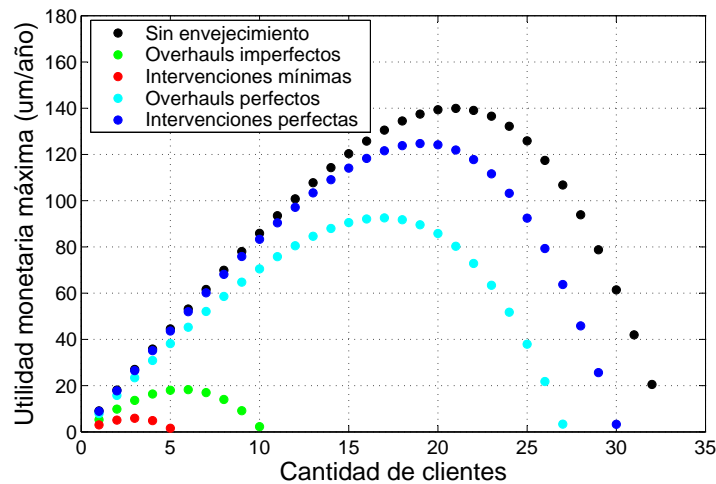


Figura 7.1: Integración de los modelos propuestos inicialmente.

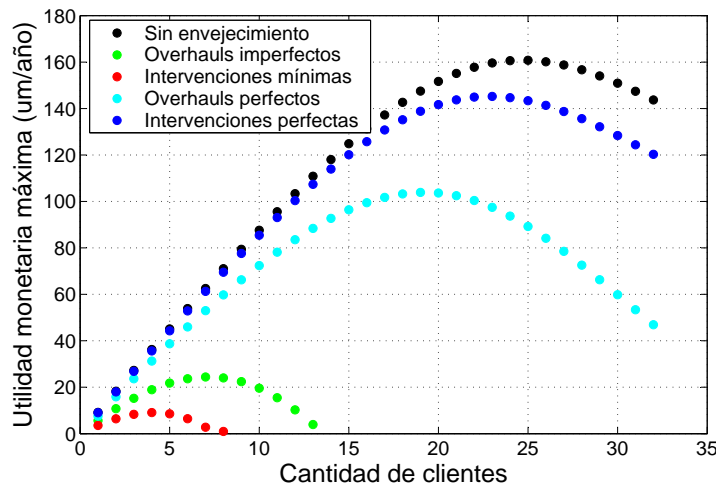


Figura 7.2: Integración de los modelos propuestos mejorados.

Las tablas 7.1 y 7.2 caracterizan los parámetros numéricos que deben ser especificados como términos de un contrato para servicios de mantenimiento, dependiendo del tipo de intervenciones que se le realicen al equipo en cuestión, cuando la negociación es resuelta mediante un equilibrio de Nash en el que las partes involucradas presentan información completa. Se observan reducciones, en la utilidad generada, de hasta un 95 % cuando el equipo sufre envejecimiento. Se puede notar, además, como cambia la toma de decisiones al realizar la mejora en la evaluación del número esperado de fallas.

Tabla 7.1: Integración de modelos iniciales

Modelo	M	$P(\text{um})$	$T_r(\text{años})$	$f(\text{um/año})$
Sin envejecimiento	21	916.1	34.50	139.9
Intervenciones perfectas	19	903.4	34.50	124.7
Overhauls perfectos	17	903.1	34.50	92.56
Overhauls imperfectos	6	720.7	30.00	18.26
Intervenciones mínimas	3	591.5	28.25	5.883

Tabla 7.2: Integración de modelos mejorados

Modelo	M	$P(\text{um})$	$T_r(\text{años})$	$f(\text{um/año})$
Sin envejecimiento	25	1072.1	34.50	160.8
Intervenciones perfectas	23	1071.7	34.50	145.2
Overhauls perfectos	19	946.2	34.50	103.9
Overhauls imperfectos	7	856.9	33.50	24.40
Intervenciones mínimas	4	680.1	30.50	9.105

Notar que el período de reemplazo coincide con la vida útil del equipo en procesos donde la tasa de fallas vuelve a ser igual a la intensidad inicial en algún otro momento posterior, tal como ocurre en el modelo sin envejecimiento y en aquellos que implican renovación. El tema de modelos que integren distintos aspectos de confiabilidad, para la negociación óptima de contratos en mantenimiento, ya ha sido previamente estudiado y validado por el autor mediante la publicación en una revista de carácter científico-profesional de nivel internacional (Jackson & Pascual, 2007b).

