

## EJERCICIOS SOBRE DEFLEXIONES

Prof.: M. Elgueta



### EJEMPLO 1.

Calcular la deflexión y la rotación del punto C de la viga que se muestra en la figura 1, utilizando el método de la elástica.

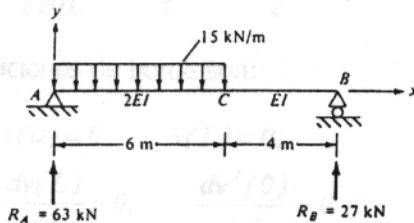


Figura 1.

En los tramos AC y CB de la viga, las ecuaciones son

Tramo AC:

$$2EI \frac{d^2 v_1}{dx^2} = 63x - 7.5x^2$$

$$2EI \frac{dv_1}{dx} = \frac{63x^2}{2} - \frac{7.5x^3}{3} + C_1$$

$$2EI v_1 = \frac{63x^3}{6} - \frac{7.5x^4}{12} + C_1x + C_2$$

Tramo CB:

$$EI \frac{d^2 v_2}{dx^2} = 27(10 - x) = 270 - 27x$$

$$EI \frac{dv_2}{dx} = 270x - \frac{27x^2}{2} + C_3$$

$$EI v_2 = \frac{270x^2}{2} - \frac{27x^3}{6} + C_3x + C_4$$

Las condiciones de contorno son

$$v_1(0) = v_2(10) = 0$$

y las condiciones de continuidad,

M. Elgueta - Deflexiones

$$v_1(6) = v_2(6)$$

$$\frac{dv_1(6)}{dx} = \frac{dv_2(6)}{dx}$$

Sustituyendo estas condiciones se obtiene

$$C_1 = -498.6;$$

$$C_2 = 0;$$

$$C_3 = -1086.3;$$

$$C_4 = 1863$$

Entonces

$$EIv_2(6) = 270(18) - 27(36) - 1086.3(6) + 1863$$

$$v_2(6) = v_c = -\frac{766.8}{EI}$$

Igualmente

$$EI \frac{dv_2(6)}{dx} = 270(6) - 27(18) - 1086.3 = 47.7$$

$$\frac{dv_2(6)}{dx} = \theta_c = 47.7/EI$$

### EJEMPLO 2

Para la viga representada en la figura 2 calcular la rotación (pendiente) en A, la deflexión en el punto medio de uno de los tramos y el momento en B.

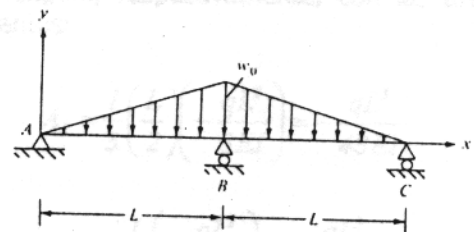


Figura 2.

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -\frac{w_0 x}{L}$$

$$EI \frac{d^3 v}{dx^3} = -\frac{w_0 x^2}{2L} + C_1$$

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{w_0 x^3}{6L} + C_1 x + C_2$$

$$EI \frac{dv}{dx} = -\frac{w_0 x^4}{24L} + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

$$EI v = -\frac{w_0 x^5}{120L} + C_1 \frac{x^3}{6} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4$$

Las condiciones de borde son:

$$v(0) = 0; \quad v(L) = 0;$$

$$\frac{dv(L)}{dx} = 0; \quad \frac{d^2 v(0)}{dx^2} = 0$$

Remplazando en las ecuaciones se obtiene

$$EI \frac{d^2 v(0)}{dx^2} = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$EI v(0) = 0 \Rightarrow C_4 = 0$$

$$EI \frac{dv(L)}{dx} = 0 = -\frac{w_0 L^4}{24} + \frac{C_1 L^2}{2} + C_3$$

$$EI v(L) = 0 = -\frac{w_0 L^5}{120} + \frac{C_1 L^3}{6} + C_3 L$$

De las últimas dos ecuaciones,

$$C_1 = \frac{w_0 L}{10} \quad C_3 = -\frac{w_0 L^3}{120}$$

Además,

$$v = \frac{1}{EI} \left( -\frac{w_0 x^5}{120L} + \frac{w_0 L x^3}{60} - \frac{w_0 L^3 x}{120} \right)$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{w_0 x^4}{24L} + \frac{w_0 L x^2}{20} - \frac{w_0 L^3}{120} \right)$$

