Auxiliar extra examen

P2 semana 2

1) Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y B el de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$

1.- Determine A y B

2.- calcule $A \cup B$, $A \cap B$

Sol:

A| $|x| \leq |x-1| \iff -|x-1| \leq x \leq |x-1|$

$\iff -|x-1| \leq x \wedge x \leq |x-1|$

$|x-1| \geq -x \wedge x \leq |x-1|$

$[x-1 \geq -x \vee x-1 \leq x] \wedge [x-1 \leq -x \vee x-1 \geq x]$

$[x \geq \frac{1}{2} \vee -1 \leq 0] \wedge [x \leq \frac{1}{2} \vee -1 \geq 0]$

$x \in [[\frac{1}{2}, \infty) \cup \mathbb{R}] \cap [(-\infty, \frac{1}{2}] \cup \emptyset]$

$\mathbb{R} \cap (-\infty, \frac{1}{2}]$

$x \in (-\infty, \frac{1}{2}] = A$

B| $|4x-2| > x(1-2x)$

$4x-2 > x(1-2x) \quad \vee \quad 4x-2 < -x(1-2x)$

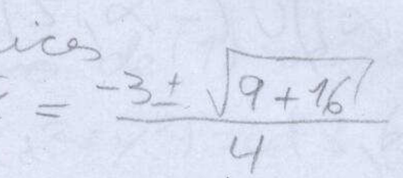
$4x-2 > x-2x^2 \quad \vee \quad 4x-2 < -x+2x^2$

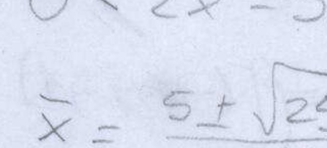
$2x^2+3x-2 > 0 \quad \vee \quad 0 < 2x^2-5x+2$

Raices

$\bar{x} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$ $\qquad$ $\bar{x} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$

$\bar{x} = \frac{-3 \pm 5}{4} = \frac{1}{2} \vee -2$ $\qquad$ $= 2 \vee \frac{1}{2}$





$x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, \infty) \cup (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty) = \mathbb{R}$

luego $A \cup B = \mathbb{R}$; $A \cap B = (-\infty, \frac{1}{2}]$

b) Resuelve la inecuación

$$\frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2}$$

Para $x<2$; $x-2<0$ y aparece en el denominador $\Rightarrow$ se cumple. Veamos ahora, para $x>2 \Rightarrow |x-2| = x-2$

$$1 + \frac{|2x+11|}{x-2} < \frac{1}{2}|x+|x-2||$$

Es decir

$$1+\frac{|2x+11|}{x-2} < \frac{1}{2}(x+x-2) \quad \vee \quad \frac{1}{2}(x+x-2) < -1-\frac{|2x+11|}{x-2}$$

$$1+\frac{|2x+11|}{x-2} < x-1 \quad \vee \quad x-1 < -1-\frac{|2x+11|}{x-2}$$

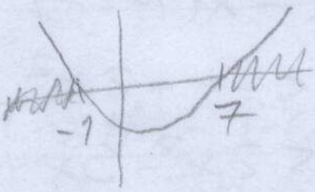
pero $x>2 \Rightarrow 2x+11>0$

$$2x+11 < (x-2)^2 \quad \vee \quad x(x-2) < -2x-11$$

$$2x+11 < x^2-4x+4 \quad \vee \quad x^2-\cancel{2x} < -\cancel{2x}-11$$

$$0 < x^2-6x-7 \quad \vee \quad \emptyset$$

Raíces $x = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = 7 \vee -1$



Supuesto Ya visto

$$\Rightarrow S = \left(\left[(-\infty,-1) \cup (7,\infty)\right] \cap (2,\infty)\right) \cup (-\infty,2)$$