Capítulo 8

Conclusiones

8.1. Comentarios

Se ha desarrollado un enfoque analítico para la formulación de modelos de mantenimiento que involucran la subcontratación de dicho tipo de servicios, cuando los términos y condiciones del contrato son establecidos mediante negociación. En los modelos desarrollados, la variable negociada entre las partes es el honorario que debe ser pagado por el dueño de la máquina al contratista que presta el servicio. Se usó elementos de la teoría de juegos, como el equilibrio de Nash, para solucionar la interacción económica involucrada y así determinar el honorario que se debe especificar en el contrato.

Como resultado de la combinación de dos problemas cuya naturaleza matemática es distinta (optimización sujeta a la solución de un juego), la expresión analítica del honorario queda determinada como una función de las variables de decisión asociadas al problema de mantenimiento propiamente tal. Esto permite entender los mecanismos bajo los cuales se fija la tarifa a negociar. En este sentido, se obtuvo que los factores que determinan la negociación del honorario son: la cantidad esperada de fallas a lo largo del horizonte donde es válido el contrato y el número de clientes que posee el contratista.

Según lo obtenido de los análisis de sensibilidad desarrollados, el honorario crece cuando la cantidad esperada de fallas o de mandantes crece. Sin embargo, una mayor cantidad esperada de fallas reduce la cantidad óptima de mandantes que debe tener el contratista. Ello se traduce en dos efectos combinados sobre la variación del honorario: un aumento por el crecimiento en la intensidad media de falla, y un descenso por la reducción en el número óptimo de clientes a servir. A su vez, la cantidad esperada de fallas está determinada en función la mantención preventiva, el tipo de mantenimiento correctivo, y el reemplazo del equipo.

En los modelos estudiados, se ha usado un criterio de largo plazo para maximizar la utilidad monetaria de las partes. Si la vida útil del equipo es corta (comparada con algún tiempo característico como, por ejemplo, el tiempo medio de reparación), dicho criterio podría resultar inútil. En este sentido, si el horizonte de interés es el corto plazo, modelar tiempos de reparación exponencialmente distribuidos no siempre resulta adecuado. Por ejemplo, Mahon & Bailey (1975) sugieren tasas de reparación decrecientes basados en el expertise que el proveedor del servicio de mantenimiento adquiere en el tiempo. Además, en el corto plazo, deja de ser apropiado el supuesto de distribución estacionaria para el tiempo total en cola (espera + reparación) asociado al proceso de Markov involucrado. En tal caso, se debiera considerar un valor de recuperación no despreciable cada vez que la máquina es reemplazada. Finalmente, bajo este mismo contexto, el tiempo de demora que toma realizar las operaciones planificadas de overhaul también deja de ser despreciable respecto al horizonte del contrato y, por lo tanto, tiene un impacto significativo en la estructura de costos.

Se implementó numéricamente un mismo caso de estudio para cada uno de los modelos estudiados, con lo que se desarrolló un análisis integrado de los resultados obtenidos. Se observan diferencias de hasta más de un 95 % entre un modelo y otro, en lo que respecta a la utilidad anual generada por las partes como resultado de una negociación óptima. De manera consistente, el análisis integrado muestra que los modelos menos optimistas en términos de utilidad monetaria generada son precisamente aquellos asociados a un peor tipo de intervención y, por lo tanto, a mayores costos de falla por envejecimiento.