De este modo  $v$  en  $x=L/2$

$$v|_{x=L/2} = \frac{1}{EI} \left( -\frac{w_0 L^4}{1920} + \frac{w_0 L^4}{480} - \frac{w_0 L^4}{240} \right)$$

$$= -\frac{wL^4}{384EI}$$

Igualmente

$$\frac{dv(0)}{dx} = -\frac{d^2 v(L)}{dx^2} = -\frac{w_0 L^2}{6} + \frac{w_0 L^2}{10} = -\frac{w_0 L^2}{15}$$

en el sentido de las agujas del reloj

Finalmente, el momento en  $B$  es

$$M_B = EI \frac{d^2 v(L)}{dx^2} = -\frac{w_0 L^2}{6} + \frac{w_0 L^2}{10} = -\frac{w_0 L^2}{15}$$

### EJEMPLO 3

Determinar el ángulo de rotación  $\theta_B$  y la deflexión  $\delta_B$  en el extremo libre  $B$  de la viga en voladizo mostrada en la figura 3.

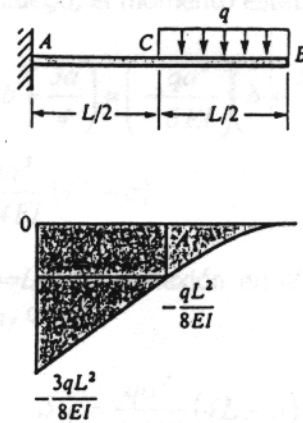


Figura 3

El diagrama del momento flector consiste en una curva parabólica desde  $B$  hasta  $C$  y una línea recta desde  $C$  hasta  $A$ . Para la evaluación del área y del momento estático del diagrama  $M/EI$ , es conveniente dividir este diagrama en tres partes, cuyas áreas son  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Estas partes son un arco parabólico, un rectángulo y un triángulo, respectivamente, con las áreas siguientes:

$$A_1 = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right) \left( -\frac{qL^2}{8EI} \right) = -\frac{qL^3}{48EI}$$

$$A_2 = \frac{L}{2} \left( -\frac{qL^2}{8EI} \right) = -\frac{qL^3}{16EI}$$

$$A_3 = \frac{1}{3} \left( \frac{L}{2} \right) \left( -\frac{qL^2}{8EI} \right) = -\frac{qL^3}{16EI}$$

El ángulo de rotación  $\theta_B$  es igual al área bajo la curva del diagrama  $M/EI$

$$\theta_B = -(A_1 + A_2 + A_3) = \frac{7qL^3}{48EI}$$

La deflexión  $\delta_B$  es igual al momento estático del diagrama  $M/EI$ , tomado con respecto a B:

$$\delta_B = -(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 + A_3\bar{x}_3)$$

donde  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$  son las distancias horizontales desde B hasta los centroides de las áreas respectivas. Luego,

$$\begin{aligned} \delta_b &= \frac{qL^3}{48EI} \left( \frac{3L}{8} \right) + \frac{qL^3}{16EI} \left( \frac{3L}{4} \right) + \frac{qL^3}{16EI} \left( \frac{5L}{6} \right) \\ &= \frac{41qL^4}{384EI} \end{aligned}$$

Este ejemplo muestra cómo el área y el momento estático de un diagrama  $M/EI$  complicado puede determinarse fácilmente dividiendo el diagrama en áreas de propiedades conocidas.

#### EJEMPLO 4.

Determinar el ángulo de rotación  $\theta_B$  y la deflexión  $\delta_B$  en el extremo libre B de la viga en voladizo mostrada en la figura 4.

