Control 1

P1. **(a)** Sea P una matriz tal que $P^2 = P$.

(i) (1 pto)Demuestre que para todo $k \in \mathbb{N}, P^k = P$

(ii) (1 pto)Pruebe que si $A = (I - P)$, entonces $A^k = A$ para todo k.

(iii) (1 pto) Pruebe que si $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $||u||=1$, entonces $P = uu^t$ cumple que $P^k = P$.

(b) Un conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto ortogonal si para todo par de indices $i \neq j$, se tiene que $\langle x_i, x_j \rangle = 0$. Sea $\{x_1, x_2, \ldots, x_r\} \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto ortogonal tal que para todo i, $||x_i|| = 1$.

(i) (1,5 ptos.) Se define

$$x_{r+1} = y - \sum_{k=1}^{r} \langle y, x_k \rangle x_k$$

con $y \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\{x_1, x_2, \ldots, x_r, x_{r+1}\}$ es un conjunto ortogonal.

(ii) (1,5 ptos.) Demuestre que si existe un conjunto de escalares $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r\} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k = 0$, entonces $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, 2 \ldots, r\}$.

P2. **(a)** (2,0 ptos) Encuentre la descomposición LDU de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) (4 ptos.) Sea el sistema:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & (3-\alpha)x_4 & = & \alpha \\ x_1 & + & & + & x_3 & + & (\alpha+5)x_4 & = & \beta \\ x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 2\alpha+4 \end{array}$$

Encontrar los valores de α y β tal que:

(i) No exista solución.

(ii) Existan infinitas soluciones y calcule el conjunto solución.

(iii) Exista una única solución. Calcule dicha solución para el caso $\alpha = \beta = 1$.

P3. Sea $P = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene directores $d_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(i) (1,5 ptos) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1.

(ii) (1,5 ptos) Calcule la ecuación de la recta L que se obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$.

(iii) (1,5 ptos) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L.

(iv) (1,5 ptos) Calcule la distancia de P a la recta L.

19 de abril de 2008
Sin consultas
Tiempo: 3:00