El enfoque analítico desarrollado permite prescindir de simulación computacional como herramienta exclusiva de solución, reduciéndola a herramienta de validación, tal como se hizo al inicio del trabajo con el primer modelo. Ello es consecuencia de la metodología, en la que la cantidad esperada de fallas se expresa en función de las variables de decisión asociadas al problema de optimización. Con ésto, la tesis realiza un aporte a la literatura existente en lo que respecta a modelos matemáticos que apoyen la toma de decisiones dentro de la empresa y, en especial, a lo que a gestión de mantenimiento se refiere.

En términos prácticos, el modelamiento aquí descrito permite cuantificar información útil durante la negociación de un contrato para servicios de mantenimiento. En particular, bajo condiciones de información incompleta puede especificarse un honorario fuera del equilibrio y, por lo tanto, una de las partes estaría ganando un excedente extra a costa de la otra. En este sentido, desde la perspectiva del contratista, el equilibrio de Nash corresponde a la tarifa mínima que éste debe cobrar. Así mismo, desde la perspectiva del mandante, el equilibrio de Nash corresponde a la tarifa máxima que éste debe pagar.

8.2. Extensiones

El enfoque analítico utilizado resultó ser una herramienta útil para especificar el honorario en un contrato para servicios de mantenimiento. Sin embargo, los modelos están restringidos a un conjunto bien específico de supuestos. Como futuros puntos a desarrollar, para mejorar los modelos, se pueden mencionar los siguientes:

- El contratista podría reparar más de una unidad al mismo tiempo. Para ello, se hace necesario incluir como nueva variable de decisión el número de canales de servicio del proveedor.
- El caso de dos o más contratistas participando del negocio. De esta manera, la competencia y/o las alianzas estratégicas se convierten en variables relevantes a considerar en el modelo.
- Los estudios de caso considerados asumen una intensidad de falla lineal en el tiempo. Se podría modelar otro tipo de comportamientos como, por ejemplo, distribuciones de Weibull o tasas de falla con crecimiento exponencial.
- El contrato considerado está basado en niveles de disponibilidad y cláusulas de penalización. En la actualidad, los modelos más vanguardistas están basados en asegurar niveles de confiabilidad y además incluyen bonos de premio por cumplimiento de metas.

Bibliografía

- Aoki, M. 1980. A model of the firm as a stockholder- employee cooperative game. *American Economic Review*, **70**(4), 600–610.
- Aoki, M. 1982. Equilibrium growth of the hierarchical firm: cooperative game approach. *American Economic Review*, **72**(5), 1097–1110.
- Aoki, M. 1983. Managerialism revisited in the light of bargaining-game theory. *International Journal of Industrial Organization*, **1**(1), 1–21.
- Arruñada, B., & Vásquez, X. H. 2006. When your contract manufacturer becomes your competitor. *Harvard Business Review*, **84**(9), 135–145.
- Ascher, H., & Feingold, H. 1984. *Repairable Systems Reliability. Modeling, Inference, Misconceptions and Their Causes*. New York: Marcel Dekker.
- Asgharizadeh, E. 1997. *Modelling and Analysis of Maintenance Service Contracts*. Australia: The University of Queensland.
- Asgharizadeh, E., & Murthy, D. N. P. 1996. Service contracts: a stochastic model. *Presented in the Second Australia-Japan Workshop on Stochastic Models in Engineering, Technology and Management*, **Also accepted for publication of a Special Issue of Mathematical and Computer Modelling**.
- Barcena-Ruiz, J.C., & Espinosa, M.P. 1996. Long-term or short-term managerial incentive contracts. *Journal of Economics and Management Strategy*, **5**(3), 343–359.
- Barlow, R.E., & Hunter, L.C. 1960. Optimum preventive maintenance policies. *Operations Research*, **8**, 90–100.
- Barlow, R.E., & Proschan, F. 1965. *Statistical Theory of Reliability and Life Testing Probability Models*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
- Binmore, K., Rubinstein, A., & Wolinsky, A. 1986. The Nash bargaining solution in economic modelling. *Rand Journal of Economics*, **17**(2), 176–188.
- Blischke, W.R., & Murthy, D.N.P. 1994. *Warranty Cost Analysis*. New York: Marcel Dekker.
- Blischke, W.R., & Murthy, D.N.P. 1996. *Product Warranty Handbook*. New York: Marcel Dekker.
- Block, H.W., Borges, W.S., & Savits, T.H. 1985. Age dependent minimal repair. *Journal of Applied Probability*, **22**, 370–385.
- Bolton, P., & Scharfstein, D.S. 1990. A theory of predation based on agency problems in financial contracting. *American Economic Review*, **80**(1), 93–106.