$$S = (7,\infty) \cup (-\infty,2)$$

$$S = (-\infty,2) \cup (7,\infty)$$

2) Resuelva $|x^2+3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|$

$$|x||x+3| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|$$

$$|x+3|(|x|+x) + \cancel{x^2} \geq 8 + \cancel{x^2}$$

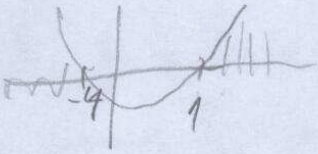
$$|x+3|(x+|x|) \geq 8$$

Para $x<0$, $x+|x|=0$ y para $x \geq 0$ $|x+3| = x+3$

$$\cancel{2}x(x+3) \geq \cancel{8}4$$

$$x^2+3x-4 \geq 0$$

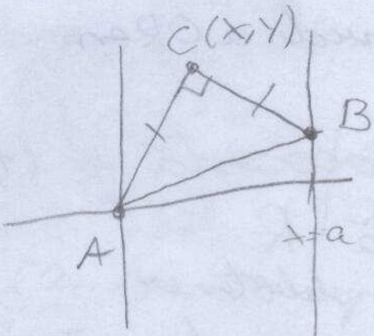
$$(x+4)(x-1) \geq 0$$



$$S = \left[(-\infty,-4] \cup [1,\infty)\right] \cap [0,\infty)$$

$$S = [1,\infty)$$

P2 semana 3) Encuentre el lugar geométrico de C.



Sea $C=(x,y)$

Por enunciado $d(A,C)=d(B,C)$ y $\overline{AC} \perp \overline{BC}$

Sea $B=(a,y_b)$, luego $d(A,C)=d(B,C)$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = (x-a)^2 + (y-y_b)^2 \quad (1)$$

además la recta AC tiene ecuación $\tilde{y} = \frac{y}{x}\tilde{x}$

y BC es ortogonal la ecuación de BC es $\tilde{y} - y_b = \frac{y_b - y}{a-x}(\tilde{x} -$

luego $\frac{y_b-y}{a-x} = -\frac{x}{y} \Rightarrow y_b y - y^2 = x^2 - ax$

$$y_b = \frac{x^2-ax+y^2}{y} \quad (2)$$

pero de (1) se concluye que $2(x^2+y^2) = a^2+y_b^2$

$$2(x^2+y^2) = a^2 + \left(\frac{x^2-ax}{y}+y\right)^2$$

$$\cancel{2x^2} + 2y^2 = a^2 + \frac{x^4-2ax^3+a^2x^2}{y^2} + \cancel{2x^2} - 2ax + y^2$$

$$y^2 = a^2 + \frac{x^4-2ax^3+a^2x^2}{y^2} - 2ax$$

$$y^4 = a^2y^2 + x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2axy^2$$

$$y^4 = a^2y^2 + x^4 - 2ax^3 + a^2x^2 - 2axy^2$$

$$y^4 - x^4 = a^2(x^2+y^2) - 2ax(x^2+y^2)$$

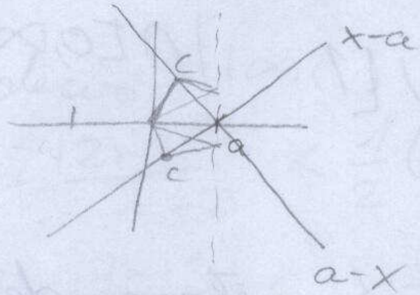
$$y^2 - x^2 = a^2 - 2ax$$

$$y^2 - (x^2 - 2ax + a^2) = 0$$

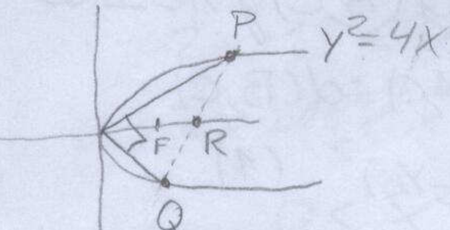
$$y^2 = (x-a)^2$$

¡Son varias rectas!

$$y = \pm (x-a)$$



P1 semana 4



Probar que el foco divide a OR en la razón 1:3.

