TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

MI31A-Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva

Prof. Tanai Marín

Clase #10

Ley de Viscosidad de Newton

- Del ejemplo visto en la clase anterior:

$$\tau_{yx} = -\mu \frac{dv_x}{dy}$$

- τ_{yx} puede interpretarse como el *flujo unitario de momentum-x* en la *dirección positiva y*.
- Momentum se transfiere desde una región de alta velocidad hacia una de menor v.

Generalización de la Ley de Viscosidad de Newton

- Hasta ahora, la viscosidad fue definida en términos de un flujo de corte simple en estado estacionario, en el cual v_x es función sólo de y, con v_y y v_z =0.

- En general nos interesan flujos más complicados en que están presentes las tres componentes de la velocidad y éstas dependen de las tres coordenadas e incluso del tiempo.

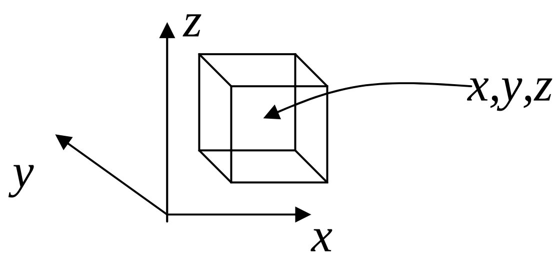
- Debemos dar una definición más general para la ley de viscosidad y que se simplifique a la forma conocida para un flujo de corte simple estacionario.

Generalización de la Ley de Viscosidad de Newton

- Consideremos un flujo general, en el que la velocidad es función de la posición y el tiempo:

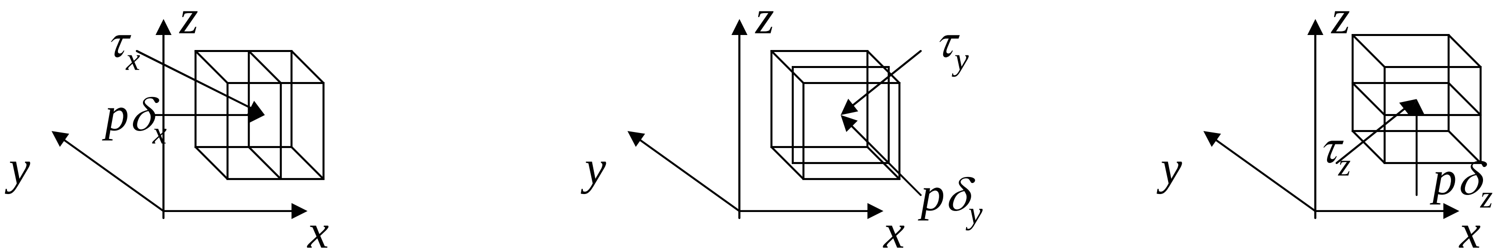
$$v_x = v_x(x, y, z, t) \qquad v_y = v_y(x, y, z, t) \qquad v_z = v_z(x, y, z, t)$$

- En este caso habrán 9 componentes de estrés τ_{ij}, que serán definidos.
- Consideremos el siguiente elemento de volumen de cara unitaria, el centro del elemento se encuentra en la posición x,y,z



Generalización de la Ley de Viscosidad de Newton

- Consideremos los siguientes cortes en el elemento de volumen.
- Cuáles son las fuerzas que actúan en esas superficies para mantener el equilibrio?



- Habrán dos contribuciones a la fuerza: una asociada a la presión y otra asociada a las fuerzas viscosas.

Generalización de la Ley de Viscosidad de Newton

- Las fuerzas asociadas a la presión serán siempre perpendiculares a la cara expuesta. En el primer caso, la presión p (escalar) multiplicado por el vector unitario δ_x. Estas fuerzas serán ejercidas cuando el fluido se encuentre en reposo o en movimiento.
- Las fuerzas viscosa sólo se originan cuando hay gradientes de velocidad. En general no son perpendiculares a la superficie del elemento ni paralelas a éste.
- En el primer caso, vemos que τ_x se ejerce sobre la superficie, esta fuerza es un vector con componentes τ_{xx}, τ_{xy}, τ_{xz}. De la misma forma, τ_y y τ_z son vectores.