BIBLIOGRAFÍA

- Brander, J.A., & Spencer, B.J. 1983. Strategic commitment with R&D: the symmetric case. *Bell Journal of Economics*, **4**(1), 225–235.
- Brown, M., & Proschan, F. 1983. Imperfect repair. *Journal of Applied Probability*, **20**, 851–859.
- Cervený, M. 2006. Elaboración de un Plan Maestro de Gestión del Mantenimiento (MMMP) y su Aplicación en Contratos de Minería en Chile. *III Encuentro de Mantenedores de Plantas Mineras*.
- Chan, J.K., & Shaw, L. 1993. Modelling repairable systems with failure rates that depend on age and maintenance. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 566–570.
- Cleroux, R., & Hanscom, M. 1974. Age replacement with adjustment and depreciation costs and interest charges. *Technometrics*, **16**, 235–239.
- Coase, R.H. 1988. The nature of the firm: origin. *Journal of Law, Economics and Organization*, **4**(1), 3–17.
- Coccozza-Thivent, C. 1997. *Processus Stochastiques et Fiabilité des Systèmes*. Berlin: Springer.
- Dekker, R. 1996. Application of maintenance optimization models: a review and analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, **51**, 241–257.
- Djamaludin, I., & Murthy, D.N.P. 2001. Warranty and preventive maintenance. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **8**(2), 89–107.
- Fershtman, C., & Judd, K.L. 1987. Equilibrium incentives in oligopoly. *American Economic Review*, **77**(5), 927–940.
- Fox, B. 1996. Age replacement with discounting. *Operations Research*, **14**, 533–537.
- Gottfredson, M., Puryear, R., & Phillips, S. 2005. Strategic sourcing: from periphery to the core. *Harvard Business Review*, **83**(2), 132–139.
- Gross, D., & Harris, C. M. 1985. *Fundamentals of Queueing Theory*. New York: Wiley.
- Gutiérrez, F. 2006. Centros de Conocimiento Aplicados a Contratos de Mantenimiento. *III Encuentro de Mantenedores de Plantas Mineras*.
- Jackson, C., & Pascual, R. 2007a. Optimal maintenance service contract negotiation with aging equipment. *European Journal of Operational Research*, **Accepted for publication on May 23th**, Article in press.
- Jackson, C., & Pascual, R. 2007b. Optimal negotiation of maintenance contracts under several failure processes. *European Journal of Operational Research*, **Submitted for publication on August 9th**, Article with editor.
- Kijima, M. 1989. Some results for repairable systems with general repair. *Journal of Applied Probability*, **26**, 89–102.

