TRANSFERENCIA DE MOMENTUM

MI31A-Fenómenos de Transporte en Metalurgia Extractiva

Prof. Tanai Marín

Clase #15

1. Ecuación de Bernoulli para flujo estacionario

- Se deriva a partir de las ecuaciones de movimiento para fluidos inviscidos.
- Además, asume que el observador sigue la trayectoria de una masa de control.

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{d}{ds}p - g\frac{d}{ds}h$$

  - s es la distancia recorrida a lo largo de una línea de flujo, p es la presión del fluido, h es la elevación en el campo gravitacional.

Ecuación de Bernoulli para flujo estacionario

- Al integrar la ecuación anterior a lo largo de una línea de flujo entre los puntos 1 y 2, se obtiene la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + \int_{p_1}^{p_2} \frac{1}{\rho}\,dp + g\left(h_2 - h_1\right) = 0$$

- Relaciona la velocidad, presión y elevación de dos puntos a lo largo de una línea de flujo en situaciones que la viscosidad juega un rol menor

Ejercicio: Ecuación de Torricelli

- Utilizando la ecuación de Bernoulli, calcule la velocidad de salida del fluido desde un tanque abierto (destapado). La altura desde la superficie del líquido hasta el orificio de descarga es h.
- Qué suposiciones debería hacer?

Ejercicio: Ecuación de Torricelli

- Utilizando la ecuación de Bernoulli, calcule la velocidad de salida del fluido desde un tanque abierto (destapado). La altura desde la superficie del líquido hasta el orificio de descarga es h.
- Qué suposiciones debería hacer?

- Respuesta: $v_{salida} = \sqrt{2gh}$

2. Distribución de Velocidad en Flujo Turbulento

- Flujo laminar: ordenado
- Flujo turbulento: caótico

- Podrían utilizarse las ecuaciones de movimiento (N-S) para describir el movimiento violentamente fluctuante de un fluido en régimen turbulento?

2.1 Comparación entre flujo Laminar y Turbulento

- Flujo dentro de tubos circulares:
  - Sabemos que para flujo estacionario dentro de un tubo circular de radio R, la distribución de velocidad está dada por:

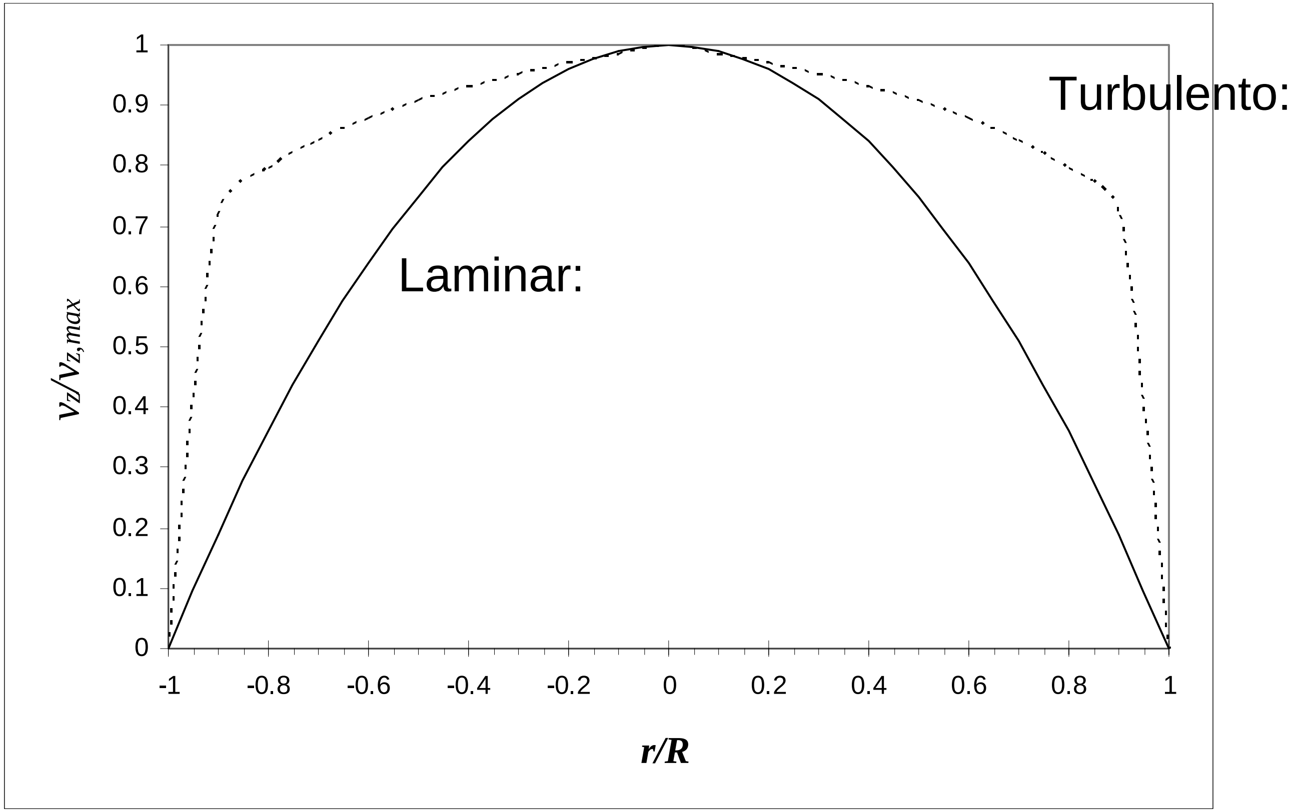
$$\frac{v_z}{v_{z,\max}} = 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 \quad \text{y} \quad \frac{\langle v_z \rangle}{v_{z,\max}} = \frac{1}{2} \qquad \text{Re} < 2100$$