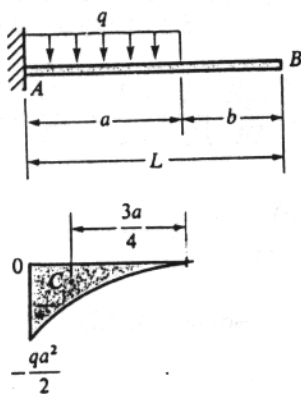


Figura 4.

El diagrama de momento flector consiste en un arco parabólico de segundo grado.

El ángulo de rotación  $\theta_B$  es igual al ángulo relativo  $\theta_{BA}$  puesto que la tangente en A es horizontal. El área del diagrama  $M/EI$  es

$$A_1 = \frac{1}{3}(a) \left( -\frac{qa^2}{2} \right) \left( \frac{1}{EI} \right) = -\frac{qa^3}{6EI}$$

Por lo que, a partir del primer teorema del área de momentos, se obtiene  $\theta_B = A_1$ , o sea

$$\theta_B = -\frac{qa^3}{16EI}$$

Este ángulo es igual a la pendiente de la viga a lo largo de la región sin carga.

La deflexión  $\delta_B$  es igual a la desviación  $t_{BA}$  en este caso. En consecuencia,  $\delta_B$  es igual al momento estático del área del diagrama  $M/EI$ , tomado con respecto a B. El centroide C del diagrama está a una distancia  $3a/4$  a partir de la orilla de la carga, o a una distancia  $b + 3a/4$  desde B. Luego, el momento estático es

$$\begin{aligned} Q_1 &= A_1 \left( b + \frac{3a}{4} \right) = \left( -\frac{qa^3}{6EI} \right) \left( b + \frac{3a}{4} \right) \\ &= -\frac{qa^3}{24EI} (4L - a) \end{aligned}$$

ya que  $b=L-a$ . La deflexión en el extremo es  $\delta_B = -Q_1$ , o sea

$$\delta_B = \frac{qa^3}{24EI} (4L - a)$$

Si  $a = L$ , esta ecuación resulta  $\delta_B = qL^4/8EI$ , que es la deflexión de una viga en voladizo cargada totalmente.

#### EJEMPLO 5

Una viga doblemente empotrada AB tiene su soporte derecho sin rotación, verticalmente más abajo una cantidad  $\Delta$ , como se muestra en la figura 5. Se pide determinar las reacciones.

Se seleccionan las reacciones  $R_B$  y  $M_B$  en el apoyo B como las redundantes. La estructura primaria correspondiente, sometida a las cargas  $R_B$  y  $M_B$ , se muestra en la Figura 5. El diagrama de momentos se muestra en la última parte de la figura.

Se requieren dos ecuaciones para determinar  $R_B$  y  $M_B$ . La primera ecuación representa la

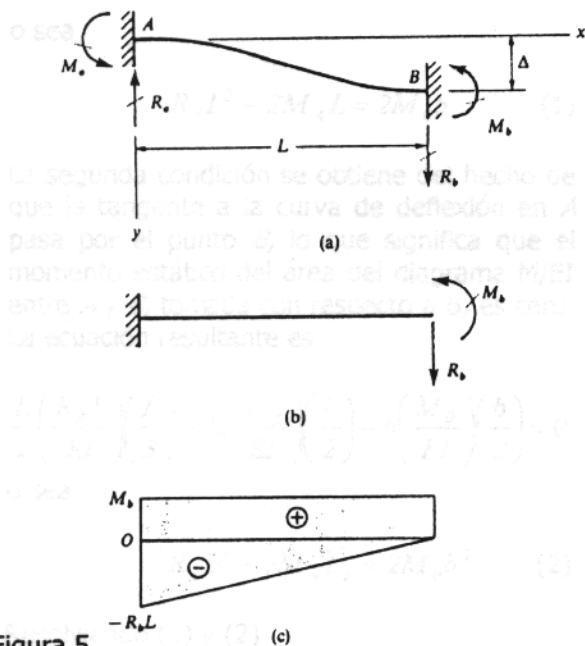


Figura 5

condición de que la pendiente de la viga es cero en ambos empotramientos. Por lo que el área del diagrama  $M/EI$  entre A y B es igual a cero (según el primer teorema del área de momentos):