BIBLIOGRAFÍA

- Kijima, M., & Nakagawa, T. 1991. Accumulative damage shock model with imperfect preventive maintenance. *Naval Research Logistics*, **38**, 145–156.
- Kijima, M., & Nakagawa, T. 1992. Replacement policies of a shock model with imperfect preventive maintenance. *European Journal of Operational Research*, **57**, 100–110.
- Kijima, M., Morimura, H., & Suzuki, Y. 1988. Periodical replacement problem without assuming minimal repair. *European Journal of Operational Research*, **37**(2), 194–203.
- Lai, J.H.K., Yik, F.W.H., & Jones, P. 2004. Disputes arising from vaguely defined contractual responsibilities in building services maintenance contracts. *Facilities*, **22**(1-2), 44–52.
- Lhorente, B., Lugtigheid, D., Knights, P. F., & Santana, A. 2004. A model for optimal armature maintenance in electric haul truck wheel motors: a case study. *Reliability Engineering and System Safety*, **84**, 209–218.
- Lie, C.H., & Chun, Y.H. 1986. An algorithm for preventive maintenance policy. *IEEE Transactions on Reliability*, **3**(1), 71–75.
- Louit, D., & Soto, J. 2007. Servicios de Reparación y Mantenimiento (R&M), Experiencia en la Industria Minera en Chile. *II Encuentro en Gestión de Activos Físicos*.
- Mahon, B.H., & Bailey, R.J.M. 1975. A proposed improvement replacement policy for army vehicles. *Operational Research Quarterly*, **26**, 477–494.
- Malik, M.A.K. 1979. Reliable preventive maintenance policy. *AIIE Transactions*, **11**(3), 221–228.
- Murthy, D. N. P., & Asgharizadeh, E. 1995. Modelling service contracts. *Presented at the INFORMS meeting in New Orleans*.
- Murthy, D. N. P., & Asgharizadeh, E. 1996. A Stochastic model for maintenance service contracts. *International Journal of Reliability, Quality and Safety*, **Working paper**.
- Murthy, D. N. P., & Asgharizadeh, E. 1999. Optimal decision making in a maintenance service operation. *European Journal of Operational Research*, **116**, 259–273.
- Murthy, D. N. P., & Padmanabhan, V. 1993. A continuous time model of warranty. *Graduate School of Business, Stanford University*, **Working paper**.
- Murthy, D. N. P., & Yeung, V. 1995. Modelling and analysis of maintenance service contracts. *Mathematical and Computer Modelling*, **22**(10-12), 219–225.
- Murthy, D.N.P., & Blischke, W.R. 2000. Strategic warranty management: a life-cycle approach. *IEEE Transactions on Engineering Management*, **47**(1), 40–50.
- Murthy, D.N.P., & Djameludin, I. 2002. New product warranty: a literature review. *International Journal of Production Economics*, **79**, 231–260.

BIBLIOGRAFÍA

- Murthy, D.N.P., Atrens, A., & Eccleston, J.A. 2002. Strategic maintenance management. *Journal of Quality in Maintenance Engineering*, **89**(4), 287–305.
- Murthy, D.N.P., Solem, O., & Roren, T. 2004. Product warranty logistics: issues and challenges. *European Journal of Operational Research*, **156**, 110–126.
- Pham, H., & Wang, H. 1996. Imperfect maintenance. *European Journal of Operational Research*, **94**, 425–438.
- Pierskella, W.P., & Voelker, J.A. 1976. The control and surveillance of deteriorating system. *Naval Research Logistics Quarterly*, **28**, 47–74.
- Pongpech, J., & Murthy, D.N.P. 2006. Optimal periodic preventive maintenance policy for leased equipment. *Reliability Engineering and System Safety*, **91**, 772–777.
- Ramos, M., & Pérez, R. 2006. Plataforma Integrada para la Toma de Decisiones, una Nueva Forma de Contratos de Mantenimiento para Activos Mineros. *I Encuentro de Mantenedores de Equipos Mineros*.
- Rausand, M., & Høyland, A. 2004. *System Reliability Theory. Models, Statistical Methods and Applications*. New York: Wiley.
- Reitman, D. 1993. Stock options and the strategic use of managerial incentives. *American Economic Review*, **83**(3), 513–524.
- Ross, S. 1996. *Stochastic Processes*. New York: Wiley.
- Rubinstein, A. 1982. Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica*, **50**(1), 97–109.
- Schouten, F.A. Van Der Duyen. 1996. Maintenance policies for multicomponent systems: an overview. *Reliability and Maintenance of Complex Systems*.
- Sklivas, S. 1987. The strategic choice of managerial incentives. *Rand Journal of Economics*, **18**(3), 452–458.
- Smith, L.D., Nauss, R.M., Subramanian, A., & Beck, R. 2004. Decision support for staffing, outsourcing and project scheduling in MIS strategic plans. *INFOR*, **42**(1), 79–100.
- Soliman, K.S. 2003. A framework for global IS outsourcing by application service providers. *Business Process Management Journal*, **9**(6), 735–744.
- Soto, J. 2006. Prácticas y Aprendizaje en el Servicio de Mantenimiento. *I Encuentro de Mantenedores de Equipos Mineros*.
- Suresh, P.V., & Chaudhuri, D. 1994. Preventive maintenance scheduling for a system with assured using fuzzy set theory. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **1**(4), 497–513.
- Thomas, L.C. 1986. A survey of maintenance and replacement models for maintainability and reliability of multi-item systems. *Reliability Engineering*, **16**, 297–309.