Aquí sabemos que el foco está en (1,0) (p=1). Veamos dónde está R.

si $P=(P_1,P_2)$ $Q=(Q_1,Q_2)$ se debe tener

$$m(OP) = -\frac{1}{m(OQ)} \Leftrightarrow \frac{P_2}{P_1} = -\frac{Q_1}{Q_2} \quad (1)$$ además,

P y $Q \in$ Parábola $\Rightarrow P_2^2 = 4P_1$; $Q_2^2 = 4Q_1$ (2). Hallemos R.

La recta PQ tiene ecuación $y - P_2 = \frac{Q_2-P_2}{Q_1-P_1}(x-P_1)$ y su intersección con Ox es en $y=0$, es decir, $-P_2 = \frac{Q_2-P_2}{Q_1-P_1}(x_R - P_1)$

$$\frac{P_2(P_1-Q_1)}{Q_2-P_2} + P_1 = x_R$$

$$\frac{\cancel{P_2P_1} - P_2Q_1 + P_1Q_2 - \cancel{P_1P_2}}{Q_2-P_2} = x_R$$

$$x_R = \frac{P_1Q_2 - P_2Q_1}{Q_2-P_2}$$

$$= \frac{P_1Q_2 + P_1\cdot\frac{Q_1^2}{Q_2}}{Q_2 + \frac{4Q_2}{Q_1}}$$

$$= \frac{P_1(Q_2^2+Q_1^2)}{Q_2^2(1+\frac{4}{Q_1})} = \frac{P_1Q_1(Q_2^2+Q_1^2)}{Q_2^2(Q_1+4)}$$

pero $P_2 = -\frac{P_1Q_1}{Q_2} \Rightarrow \frac{P_1^2Q_1^2}{Q_2^2} = 4P_1$

y $P_1 = \frac{4Q_2^2}{Q_1^2} = \frac{16}{Q_1} \Rightarrow x_R = \frac{16(4Q_1+Q_1^2)}{4Q_1(Q_1+4)}$

y $\frac{OF}{FR} = \frac{1}{3}$ ∎

Ejercicios semana 5

$$f(x)=\begin{cases} (-1)^{1+|x|}\sqrt{1-x^2} & -1\le x\le 0 \\ \dfrac{x-1}{|x|-1} & 0< x\le \frac{1}{2} \\ \dfrac{1}{|2x-1|} & x<-1 \text{ ó } x>\frac{1}{2}\end{cases}$$

Dominio, crecimiento, paridad, ceros, intersección con OY, Bosquejo gráfico

$\mathrm{Dom} f = \mathbb{R}\setminus(-1,0)$ ← $(-1)^{1+|x|}$ no definida para $|x|\in\mathbb{R}$

Veamos el crecimiento por intervalos

Para $0<x_1<x_2\le\frac{1}{2}$ $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}=1$; f es constante en el intervalo

Para $x_1, x_2\in(-\infty,-1)$, $x_1<x_2$

$$\frac{f(x_1)}{f(x_2)}=\left|\frac{2x_2-1}{2x_1-1}\right|<1 \text{ pues } 2x_2-1>2x_1-1 \Rightarrow \frac{2x_2-1}{2x_1-1}<$$

(ambas magnitudes negativas). La función es estrictamente creciente en el intervalo $(-\infty,-1)$

Para $x_1, x_2\in(\frac{1}{2},\infty)$ $\dfrac{f(x_1)}{f(x_2)}=\left|\dfrac{2x_2-1}{2x_1-1}\right|>1$ por analogía

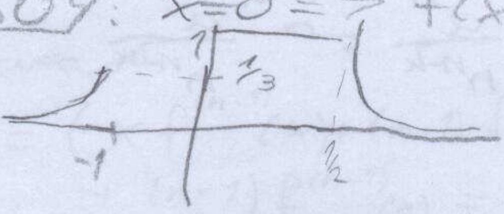
$\Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en el intervalo.