$$L \left( \frac{M_B}{EI} \right) \left( \frac{L}{2} \right) - \frac{L}{2} \left( \frac{R_B L}{EI} \right) = 0$$

o sea

$$2M_B = R_B L \quad (1)$$

La segunda condición se refiere a la desviación tangencial del punto D respecto a la tangente en A. Esta desviación es igual momento estático del área del diagrama  $M/EI$  entre A y B, tomado con respecto a B

$$\Delta = -L \left( \frac{M_B}{EI} \right) \left( \frac{L}{2} \right) + \frac{L}{2} \left( \frac{R_B L}{EI} \right) \left( \frac{2L}{3} \right)$$

o sea

$$2R_B L - 3M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2} \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2) se obtiene

$$R_B = \frac{12EI\Delta}{L^3} \quad M_B = \frac{6EI\Delta}{L^2}$$

De la simetría de la viga, se obtiene que  $R_A = R_B$  y  $M_A = M_B$ .

### EJEMPLO 6

Determinar las reacciones en la viga doblemente empotrada cargada por un momento  $M_0$  como se muestra en la figura 6. Determinar también la deflexión de la viga en el punto C, donde actúa el momento.

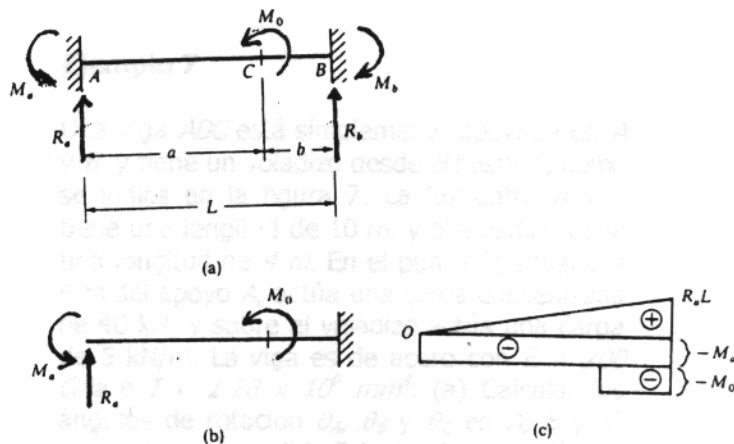


Figura 6.

Esta viga es estáticamente indeterminada en segundo grado, por lo que deben seleccionarse dos redundantes. Las tres posibilidades útiles son las siguientes:

- $R_A$  y  $M_A$  lo que resulta en una estructura primaria en forma de una viga en voladizo fija en A;
- $R_B$  y  $M_B$  lo que resulta en una viga en voladizo fija en B y
- $M_A$  y  $M_B$  lo que resulta en una viga simplemente apoyada.

Elijamos la primera opción tomando  $R_A$  y  $M_A$  como las redundantes. Entonces la estructura liberada es la viga en voladizo de la Figura 6. Fácilmente podemos dibujar los diagramas de fuerza cortante y momento flector, para esta viga, la cual queda sometida a las cargas  $R_A$ ,  $M_A$  y  $M_0$ .