BIBLIOGRAFÍA

- Tsay, A.A. 1999. The quantity flexibility contract and supplier-customer incentives. *Management Science*, **45**(10), 1339–1358.
- Tsay, A.A., & Lovejoy, W.S. 1999. Quantity flexibility contracts and supply chain performance. *Manufacturing and Service Operations Management*, **1**(2), 89–111.
- Uematsu, K., & Nishida, T. 1987. Branching nonhomogeneous Poisson and its application to a replacement model. *Microelectronics and Reliability*, **27**(4), 685–691.
- Vega-Redondo, F. 1997. The evolution of Walrasian behavior. *Econometrica*, **65**(2), 375–384.
- Vigus, S. E. 2003. *A Simulation-Based Analysis of the Impact of In-Sourcing a Major Process Element on the Coast Guard HH-60J Depot Maintenance Process*. Ohio: Air Force Institute of Technology.
- White, J.A., Schmidt, J. W., & Bennett, G. K. 1975. *Analysis of Queueing Systems*. New York: Academic Press.
- White, T. 2004. An exploratory study of the role of internet technologies in the field of industrial maintenance: is knowledge management the way forward? *Journal of Information Systems and Technology Management*, **1**(1), 94–110.
- Zhang, F., & Jardine, A.K.S. 1998. Optimal maintenance models with minimal repair, periodic overhaul and complete renewal. *IIE Transactions*, **30**, 1109–1119.

Apéndice A

Valor esperado para el delay post deadline

Para calcular el valor esperado del tiempo total (espera + reparación) posterior al período límite τ , se usa la siguiente fórmula cuya verificación es directa mediante inducción matemática sobre k :

$$\int_{\tau}^{\infty} y^k e^{-\mu y} dy = k! e^{-\mu\tau} \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l}}{\mu^{l+1}(k-l)!} \quad (\text{A.1})$$

Entonces, usando la fórmula anterior, se desea calcular la esperanza definida por:

$$E[\max\{0, Y_{ji} - \tau\}] = \int_{\tau}^{\infty} (y - \tau) f(y) dy$$

En efecto, primero se separan las dos integrales involucradas:

$$E[\max\{0, Y_{ji} - \tau\}] = \underbrace{\int_{\tau}^{\infty} y f(y) dy}_{I_1} - \underbrace{\int_{\tau}^{\infty} \tau f(y) dy}_{I_2}$$

Usando la distribución 3.3, tenemos que:

$$I_1 = \int_{\tau}^{\infty} y f(y) dy = \int_{\tau}^{\infty} y \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu e^{-\mu y} \frac{(\mu y)^k}{k!} dy = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k \mu^{k+1}}{k!} \int_{\tau}^{\infty} y^{k+1} e^{-\mu y} dy$$

Por lo tanto, haciendo el reemplazo $k \rightarrow k + 1$ en la expresión A.1, se tiene:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k \mu^{k+1}}{k!} (k+1)! e^{-\mu\tau} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{\tau^{k+1-l}}{\mu^{l+1}(k+1-l)!}$$