Paridad: La función no es par ni impar (se atraviesa (-1,0), intervalo no simétrico)

Ceros: $x=-1$ Es el único cero

Intersección con OY: $x=0 \Rightarrow f(x)=-1$

Gráfico



P26 semana 6|

Demuestre la identidad $\dfrac{1}{tg\,3x - tg(x)} - \dfrac{1}{ctg\,3x - ctg\,x} = ctg\,2x$

$$\frac{1}{tg3x-tgx} - \frac{1}{ctg3x-ctgx} = \frac{1}{\frac{sen3x}{cos3x}-\frac{senx}{cosx}} - \frac{1}{\frac{cos3x}{sen3x}-\frac{cosx}{senx}}$$

$$= \frac{cos3x\,cosx}{sen3x\,cosx - senx\,cos3x} - \frac{sen3x\,senx}{senx\,cos3x - cosx\,sen3x}$$

$$= \frac{cos3x\,cosx + sen3x\,senx}{sen3x\,cosx - senx\,cos3x} = \frac{cos(3x-x)}{sen(3x-x)} = ctg\,2x_{//}$$

P7 semana 8|

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y tal que su complemento es acotado inferiormente. Muestre que $\inf(A^c) = \sup(A) \iff A = (-\infty, a]$ o $A = (-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$.

$\Leftarrow|$ $A = (-\infty, a]$ o $A = (-\infty, a) \Rightarrow A^c = (a, \infty)$ o $A^c = [a, \infty)$

$\Rightarrow \sup(A) = \inf(A^c) = a$

$\Rightarrow|$ $\inf(A^c) = \sup(A) = a \Rightarrow \forall x \in A, x \overset{*}{<} a$ y $\forall x \in A^c, x \underset{*}{\geq} a$

*: menor o menor igual; mayor o mayor igual

Dado $x \overset{*}{<} a$, si $x \in A^c \Rightarrow x \underset{*}{\geq} a \Rightarrow a < a \rightarrow\leftarrow$

luego $x \overset{*}{<} a \iff x \in A$ y entonces $A = (-\infty, a)$ o $A = (-\infty, a]$

P1 semana 9|

Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{3}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{n^n}{n!}\right) + \frac{2n+1}{3-3n}}{\frac{2^n}{n!} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{1-\frac{n!}{n^k}}} = \frac{-2}{3}.$

P2 semana 9|

Calcule $p(n)\dfrac{a^n}{n^n}$ para $p(n)$ polinomio de grado k, $k \in \mathbb{N}$

Sea $p(n) = n^k \Rightarrow \dfrac{p(n)a^n}{n^n} = \dfrac{a^n}{n^{n-k}} = a^k \dfrac{a^{n-k}}{n^{n-k}}$

P6 semana 10 | Para $0 \leq a \leq b$ sea $x_1 = a$; $y_1 = b$; $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$

$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$. Demostrar que ambas sucesiones poseen límite, que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$ y que si llamamos l a este límite, se cumple que $\sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$

Encontramos una relación entre y_n y x_n. Sabemos que $(x_n - y_n)^2 \geq 0 \iff x_n^2 - 2x_n y_n + y_n^2 \geq 0$ $/+4x_n y_n \iff (x_n + y_n)^2 \geq 4x_n y_n$

$\frac{(x_n + y_n)}{2} \geq \sqrt{x_n y_n} \iff y_{n+1} \geq x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $n=0$ también satisface la propiedad. En base a esto, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq y_n \Rightarrow \{y_n\}$ es decreciente, su cota superior es $y_1 = b$. además $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n^2} = x_n$ $\Rightarrow \{x_n\}$ es creciente con cota inferior $x_1 = a$, pero también está acotada por b. $\{y_n\}$ también está acotada por a $\Rightarrow$ ambas sucesiones convergen. además de $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$ $/\lim_{n\to\infty}$

$l = \frac{l' + l}{2} \Rightarrow l = l'$. además $x_2 \leq l \leq y_2 \iff \sqrt{ab} \leq l \leq \frac{a+b}{2}$ (crecimiento de las sucesiones)

P3 semana 15 | Demuestre la regla de Fermat y halle $\max_{x\in\mathbb{R}} \left\{ \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2} \right.$

