Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
MA34A Probabilidades y Procesos Estocásticos

Profesor : Fernando Lema

Auxiliares : Constanza Paredes
Eduardo Zamora

Tarea 4

(entrega: Lunes 30 de Junio de 2008, al comienzo del examen)

Problema 1

a) Sean U_1, $U_2 \rightarrow U[0,1]$ v.a.'s independientes. Considere las variables:

$$X = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2) \qquad Y = \sqrt{-2\log U_1}\, sen(2\pi U_2)$$

Muestre usando TCV que X,Y $\rightarrow$ N(0,1) independientes.

b) Sean X $\rightarrow$ exp(λ) e Y $\rightarrow$ U[$-\pi,\pi$]. Sean:

$$U = \sqrt{X}\cos Y \qquad V = \sqrt{X}\, senY$$

Concluya que U,V $\rightarrow$ N($0, 1/2\lambda$) independientes. Determine la densidad de U^2 y V^2.
Concluya que $U^2+V^2 \rightarrow$ exp(λ) como debería esperarse pues $U^2+V^2=X$.

Problema 2

La cantidad de lluvia [mm] anual en la ciudad de Santiago puede ser modelada por una distribución normal N(μ,σ^2). Se considera un año anormal como aquel en que la lluvia caída es mayor (año lluvioso) o menor (año seco) a la media μ en 1.5 veces la desviación estándar σ.

a) ¿Cuántos años deben considerarse para tener al menos uno anormal con probabilidad 0.9?

b) Si el último año anormal es el 2008, ¿cuántos años deberían esperarse en promedio para tener el siguiente año anormal?

c) El parámetro μ de la normal es desconocido. Determine cuántos años deben medirse para que la lluvia promedio $\overline{X}$ difiera de μ en menos de 10 [mm] con probabilidad 0.95. Considere σ=30.

d) El 2008 será un año lluvioso. Calcule la probabilidad que el 2009 sea más lluvioso que el 2007.

Problema 3

Suponga que X es una v.a. con densidad exponencial desplazada:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot \exp\{-\lambda(x-\alpha)\} & x \geq \alpha \\ 0 & x < \alpha \end{cases}$$

a) Encuentre la función generadora de momentos de X y encuentre *IE*(X), Var(X).

b) Suponga que la duración de una ampolleta (en hrs) sigue una distribución igual a la definida previamente. Cuando una ampolleta falla es reemplazada por una nueva con la misma densidad para su duración. Encuentre el número necesario de ampolletas para asegurar el funcionamiento del sistema por más de 200 horas con probabilidad 0.95 para el caso $\lambda=1/2$ y $\alpha=2$.

Pregunta 4

El auto solar "Solarium" se alista para competir en una carrera de 3600 [km]. La distancia que este puede recorrer el día i-ésimo es $X_i = \sqrt{10R_i}$, donde la radiación solar el día i, R_i, es una v.a. uniforme en el intervalo [1000, 2000] (R_i independiente de R_j $\forall i \neq j$).

a) Determine la función densidad de X_i, y calcule $IE(X_i)$, $Var(X_i)$.

b) Si el plazo para terminar la carrera son 30 días, calcule la probabilidad que el Solarium llegue a la meta dentro del plazo fijado. ¿Cuántos días necesita para asegurarse de llegar a la meta con al menos 95% de seguridad?

Problema 5

A una gasolinera que cuenta con sólo una bomba de bencina llegan vehículos según un proceso de Poisson de tasa 12 [autos/hr].

a) Si entre las 12:00 y 13:00 hrs llegaron 12 vehículos, calcule la probabilidad que entre las 12:50 y 13:00 hayan llegado al menos 2 vehículos.

b) Suponga ahora que el tiempo que se necesita para atender un vehículo es exponencial de media 8 [min]. Si la bomba se está usando los clientes pueden desistir (no ingresan y se van); en particular, si hay n autos en la gasolinera, la probabilidad que un cliente potencial que llega desista es q_n.

   1) Plantee el diagrama de estados y ecuaciones de balance para el proceso "N° de vehículos en la gasolinera"

   2) Suponiendo: $q_n = \begin{cases} n/3 & n = 1,2,3. \\ 1 & n > 3 \end{cases}$

   Resuelva las ecuaciones de balance. Calcule el tiempo promedio que un vehículo permanece en la gasolinera y la proporción de vehículos que llegan pero no ingresan.

Problema 6

La sala de emergencias de un consultorio atiende con dos equipos médicos y no admite cola (los pacientes que no logran ingresar a esta sala deben ir a otro consultorio). A la sala llegan dos tipos de pacientes: lo pacientes del tipo A (a tasa de 4 por hr) y los del tipo B (a tasa de 2 por hr). Cada paciente del tipo A que llega recibe atención de algún equipo médico desocupado, demorándose un tiempo exponencial de media 15 [min]. Cada paciente del tipo B que entra requiere la atención simultánea de los dos equipos, demorándose un tiempo exponencial de media 40 [min].

a) Plantee el proceso a estudiar, indicando los estados, el diagrama y las ecuaciones de balance.

b) Suponiendo que tiene resueltas las ecuaciones de balance, indique cómo calcularía la proporción de pacientes que no ingresa a la sala, y el tiempo promedio que cada equipo médico está ocioso (considere un turno de 24 hrs).

c) ¿Cómo cambia su modelo (diagrama de estados) si uno de los equipos médicos es más lento, demorándose en promedio 30 [min] cuando atiende solo, manteniendo el resto de las condiciones?

Problema 7

En un pequeño banco hay 2 cajas, una para clientes y otra para no clientes. Ambos cajeros son igualmente eficientes y demoran un tiempo distribuido exponencialmente de media $1/\mu$. Los clientes llegan al banco según un tiempo exponencial de media $1/\lambda$, mientras que los no clientes lo hacen con media $1/(3\lambda)$. Además, si un cajero no tiene personas en su fila, puede llamar y atender a alguien de la otra fila.

a) Modele el problema con su diagrama de estados y plantee las ecuaciones de balance (el sistema admite colas infinitas).

b) Suponiendo las probabilidades estacionarias conocidas, calcule la proporción de tiempo ocioso de los cajeros, el largo promedio de la fila de clientes y el tiempo promedio que espera un cliente.

Problema 8

A una oficina del Registro Civil e Identificación llega gente a sacar su cédula de identidad según un proceso de Poisson de tasa 10 por hr.

a) Existen dos funcionarios que atienden cada uno según una exponencial de media 8 [min]. Por simplicidad de cálculo suponga que una persona ingresa al sistema sólo si en el hay menos de 4 personas. Calcule en régimen permanente la proporción de personas que no ingresa y el tiempo promedio que demora en el sistema.

b) Las autoridades desean cambiar el procedimiento de atención separándolo en 2 etapas. La etapa A (pago y llenado de antecedentes) con un funcionario atendiendo según una exponencial de media 4[min], y la etapa B (foto, firma, huellas) atendida por un funcionario según una exponencial de media 4 [min]. Cada cliente debe pasar secuencialmente por ambas etapas (A-B) y en las dos puede existir cola sin restricción de capacidad. Modele el sistema planteando el proceso de estudio y el diagrama de estados.