Desagregando el primer término $l = 0$ de la sumatoria interior, se tiene:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^{k+1} (k+1) e^{-\mu\tau} \left[\frac{\tau^{k+1}}{\mu(k+1)!} + \sum_{l=1}^{k+1} \frac{\tau^{k+1-l}}{\mu^{l+1}(k+1-l)!} \right]$$

Empleando un cambio de índice sobre l , se obtiene:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^{k+1} e^{-\mu\tau} \left[\frac{\tau^{k+1}}{\mu k!} + \sum_{l=0}^k \frac{(k+1)\tau^{k-l}}{\mu^{l+2}(k-l)!} \right] = \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left[\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{(k+1)\tau^{k-l}}{\mu^{l+1}(k-l)!} \right]$$

Análogamente, se emplea la expresión A.1 para calcular la segunda integral:

$$I_2 = \tau \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k \mu^{k+1}}{k!} \int_{\tau}^{\infty} y^k e^{-\mu y} dy = \tau \sum_{k=0}^{M-1} \frac{P_k \mu^{k+1}}{k!} k! e^{-\mu\tau} \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l}}{\mu^{l+1}(k-l)!}$$

Por lo tanto, tenemos finalmente que:

$$E[\max\{0, Y_{ji} - \tau\}] = I_1 - I_2 = \sum_{k=0}^{M-1} P_k \mu^k e^{-\mu\tau} \left(\frac{\tau^{k+1}}{k!} + \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l}(k+1-\mu\tau)}{\mu^{l+1}(k-l)!} \right) \quad (\text{A.2})$$

Por último, para que la demostración de la expresión A.2 esté completa, resta verificar aquella dada por A.1. En efecto, por inducción:

Caso inicial: Verificamos que se cumpla para $k = 0$. En efecto, la integral (lado izquierdo) se reduce a:

$$\int_{\tau}^{\infty} y^0 e^{-\mu y} dy = \frac{e^{-\mu\tau}}{\mu}$$

Por otro lado, la sumatoria (lado derecho) se reduce a un único término $l = 0$:

$$0! e^{-\mu\tau} \sum_{l=0}^0 \frac{\tau^{0-l}}{\mu^{l+1}(0-l)!} = \frac{e^{-\mu\tau}}{\mu}$$

Por lo tanto, la expresión A.1 se cumple para $k = 0$.

Caso inducido: Supondremos que se cumple para k y demostraremos para $k + 1$. En efecto, usando integración por partes se llega a la hipótesis:

$$\int_{\tau}^{\infty} y^{k+1} e^{-\mu y} dy = \frac{\tau^{k+1}}{\mu} e^{-\mu\tau} + \frac{k+1}{\mu} \int_{\tau}^{\infty} y^k e^{-\mu y} dy$$

Usando la hipótesis:

$$\int_{\tau}^{\infty} y^{k+1} e^{-\mu y} dy = \frac{\tau^{k+1}}{\mu} e^{-\mu\tau} + \frac{k+1}{\mu} k! e^{-\mu\tau} \sum_{l=0}^k \frac{\tau^{k-l}}{\mu^{l+1}(k-l)!}$$

Empleando un cambio de índice sobre l , se obtiene:

$$\int_{\tau}^{\infty} y^{k+1} e^{-\mu y} dy = \frac{\tau^{k+1}}{\mu} e^{-\mu\tau} + \frac{(k+1)!}{\mu} e^{-\mu\tau} \sum_{l=1}^{k+1} \frac{\tau^{k+1-l}}{\mu^l (k+1-l)!}$$

Finalmente, observamos que el primer término de la expresión corresponde al término de la sumatoria cuando $l = 0$:

$$\int_{\tau}^{\infty} y^{k+1} e^{-\mu y} dy = \frac{(k+1)!}{\mu} e^{-\mu\tau} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{\tau^{k+1-l}}{\mu^l (k+1-l)!}$$

Por lo tanto, la expresión A.1 se cumple para $k+1$, suponiendo la validez para k .