Generalización de la Ley de Viscosidad de Newton

- En resumen, las fuerza por unidad de área actuando en las superficies expuestas se expresan en la tabla:

Dirección normal a la superficie	Fuerza vectorial por unidad de área (Flujo de momentum)	Componentes de las fuerzas por unidad de área actuando en la superficie expuesta.		
		componente-x	componente-y	componente-z
x	$\pi_x = p\delta_x + \tau_x$	$\pi_{xx} = p + \tau_{xx}$	$\pi_{xy} = \tau_{xy}$	$\pi_{xz} = \tau_{xz}$
y	$\pi_y = p\delta_y + \tau_y$	$\pi_{yx} = \tau_{yx}$	$\pi_{yy} = p + \tau_{yy}$	$\pi_{yz} = \tau_{yz}$
z	$\pi_z = p\delta_z + \tau_z$	$\pi_{zx} = \tau_{zx}$	$\pi_{zy} = \tau_{zy}$	$\pi_{zz} = p + \tau_{zz}$

Generalización de la ley de Viscosidad de Newton

- En la tabla anterior se incluyen los efectos de a *presión* y los *esfuerzos viscosos*. Ambos efectos se combinan en lo que se define el *estrés molecular*, de la siguiente forma:

$$\pi_{ij} = p\delta_{ij} + \tau_{ij}$$

- Donde i y j pueden ser x, y o z.
- δ_{ij} se conoce como el *delta de Kronecker*, que vale 1 si $i=j$ y 0 si $i \neq j$.
- π_{ij}= Fuerza en la dirección j en un área unitaria perpendicular a la dirección i.
- π_{ij}= Flujo de *momentum*-j en la dirección positiva i.
- Los esfuerzos π_{xx}, π_{yy} y π_{zz} se denominan *esfuerzos normales*, mientras que π_{xy}, π_{yz}, … son *esfuerzos de corte*.

Generalización de la ley de Viscosidad de Newton

- La pregunta es cómo se relacionan estos esfuerzos con los gradientes de velocidad en el fluido?
  - Los esfuerzos viscosos deben ser una combinación lineal de todos los gradientes de velocidad.
  - No deben aparecer derivadas o integrales del tiempo en las expresiones.
  - No debe haber ninguna fuerza viscosa si el fluido está en estado de rotación pura. τ_{ij} debe ser una combinación simétrica de los gradientes de velocidad.
  - Los coeficientes de viscosidad (coeficientes lineales) deben ser escalares para fluidos isotrópicos

$$\tau_{ij} = A\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + B\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta_{ij}$$

Generalización de la ley de Viscosidad de Newton

- Además queremos que la equación anterior se reduzca a la ecuación simplificada vista anteriormente:

$$\tau_{ij} = A\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \quad \Rightarrow A = -\mu$$

- Finalmente, la constante escalar B se fija igual a $2/3\mu$-κ. donde κ se define como la *viscosidad dilatacional*. Para gases monoatómicos a baja densidad, $\kappa = 0$.

Generalización de la ley de Viscosidad de Newton

- Se obtiene un set de 9 relaciones (6 independientes) que generalizan la ley de viscosidad de Newton.

$$\tau_{ij} = -\mu\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa\right)\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\delta_{ij}$$

- Donde $\tau_{ij} = \tau_{ji}$, i y j toman los valores 1,2,3.
- Estas relaciones para los esfuerzos se asocian con los nombres de *Navier*, *Poisson* y *Stokes*.
- En notación vectorial-tensorial, estas relaciones se expresan:

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu\left(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T\right) + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa\right)(\nabla\cdot\mathbf{v})\boldsymbol{\delta}$$

Generalización de la ley de Viscosidad de Newton

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu\left(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T\right) + \left(\frac{2}{3}\mu - \kappa\right)(\nabla \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\delta}$$

$\boldsymbol{\delta}$:es el *tensor unitario*, con componentes δ_{ij}.

$\nabla \mathbf{v}$:es el *tensor de gradiente de velocidad*,

$(\nabla \mathbf{v})^T$:es la transpuesta del *tensor de gradiente de velocidad*.

$(\nabla \cdot \mathbf{v})$:es la *divergencia* del vector de velocidad.

