Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA34A Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor: Fernando Lema
Auxiliares: Constanza Paredes, Eduardo Zamora

Tarea 3

(entrega: Lunes 16 de Junio de 2008, al comienzo del control)

Problema 1

Sea (X,Y) un vector aleatorio. Se define el coeficiente de correlación entre X e Y como:

$$\rho_{XY} = \frac{IE\{(X - IE(X)) * (Y - IE(Y))\}}{\sqrt{Var(X) * Var(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) * Var(Y)}}$$

a) Muestre que si X e Y son independientes, entonces $\rho_{XY} = 0$.
b) Muestre, por medio de un ejemplo, que $\rho_{XY} = 0$ no implica que X e Y sean independientes.
c) Muestre que $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$.
d) Muestre que $Y = aX + b \Leftrightarrow \rho_{XY}^2 = 1$.

Problema 2

Sean $X_1 \to N(\mu, \sigma^2)$ y $X_2 \to N(\mu, \sigma^2)$ independientes. Considere:

$$Z(t) = X_1 \cos(\omega t) + X_2 sen(\omega t) \qquad V(t) = \frac{\partial Z(t)}{\partial t}$$

a) Determine la distribución de Z(t) y V(t) para t fijo.
b) Muestre que $\rho_{ZV} = 0$.

Problema 3

Considere una v.a. X con distribución Beta de parámetros $\alpha, \beta > 0$. Esto es:

$$X \to Be(\alpha, \beta) \quad \Leftrightarrow \quad f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & otro\ caso \end{cases}$$

a) Calcule *IE*(X) y Var(X).
b) Sean $Y_1 \to G(\alpha_1, \beta),\ Y_2 \to G(\alpha_2, \beta)$ v.a.'s independientes. Muestre que $U = \dfrac{Y_1}{Y_1 + Y_2} \to Be(\alpha_1, \alpha_2)$ y que U es independiente de V = Y_1 + Y_2.
c) Suponga que la proporción X de artículos defectuosos en un gran lote es desconocida y que $X \to Be(\alpha, \beta)$. Si se selecciona al azar un artículo del lote, ¿cuál es la probabilidad que sea defectuoso?

Problema 4

Se dice que X tiene una distribución de Weibull de parámetros $\alpha, \beta > 0$ si su densidad está dada por:

$$f_X = \alpha\beta * x^{\beta-1} * \exp(-\alpha * x^{\beta}) \qquad x > 0$$

a) Muestre que *IE*(X) = $k_1 * \Gamma(k_2)$ y determine las constantes k_1 y k_2.
b) Calcule $IP(\sum_{i=1}^{20} X_i^2 > 12)$ si $\{X_i\}_{i=1}^{20}$ es una sucesión de v.a.'s independientes con distribución Weibull de parámetros $\alpha = 2, \beta = 2$. *HINT*: Determine primero la densidad de X^2.

Problema 5

Las duraciones en horas de dos aparatos eléctricos son v.a.'s D_1 y D_2 con distribuciones N(43,36) y N(45,9) respectivamente.

a) Si Ud. debe elegir uno de dichos aparatos, ¿cuál escogería?
b) Se instalan dos equipos (uno de cada tipo) de tal forma que uno de ellos comienza a funcionar cuando el otro falla. Calcule la probabilidad que el sistema dure en total más de 80 horas.
c) Si se escoge equipos sólo del tipo D_1 y se instalan de tal forma que el i-ésimo comienza a funcionar cuando el (i-1)-ésimo falla, determine cuántos equipos se deben instalar para que el sistema funcione más de 750 horas con probabilidad 0.999. Asuma independencia en la falla de equipos.

Problema 6

a) Dos grandes poblaciones de hombres y mujeres tienen estaturas H y M que son v.a's tales que $H \to N(1.7\ ;\ 0.1^2)$ y $M \to N(1.6\ ;\ 0.05^2)$. Si se escoge un individuo al azar y resulta tener estatura inferior a 1.65, calcule la probabilidad que sea mujer. ¿Cómo cambia su respuesta si se sabe que la estatura del individuo es igual a 1.65?

b) El ingreso mensual de las personas (X) puede modelarse como una v.a. producto de muchas variables independientes entre sí (como sexo, edad, educación, etc.), es decir $X = X_1 * X_2 * X_3 * \ldots\ldots * X_n$, con *IE*($X_i$) = μ_i y Var(X_i) = σ_i^2. Si n es un número grande, determine la densidad de X.