Apéndice B

Tiempos computacionales para cada simulación realizada

Los tiempos computacionales dependen tanto del número de clientes (M), como del número de réplicas (N). Las tablas B.1 y B.2 muestran, en función de estos parámetros, los minutos que demora la simulación del proceso de colas propiamente tal y los que demora el post-procesamiento de la información obtenida luego de cada simulación, respectivamente.

Tabla B.1: Minutos que demora la simulación.

M / N:	1	10	100	1000
1	< 1	< 1	< 1	2
2	< 1	< 1	< 1	3
3	< 1	< 1	< 1	4
4	< 1	< 1	< 1	5
5	< 1	< 1	< 1	6
6	< 1	< 1	< 1	7
7	< 1	< 1	< 1	9
8	< 1	< 1	< 1	10
9	< 1	< 1	< 1	11
10	< 1	< 1	1	12
11	< 1	< 1	1	13
12	< 1	< 1	1	15
13	< 1	< 1	1	16
14	< 1	< 1	1	17
15	< 1	< 1	1	18
16	< 1	< 1	1	20
17	< 1	< 1	2	21
18	< 1	< 1	2	22
19	< 1	< 1	2	24
20	< 1	< 1	2	25
21	< 1	< 1	2	27
22	< 1	< 1	3	29
23	< 1	< 1	3	32

Tabla B.2: Minutos que demora el post-procesamiento de datos.

M / N:	1	10	100	1000
1	< 1	< 1	< 1	1
2	< 1	< 1	< 1	1
3	< 1	< 1	< 1	2
4	< 1	< 1	< 1	2
5	< 1	< 1	< 1	2
6	< 1	< 1	< 1	2
7	< 1	< 1	< 1	3
8	< 1	< 1	< 1	4
9	< 1	< 1	< 1	4
10	< 1	< 1	< 1	5
11	< 1	< 1	< 1	6
12	< 1	< 1	< 1	7
13	< 1	< 1	< 1	8
14	< 1	< 1	< 1	10
15	< 1	< 1	< 1	12
16	< 1	< 1	< 1	12
17	< 1	< 1	< 1	14
18	< 1	< 1	< 1	14
19	< 1	< 1	< 1	16
20	< 1	< 1	< 1	16
21	< 1	< 1	< 1	16
22	< 1	< 1	< 1	24
23	< 1	< 1	< 1	28

Apéndice C

Intensidad media de falla para equipos con envejecimiento lineal

Para calcular el número esperado de fallas a lo largo de la vida útil de un equipo con envejecimiento lineal, se usan las siguientes fórmulas cuya verificación es directa mediante inducción matemática sobre N :

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^{N-n} (1-p)^{n-1} n = N \quad (\text{C.1})$$

$$\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^{N-n} (1-p)^{n-1} n^2 = N^2(1-p) + Np \quad (\text{C.2})$$

De esta manera, empleando las expresiones 4.5 y 4.6, tenemos la expresión para el número esperado de fallas en función de las fórmulas anteriores:

$$\hat{H}(NT_s) = \lambda_0 T_p \underbrace{\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^{N-n} (1-p)^{n-1} n}_{=N} + \frac{rT_s^2}{2} \underbrace{\sum_{n=0}^N \binom{N}{n} p^{N-n} (1-p)^{n-1} n^2}_{=N^2(1-p)+Np}$$

Por lo tanto, tenemos directamente que:

$$\hat{H}(NT_s) = \lambda_0 NT_s + rT_s^2 \frac{N^2(1-p) + Np}{2} \quad (\text{C.3})$$

Con ello, al dividir por la vida útil $T_r = NT_s$, se obtiene la tasa media de falla:

$$\bar{\lambda} = \frac{\hat{H}}{NT_s} = \lambda_0 + rT_s \frac{N(1-p) + p}{2} \quad (\text{C.4})$$