Generalización de la ley de Viscosidad de Newton

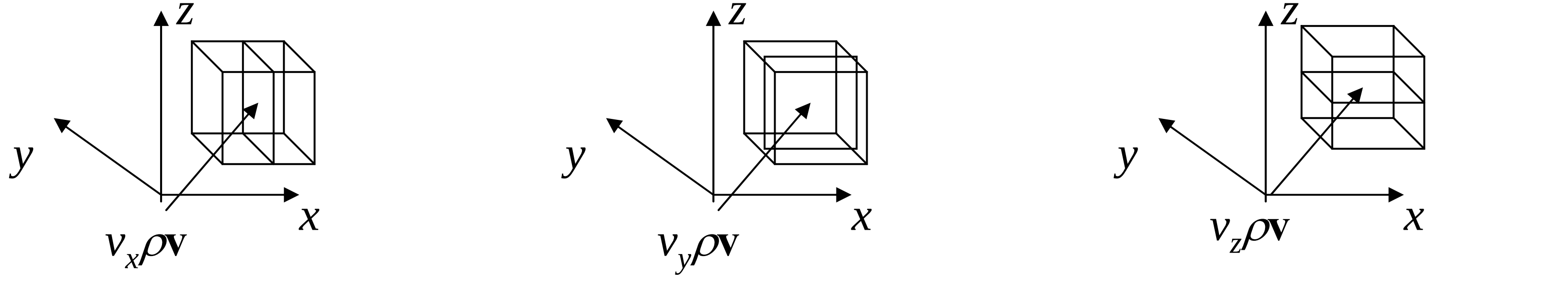
- En la generalización de la ley de viscosidad de Newton, aparecen dos coeficientes que caracterizan al fluido, μ y κ. en general no es necesario conocer κ.
  - En el estudio de gases, se puede asumir que se comportan como gases monoatómicos ideales y $\kappa = 0$.
  - En el estudio de líquidos, asumiremos que se trata de fluidos incompresibles por lo que la *divergencia* del vector de velocidad es 0.

Transporte convectivo de momentum

- Hasta ahora hemos visto es transporte molecular de momentum. π_{ij} representa el flujo de momentum-j a través de una superficie perpendicular a la dirección i.
- Además, se puede transportar momentum por el movimiento del seno del fluido. Esto se denomina *transporte convectivo*.

Transporte convectivo de momentum

- Veamos el elemento de volumen con centro en las coordenadas x,y,z. El fluido tiene velocidad $\mathbf{v}$.
- La taza de flujo volumétrico a través de cada superficie es v_x, v_y, v_z respectivamente.
- El fluido, lleva consigo momentum $\rho\mathbf{v}$ por unidad de volumen. Por lo tanto el flujo de momentum a través cada superficie es $v_x\rho\mathbf{v}$, $v_y\rho\mathbf{v}$ y $v_z\rho\mathbf{v}$.



Transporte convectivo de momentum

- Estos tres vectores, describen el flujo de momentum a través de cada superficie.

Dirección normal a la superficie	Flujo de momentum a través de la superficie	Componentes del flujo de momentum.		
		componente-x	componente-y	componente-z
x	$\rho v_x \mathbf{v}$	$\rho v_x v_x$	$\rho v_x v_y$	$\rho v_x v_z$
y	$\rho v_y \mathbf{v}$	$\rho v_y v_x$	$\rho v_y v_y$	$\rho v_y v_z$
z	$\rho v_z \mathbf{v}$	$\rho v_z v_x$	$\rho v_z v_y$	$\rho v_z v_z$

Transporte convectivo de momentum

- En notación compacta, los nueve escalares de la tabla anterior representando las componentes de los flujos convectivos de momentum se expresan:

$$\rho \mathbf{v}\mathbf{v} = \sum_i \sum_j \delta_i \delta_j \rho v_i v_j$$

Flujo de Momentum combinado

- Corresponde a la suma de *flujo de momentum molecular* y del *flujo convectivo de momentum*:

$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\pi} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v} = p\boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{v}\mathbf{v}$$

- Los componentes de ϕ son:

$$\phi_{xx} = \pi_{xx} + \rho v_x v_x = p + \tau_{xx} + \rho v_x v_x$$

$$\phi_{xy} = \pi_{xy} + \rho v_x v_y = \tau_{xy} + \rho v_x v_y$$

$$\phi_{xz} = \ldots$$