Problema 7

La nota de los alumnos del curso MA34A puede ser modelada como una v.a. normal de media μ y varianza σ^2. Si se sabe que se aprueba con nota $\geq$ 4.0, se reprueba con nota < 3.7 y se queda pendiente con nota entre 3.7 y 4.0:

a) Suponga μ = 4.2, σ^2 = 0.8^2 y 110 alumnos. Si se elige un grupo de 10 alumnos (sin reposición) calcule la probabilidad que "a lo más 2 de ellos estén reprobados y al menos 9 estén aprobados".
b) Si del curso se eliminan los reprobados, ¿cuál es la función densidad de la nota de los restantes? Calcule su esperanza.
c) Suponga que μ es desconocido y se escoge una muestra de tamaño n (independientes). Determine n de tal forma que la media muestral ($\bar{x}$) difiera de la media poblacional (μ) en menos de 0.5 con probabilidad 0.95.

Problema 8

Un embarque de televisores consta de 50 lotes de 1000 TV cada uno. De cada lote se examina una muestra de 80 TV (en forma independiente) contándose el número de defectuosos. Si el fabricante asegura que la probabilidad que un TV sea defectuoso es 0.01, calcule la probabilidad que se encuentren más de 30 televisores defectuosos en los 50 lotes.

Problema 9

Sea X una v.a. discreta con recorrido $R_X \subset IN$. Se define la función generadora de probabilidades como:

$$G_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot IP(X = k)$$

a) Determine $\left.\dfrac{d^n G_X(z)}{d z^n}\right|_{z=0}$.
b) Calcule $G_X(z)$ si $X \rightarrow$ Poisson(λ).

Problema 10

Sean $X_i \rightarrow U(0,1)$ i = 1,2,3... n, independientes. Determine, usando la función generadora de momentos, la distribución de la v.a. $Y = -2 \cdot \ln\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)$. ¿Cuál es la distribución de Y para n grande? Calcule IP(Y > 55) si n = 40.

Problema 11

Considere que X $\rightarrow$ Poisson(λ).

a) Aplique T.C.L. para argumentar que la variable $\left(\dfrac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$ converge en distribución a una Normal (0,1) cuando $\lambda \rightarrow \infty$.

b) Demuestre que la variable $\sqrt{X}-\sqrt{\lambda}$ "converge" a una Normal(0,1/4), es decir, $\lim_{\lambda\rightarrow\infty} IP\left((\sqrt{X}-\sqrt{\lambda})\in(a,b)\right)=\dfrac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b \exp(-2s^2)\,ds$; para a < b cualesquiera.

Problema 12

A una playa con estacionamiento llegan vehículos según un proceso de Poisson de tasa λ =1/5 [vehículos/minuto].

a) Calcule la probabilidad que en un intervalo de 10 minutos lleguen al menos 3 vehículos.
b) Un vehículo acaba de llegar. Calcule la probabilidad que el próximo llegue no antes de 10 minutos.
c) Entre las 11^{00} y las 11^{30} llegaron 7 vehículos. Calcule la probabilidad que entre las 11^{00} y las 11^{15} hayan llegado 4 vehículos.
d) Entre las 11^{00} y las 11^{05} llegó un vehículo. Calcule la probabilidad que haya llegado antes de las 11^{03}.
e) Suponga que con probabilidad p = 0.2 un vehículo que llega es no catalítico. Sea Y(t): n° de vehículos no catalíticos que llegan en [0,t]. Plantee las ecuaciones diferenciales del proceso Y(t) llamado "Proceso de Poisson filtrado" y determine la solución.
f) En el instante t_0 el estacionamiento tiene N_0 vehículos y cierra el ingreso. Los vehículos se retiran del estacionamiento según un proceso de Poisson de tasa μ =1/10 [vehículos/minuto]. Sea Z(t): n° de vehículos en el estacionamiento en el instante t. Plantee las ecuaciones diferenciales del proceso Z(t) llamado "Proceso de muerte" y determine la solución.

Problema 13

Una máquina trabaja un tiempo aleatorio T $\rightarrow$ exp(λ) antes de fallar. Cuando falla, la reparación toma un tiempo R $\rightarrow$ exp(μ). Si la máquina está buena en t = 0, calcule la probabilidad que lo esté en el instante t.

INDICACIÓN: Considere el proceso X(t) = $\begin{cases} 0 & \textit{máquina buena en t} \\ 1 & \textit{máquina mala en t} \end{cases}$. Plantee y resuelva las ecuaciones diferenciales.