  - Para el flujo turbulento, la velocidad fluctúa con el tiempo en forma caótica. Se puede medir la velocidad promedio:

$$\frac{\bar{v}_z}{\bar{v}_{z,\max}} \approx 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^{1/7} \quad \text{y} \quad \frac{\langle \bar{v}_z \rangle}{\bar{v}_{z,\max}} \approx \frac{4}{5} \qquad 10^4 < \text{Re} < 10^5$$

2.1 Comparación entre flujo Laminar y Turbulento

- Flujo dentro de tubos circulares:



2.1 Comparación entre flujo Laminar y Turbulento

- La caída de presión puede relacionarse al flujo másico, w:

Laminar: $$P_0 - P_L = \left(\frac{8\mu L}{\pi\rho R^4}\right) w$$ Re < 2100

Turbulento: $$P_0 - P_L \approx 0.0198\left(\frac{2}{\pi}\right)^{7/4}\left(\frac{\mu^{1/4} L}{\rho R^{19/4}}\right) w^{7/4}$$ $10^4 < \mathrm{Re} < 10^5$

  - La dependencia más pronunciada de la caída de presión con respecto al flujo másico en el caso de régimen turbulento, indica el hecho de que se requiere más energía para mantener la variaciones violentas de movimiento en el fluido

2.1 Comparación entre flujo Laminar y Turbulento

- Flujo sobre una placa plana:
  - La fuerza de arrastre producida sobre la placa (cuando el flujo es en ambos lados de ella) está dada por:

Laminar: $$F = 1.328\sqrt{\rho\mu L W^2 v_\infty^3}$$ $0 < \mathrm{Re}_L < 5x10^5$

$$\mathrm{Re}_L = \frac{\rho L v_\infty}{\mu}$$

- Re_L es el número de Reynolds para una placa de largo L, el ancho de la placa es W y la velocidad del fluido, lejos de la placa es v_{inf}.