Sabemos $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)}{x}$

con esto, $0 \leq f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Para $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$, $f'(x) = \frac{\frac{2x}{1+x^2}(1+x^2) - \ln(1+x^2)\,2x}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{2x(1 - \ln(1+x^2))}{(1+x^2)^2} = 0 \iff x = 0 \lor 1 = \ln(1+x^2)$; $\pm\sqrt{e-1} = x$

Evaluamos $f(0) = 0$, $f(\pm\sqrt{e-1}) = \frac{1}{e} > 0 \Rightarrow$ los máximos están en $(\pm\sqrt{e-1})$,,

P2 semana 15 |

$f'(x) = \frac{2x}{2} e^{\frac{x^2}{2}} = x f(x)$

Inducción: Para $n = 2$, $f''(x) = f(x) + x f'(x) = x f^{(2-1)}(x) + (2-1) f(x)$

Supongamos para n.

$f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = \left(x f^{(n-1)}(x) + (n-1) f^{(n-2)}(x) \right)' = f^{(n-1)}(x) + x f^{(n)}(x)$

$+ (n-1) f^{(n-1)}(x) = x f^{(n)}(x) + n f^{(n-1)}(x)$

Polinomio de Taylor $P(x) = \sum_{k=0}^{4} \frac{(x-1)^k f^{(k)}(1)}{k!}$

$= e^{\frac{1}{2}} + (x-1) e^{\frac{1}{2}} + \frac{(x-1)^2}{2}\left(1\cdot 1\cdot e^{\frac{1}{2}} + 1\cdot e^{1/2}\right) + \frac{(x-1)^3}{6}\left(1\cdot\left[1\cdot 1\cdot e^{\frac{1}{2}} + \right.\right.$

$+ 2\cdot 1\cdot e^{1/2}) + \frac{(x-1)^4}{24}\left[1\cdot(2e^{1/2} + 2e^{1/2}) + 3\cdot 2e^{1/2}\right]$

$= e^{1/2} + (x-1)e^{1/2} + e^{1/2}(x-1)^2 + \frac{2}{3}e^{1/2}(x-1)^3 + \frac{5}{12}e^{1/2}(x-1)^4$

Para en torno a 0, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) = 1 + x f'(0) + \sum_{k=2}^{n} \frac{x^k}{k!}$

pero $f^{(k)}(0) = (k-1) f^{(k-2)}(0)$, vlamos que $f(0) = 1$; $f'(0) = 0$;

$f''(0) = f(0) = 1$; $f'''(0) = 0\cdot f''(0) + 2 f'(0) = 0$; $f^{(4)}(0) = 0\cdot f'''(0)$

$+ 3\cdot f''(0) = 3$; $f^{(5)} = 4 f'''(0) = 0$; $f^{(6)} = 5\cdot f^{(4)}(x_0) = 5\cdot 3 =$

$\Rightarrow f^{(k)}(0) = \begin{cases} 0 & k \text{ impar} \\ (k-1)(k-3)\cdots 1 & k \text{ par} \end{cases} \Rightarrow \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\cancel{(k-1)}\cancel{(k-3)}\cdots}{k\cancel{(k-1)}(k-2)\cdots}$

$\Rightarrow P(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{x^{2k}}{\prod_{i=1}^{k} (2i)}$ ✓

P4 semana 15

$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0-h) - f(x_0)}{h^2} \overset{L'H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{2h}$

$\lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0)}{2h} + \frac{f'(x_0) - f'(x_0-h)}{2h} = \frac{f''(x_0)}{2} + \frac{f''(x_0)}{2}$

$u = -h$

$\frac{f'(x_0) - f'(x_0+u)}{-2u}$ $= f''(x_0)$

Si x_0 es mínimo $\Rightarrow f(x_0) \le f(x)$ $\forall x$ cercano

$f''(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\ge 0} + \overbrace{f(x_0-h) - f(x_0)}^{\ge 0}}{h^2} \geq 0$

$f''(0) = \lim \frac{\frac{\operatorname{sen} h}{h} + \frac{\operatorname{sen}(-h)}{-h} - 2}{\ldots} = \lim 2\left(\frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1\right) \overset{2}{=} \lim \frac{\operatorname{sen} h - h}{h^3} =$