Se requieren dos condiciones concernientes a las deflexiones de la viga para determinar las dos redundantes. Como primera condición, observamos que ambos extremos de la viga tienen pendientes iguales a cero; por lo que, el cambio en pendiente entre A y B es cero. Se deduce, a partir del primer teorema del área de momentos, que el área del diagrama  $M/EI$  entre A y B debe ser cero; luego

$$\frac{L}{2} \left( \frac{R_A L}{EI} \right) - \left( \frac{M_A}{EI} \right) L - \frac{M_0}{EI} b = 0$$

o sea

$$R_A L^2 - 2M_A L = 2M_o b \quad (1)$$

La segunda condición se obtiene del hecho de que la tangente a la curva de deflexión en  $A$  pasa por el punto  $B$ , lo que significa que el momento estático del área del diagrama  $M/EI$  entre  $A$  y  $B$ , tomada con respecto a  $B$ , es cero. La ecuación resultante es

$$\frac{L}{2} \left( \frac{R_A L}{EI} \right) \left( \frac{L}{3} \right) - L \left( \frac{M_A}{EI} \right) \left( \frac{L}{2} \right) - b \left( \frac{M_o}{EI} \right) \left( \frac{b}{2} \right) = 0$$

o sea

$$R_A L^3 - 3M_A L_2 = 2M_o b^2 \quad (2)$$

Resolviendo (1) y (2)

$$R_A = \frac{6M_o a b}{L^3} \quad M_A = \frac{M_o b}{L^2} (2a - b)$$

Además, a partir de las ecuaciones de equilibrio

$$R_B = -R_A \quad M_B = \frac{M_o a}{L^2} (a - 2b)$$

La deflexión  $\delta_C$  en el punto de aplicación del momento puede determinarse a partir del segundo teorema del área de momentos. Observamos que  $\delta_C$  es igual a la desviación tangencial del punto  $C$  desde la tangente en  $A$ ,  $t_{CA}$  porque la tangente en  $A$  es horizontal. Por lo tanto,  $\delta_C$  es igual al momento estático del área del diagrama  $M/EI$  entre  $A$  y  $C$ , tomada con respecto al punto  $C$ . Esta deflexión se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \delta_c &= \frac{a}{2} \left( \frac{a}{L} \right) \left( \frac{R_A L}{EI} \right) \left( \frac{a}{3} \right) - a \left( \frac{M_A}{EI} \right) \left( \frac{a}{2} \right) \\ &= \frac{R_A a^3}{6EI} - \frac{M_A a^2}{2EI} \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones de  $R_A$  y  $M_A$

$$\delta_c = \frac{M_o a^2 b^2 (b - a)}{2L^3 EI}$$

Si el momento  $M_o$  actúa en el punto medio ( $a=b=L/2$ ), las reacciones son

o sea

$$M_A = -M_B = \frac{M_o}{4} \quad R_A = -R_B = \frac{3M_o}{2L}$$

Y la deflexión en el punto medio es cero.

### Ejemplo 7

Una viga  $ABC$  está simplemente apoyada en  $A$  y  $B$  y tiene un voladizo desde  $B$  hasta  $C$ , como se indica en la figura 7. La luz entre  $A$  y  $B$  tiene una longitud de 10 m, y el voladizo tiene una longitud de 4 m. En el punto  $D$ , situado a 4 m del apoyo  $A$ , actúa una carga concentrada de 40 kN, y sobre el voladizo actúa una carga de 5 kN/m. La viga es de acero con  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $I = 1.28 \times 10^9 \text{ mm}^4$ . (a) Calcular los ángulos de rotación  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  y  $\theta_C$  en  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente. (b) Calcular la deflexión  $\delta_C$  en el extremo libre  $C$  (c) Calcular la deflexión máxima  $\delta_{m\acute{a}x}$  en el tramo  $AB$ .