2.1 Comparación entre flujo Laminar y Turbulento

- Flujo sobre una placa plana:
  - La fuerza de arrastre producida sobre la placa (cuando el flujo es en ambos lados de ella) está dada por:

Turbulento: $$F \approx 0.74 \sqrt[5]{\rho^4 \mu L^4 W^5 v_\infty^9}$$ $5x10^5 < \mathrm{Re}_L < 10^7$

- Nuevamente, la mayor dependencia de la fuerza en relación a la velocidad con que se aproxima el fluido indica la mayor energía que se necesita para mantener el movimiento irregular en régimen turbulento

2.2 Ecuaciones de cambio para flujo turbulento incompresible

- En un flujo en régimen turbulento, se puede considerar que la velocidad real se compone de la suma de un valor medio y una fluctuación:

$$v_z = \bar{v}_z + v'_z \quad = \textit{Descomposición de Reynolds}$$

- El valor medio se obtiene de la variación temporal de v_z, $v_z(t)$, tomando el promedio temporal sobre un número de fluctuaciones.

$$\bar{v}_z = \frac{1}{t_0} \int_{t-\frac{1}{2}t_0}^{t-\frac{1}{2}t_0} v_z(s)\,ds$$

2.2 Ecuaciones de cambio para flujo turbulento incompresible

- El período t_0 debe ser suficientemente largo como para dar una función promedio suavizada: *velocidad suavizada en el tiempo*
- En el caso del flujo turbulento dentro de un tubo, por ejemplo, se podría esperar que la cantidad $\bar{v}_z$ sea independiente del tiempo, pero dependiente de la posición.
    - *Flujo turbulento estacionario*
- También existe la posibilidad del caso en que se presenten variaciones temporales en el gradiente de presión y velocidad promedio:
    - t_0 debe ser pequeño en comparación con el período de tiempo de variación de las cantidades promedio, pero suficientemente largo con respecto al período de las fluctuaciones

2.2 Ecuaciones de cambio para flujo turbulento incompresible

- Según la definición anterior, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\overline{v'_z} = 0 \qquad \overline{\overline{v_z}} = \overline{v_z} \qquad \overline{\overline{v_z}\, v'_z} = 0$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x} v_z} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{v_z} \qquad \overline{\frac{\partial}{\partial t} v_z} = \frac{\partial}{\partial t} \overline{v_z}$$

- Además:

$$\overline{v'^{2}_z} \neq 0 \qquad \frac{\sqrt{\overline{v'^{2}_z}}}{\langle \overline{v_z} \rangle}$$ = intensidad de turbulencia

$$\overline{v'_x v'_y} \neq 0$$

2.2 Ecuaciones de cambio para flujo turbulento incompresible

- Remplazando los términos $\mathbf{v}$ y p en la ecuación de continuidad y movimiento por sus correspondientes *descomposiciones de Reynolds*, se obtiene para fluidos incompresibles con ρ y μ constantes:

Continuidad: $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{v}_x + v'_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\bar{v}_y + v'_y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{v}_z + v'_z\right) = 0$$

Componente-x de ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(\bar{v}_x + v'_x\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\bar{p} + p'\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\left(\bar{v}_x + v'_x\right)\left(\bar{v}_x + v'_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\rho\left(\bar{v}_y + v'_y\right)\left(\bar{v}_x + v'_x\right) + \ldots\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z}\rho\left(\bar{v}_z + v'_z\right)\left(\bar{v}_x + v'_x\right)\right) + \mu\nabla^2\left(\bar{v}_x + v'_x\right) + \rho g_x$$

2.2 Ecuaciones de cambio para flujo turbulento incompresible

- Tomando el promedio suavizado en el tiempo y utilizando las relaciones dadas anteriormente:

Continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}\bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\bar{v}_y + \frac{\partial}{\partial z}\bar{v}_z = 0$$

Componente-x de ecuaciones de movimiento:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\bar{v}_x = -\frac{\partial}{\partial x}\bar{p} - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\bar{v}_x\bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho\bar{v}_y\bar{v}_x + \frac{\partial}{\partial y}\rho\bar{v}_z\bar{v}_x\right)\ldots$$

$$\ldots - \left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\overline{v'_x v'_x} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v'_y v'_x} + \frac{\partial}{\partial y}\rho\overline{v'_z v'_x}\right) + \mu\nabla^2\bar{v}_x + \rho g_x$$

