12/05/08 CONTROL 2 MA34B
3horas R. Assar, N. Lacourly, R. Abt

Problema 1

En una muestra (m.a.s.) de 25 individuos que poseen automóvil, se realiza una encuesta sobre lo que pagan mensualmente por el seguro del vehículo. El valor medio mensual obtenido es de $1{,}40UF$. Se supone que la cantidad X que se paga mensualmente por el seguro del vehículo sigue una distribución normal.

(a) Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para el valor medio de la cantidad que se paga por el seguro si se sabe que la desviación estándar de la población es conocida e igual a $0{,}3UF$. Interprete el resultado obtenido.

(b) Se supone ahora que no se conoce la desviación estándar. Obtenga un intervalo de confianza al 95 % para el valor medio de lo que se paga mensualmente por el seguro, si la estimación de la desviación estándar es $0{,}3UF$ (la varianza estimada asociada es insesgada).

(c) Compare los intervalos obtenidos en (a) y (b), comente.

(d) ¿Qué tamaño mínimo muestral se necesitaría (suponiendo la situación de (a)) para que la diferencia entre la media muestral y la poblacional sea en valor absoluto inferior a $0{,}08UF$.

Considere ahora una fábrica de componentes electrónicos que recibe el envío de un lote de unidades de material químico con impurezas, suponiendo que el porcentaje de impurezas sigue una distribución normal. Es importante para la fábrica asegurarse de que la varianza del porcentaje de impurezas en las unidades de este lote no sea mayor a $0{,}2$. Se ha tomado una muestra de 25 unidades, obteniendo que que el promedio de los porcentajes de las impurezas es $\bar{x} = 2{,}02$ y la varianza insesgada es $0{,}27$.

(e) Plantee el test de hipótesis de aceptar o no el envío. Explique por qué se plantea así, a qué decisiones de la fábrica corresponden la hipótesis nula y la alternativa.

(f) Decida si se debe aceptar el envío si queremos tener una probabilidad de error del $1\,\%$ de rechazar envíos que cumplan lo indicado.

(g) Basándonos en dicha muestra y en una significación igual a $1\,\%$, si tuviéramos que comprobar que el porcentaje medio de impurezas que tuviesen estas unidades no superase el $1{,}8\,\%$, ¿qué decisión tomaríamos sobre el envío?

(h) Indique qué potencia tendría este último contraste (ítem (g)) si el valor real de la proporción media de impurezas en el envío fuese de $2{,}22\,\%$.

Problema 2

Una planta productora de fertilizantes está haciendo diversos estudios respecto a su funcionamiento. Se considera la vida útil de un fertilizante medida en años (variable X) cuya distribución es exponencial: $f(x|\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}$ con $x > 0$. En una una muestra (m.a.s.) de 30 fertilizantes se encontró que la duración promedio de ellos es de 5 años. Se define la variable $Y = \sum_{i=1}^{30} X_i$.

(a) Proponga un intervalo de confianza al $95\,\%$ para la tasa de vida útil λ. Indicación: Utilice el Teorema Central del Límite y resuelva la ecuación cuadrática asociada.

La empresa posee instalaciones en una determinada ciudad A y desea construir una nueva planta en una ciudad vecina B, pese a la oposición los residentes de dicho lugar. Ella argumenta que la proporción p_B de habitantes de la ciudad B que se opone a la construcción de la nueva planta no difiere de la proporción de personas p_A que se opondrían en A. Preocupado de la situación, el municipio de la ciudad B le ha encargado un estudio, a través de encuestas, para probar que la proporción de habitantes de B que se opone la construcción de la planta química es superior a la proporción que se tendría en A. Una vez hecho el estudio, se obtiene que 240 de 500 personas de la ciudad A votarían en contra de la construcción de esta planta versus 120 de 200 personas que votarían en contra en la ciudad B. ¿Existe suficiente evidencia estadística para apoyar la afirmación del municipio?. NOTA: Utilice un nivel de significación $\alpha = 0{,}025$.

(b) Considere las hipótesis:

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &: \quad p_B - p_A = 0 \\ \mathrm{H}_1 &: \quad p_B - p_A > 0 \end{aligned}$$

Justifique esta elección.

(c) Sean $\bar{X}_A$ y $\bar{X}_B$ las proporciones muestrales (independientes) de personas que se oponen a la construcción de la planta, en A y B respectivamente. Muestre que para $p_A = p_B = p$,

$$\hat{p} = \frac{n_A \bar{X}_A + n_B \bar{X}_B}{n_A + n_B}$$

es un estimador insesgado para p y encuentre su valor. Calcule las varianzas de $\bar{X}_A$ y $\bar{X}_B$ en función de p.

(d) Justifique el uso de la región crítica de la forma $W = \{\bar{X}_B - \bar{X}_A > C\}$ y encuentre el valor de C para el nivel de significación $\alpha = 0{,}025$. Indicación: Utilice el Teorema Central del Límite de manera adecuada, estandarizar y usar los resultados de la parte anterior.

(e) Encuentre el P-valor asociado al problema y decida el Test.

Teorema Central del Límite

- Si $X \sim F$ y $n \to \infty$ entonces $\bar{X} \sim N\big(E(X), \frac{Var(X)}{n}\big)$ cuando $E(X) < \infty$ y $Var(X) < \infty$.