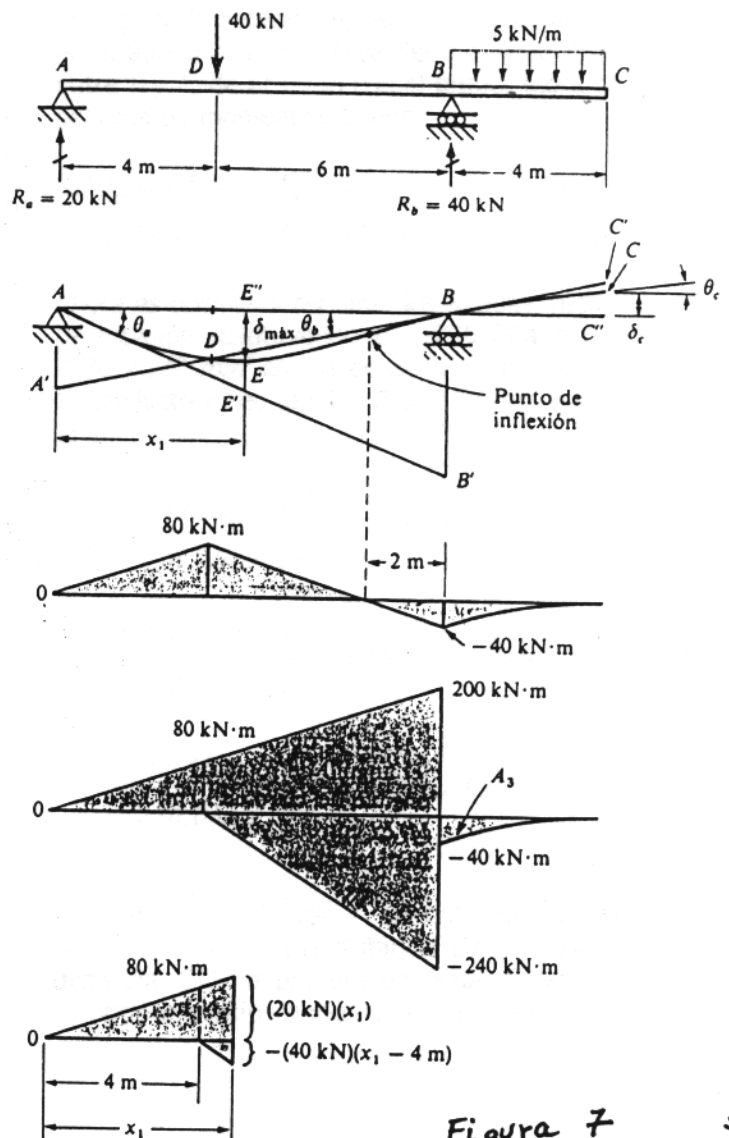


Figura 7 5

Para determinar los diferentes ángulos de rotación y las deflexiones, se requiere el diagrama de momentos flectores. Del equilibrio estático, se elabora el diagrama mostrado debajo del esquema de la curva de deflexión. El momento flector bajo la carga concentrada es 80 kN·m y en el apoyo *B* es 40 kN·m. Entre estos puntos, el momento flector varía linealmente y se vuelve cero en un punto localizado a 2 m de *B*. En el punto de momento nulo, el momento flector cambia de signo, por lo que la curvatura también cambia de signo. Consecuentemente, hay un punto de curvatura nula, llamado punto de **inflexión**, en la curva de deflexión de la viga. A la izquierda del punto de inflexión, la viga se deforma con concavidad hacia arriba; a la derecha tiene concavidad hacia abajo.

Por conveniencia para el cálculo de áreas y momentos estáticos del diagrama  $M/EI$ , se debe trazar nuevamente el diagrama de momento flector como se muestra en el cuarto esquema en la figura 7. Este diagrama de momento flector es equivalente al que está encima de él, como puede fácilmente verificarse calculando el momento flector en unos cuantos puntos específicos. El triángulo superior representa el momento desde *A* hasta *B* de la reacción en *A*, y el triángulo inferior representa el momento de la carga concentrada desde *D* hasta *B*.