2.2 Ecuaciones de cambio para flujo turbulento incompresible

- De las ecuaciones anteriores se observa que:
  - La ecuación de continuidad es la misma que en caso laminar, sólo que en términos de $\bar{\mathbf{v}}$.
  - La ecuación de movimiento tiene $\bar{\mathbf{v}}$ y $\bar{p}$ donde antes estaba $\mathbf{v}$ y p.
  - Adicionalmente, la ecuación de movimiento presenta un término adicional, que describe el transporte de momentum asociado con las fluctuaciones turbulentas.
- Se puede introducir el *tensor de flujo de momentum turbulento*: $\bar{\boldsymbol{\tau}}^{(t)}$

$$\bar{\tau}^{(t)}_{xx} = \rho\overline{v'_x v'_x} \qquad \bar{\tau}^{(t)}_{xy} = \rho\overline{v'_x v'_y} \qquad \bar{\tau}^{(t)}_{xz} = \rho\overline{v'_x v'_z} \qquad \text{etc.}$$

  - Estas cantidades se conocen como *estreses de Reynolds*

2.2 Ecuaciones de cambio para flujo turbulento incompresible

- De forma similar, se puede definir el *tensor de flujo de momentum viscoso "suavizado"*, $\overline{\boldsymbol{\tau}}^{(v)}$, simplemente reemplazando por los componentes "suavizados" de la velocidad.

$$\overline{\tau}_{xx}^{(v)} = -2\mu \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial x} \qquad \overline{\tau}_{xy}^{(v)} = -\mu\left(\frac{\partial \overline{v_y}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v_x}}{\partial y}\right) \quad \text{etc.}$$

2.2 Ecuaciones de cambio para flujo turbulento incompresible

- Finalmente, se pueden escribir las ecuaciones anteriores en notación vectorial:

$$(\nabla \cdot \overline{\mathbf{v}}) = 0$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}') = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\overline{\mathbf{v}} = -[\nabla \cdot \rho\overline{\mathbf{v}}\,\overline{\mathbf{v}}] - \nabla\overline{p} - \left[\nabla \cdot \left(\overline{\tau}^{(v)} + \underset{\uparrow}{\overline{\tau}^{(t)}}\right)\right] + \rho\mathbf{g}$$

estreses de Reynolds

2.3 Modelo de Cierre

- El problema con las ecuaciones anteriores, es la presencia del término adicional correspondiente a los *estreses de Reynolds*, $\overline{\boldsymbol{\tau}}^{(t)}$, ya que no están relacionados de forma simple a gradientes de velocidad. Por lo tanto incorporan nuevas incógnitas a las ecuaciones de movimiento.
- Es necesario imponer nuevas ecuaciones para lograr “cerrar” el sistema. Esto se logra, incorporando relaciones empíricas o basándose en información experimental.
- En el campo de modelación numérica, uno de los modelos empíricos utilizados corresponden al llamado modelo k-ε de disipación turbulenta.

2.3.1 Modelo de cierre, viscosidad turbulenta de Boussinesq

- Un modelo empírico para definir el componente turbulento del estrés, es el de viscosidad turbulenta.
- De forma análoga a la ley de Newton de viscosidad, se puede escribir:

$$\bar{\tau}_{yx}^{(t)} = -\mu^{(t)} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}$$

  - Donde $\mu^{(t)}$ es la viscosidad turbulenta.
  - Esta cantidad no es una propiedad del fluido
  - Depende fuertemente de la posición y
  - Puede tomar valores negativos

2.3.1 Modelo de cierre, viscosidad turbulenta de Boussinesq

- Dependiendo de las condiciones de flujo, $\mu^{(t)}$ puede calcularse según:
  - Turbulencia en una superficie:

$$\mu^{(t)} = \mu\left(\frac{y v_*}{14.5\nu}\right)^3 \qquad 0 < \frac{y v_*}{14.5\nu} < 5$$

    - donde v_* se conoce como la velocidad de fricción
    - y ν es la viscosidad cinemática
    - esta relación sólo es válida muy cerca de la superficie
  - Turbulencia libre:

$$\mu^{(t)} = \rho\kappa_0 b\left(\bar{v}_{z,\max} - \bar{v}_{z,\min}\right)$$

    - Donde κ_0 es un coeficiente experimentalmente determinado, b es el ancho de la zona de mezcla