Las distintas áreas en este diagrama son:

$$A_1 = \frac{1}{2}(10m)(200kN \cdot m) = 1000kN \cdot m^2$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(6m)(-240kN \cdot m) = -720kN \cdot m^2$$

$$A_3 = \frac{1}{3}(4m)(-40kN \cdot m) = -53.33kN \cdot m^2$$

El ángulo de rotación  $\theta_A$  es igual a la distancia  $BB'$  dividida por la longitud del tramo de 10 m. La distancia  $BB'$  es igual al momento estático del área del diagrama  $M/EI$  entre *A* y *B*, tomado con respecto a *B*. Se obtiene:

$$\begin{aligned} EI(BB') &= A_1 \left( \frac{10m}{3} \right) + A_2 \left( \frac{6m}{3} \right) \\ &= (1000kN \cdot m^2) \left( \frac{10m}{3} \right) - (720kN \cdot m^2) \left( \frac{6m}{3} \right) \\ &= 1893kN \cdot m^3 \end{aligned}$$

La cantidad  $EI\theta_A$  puede calcularse ahora:

$$EI\theta_A = \frac{EI(BB')}{10m} = 189.3kN \cdot m^2$$

El ángulo de rotación  $\theta_B$  se determina en forma similar. Primero se encuentra la distancia  $AA'$  a partir del segundo teorema del área de momentos:

$$\begin{aligned} EI(AA') &= A_1 \left( \frac{2}{3} \right) (10m) + A_2 \left[ 4m + \frac{2}{3}(6m) \right] \\ &= (1000kN \cdot m^2) \left( \frac{20m}{3} \right) - (720kN \cdot m^2)(8m) \\ &= 906.7kN \cdot m^3 \end{aligned}$$

Luego, el ángulo  $\theta_B$  es

$$EI\theta_B = \frac{EI(AA')}{10m} = 90.67kN \cdot m^2$$

El ángulo de rotación  $\theta_C$  es igual al ángulo  $\theta_B$  en el apoyo *B* más el área del diagrama  $M/EI$  entre *B* y *C*, de acuerdo con el primer teorema del área de momentos. Luego,

$$\begin{aligned} EI\theta_C &= EI\theta_B + A_3 \\ &= 90.67kN \cdot m^2 - 53.33kN \cdot m^2 = 37.33kN \cdot m^2 \end{aligned}$$

Ahora es posible determinar los ángulos reales de rotación sustituyendo  $E = 200 \text{ GPa}$  e  $I = 1.28 \times 10^9 \text{ mm}^4$  en las ecuaciones anteriores. El producto  $EI$  es igual a  $256.0 \text{ MN}\cdot\text{m}^2$ ; por lo tanto,

$$\theta_A = \frac{189.3kN \cdot m^2}{256.0MN \cdot m^2} = 739 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\theta_B = \frac{90.67kN \cdot m^2}{256.0MN \cdot m^2} = 354 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\theta_C = \frac{37.33kN \cdot m^2}{256.0MN \cdot m^2} = 146 \times 10^{-6} \text{ rad}$$

A partir de la figura 7 se observa que la deflexión es igual a la distancia  $CC''$  menos la distancia  $CC'$ . La primera de estas distancias se obtiene multiplicando  $\theta_B$  por la distancia  $BC$

$$EI(C'C'') = EI\theta_B(4m) = (90.67kN \cdot m^2)(4m) \\ = 362.7kN \cdot m^3$$

La distancia  $C'C$  es la desviación tangencial  $t_{CB}$  del punto  $C$  desde la tangente en  $B$ , la cual es igual al momento estático del área del diagrama  $M/EI$  entre  $B$  y  $C$  con respecto a  $C$ :

$$EI(C'C) = -A_3 \left( \frac{3}{4} \right) (4m) = (53.33kN \cdot m^2)(3m) \\ = 160.0kN \cdot m^3$$

Por lo tanto, la deflexión (multiplicada por  $EI$ ) es

$$EI\delta_c = EI(C'C'') - EI(C'C) \\ = 362.7kN \cdot m^3 - 160.0kN \cdot m^3 = 202.7kN \cdot m^3$$

Sustituyendo el valor de  $EI$  se obtiene

$$\delta_c = \frac{202.7kN \cdot m^3}{256.0MN \cdot m^2} = 0.792mm$$

Esta deflexión es hacia arriba, como se muestra en la figura.

La deflexión máxima hacia abajo  $\delta_c$  ocurre en el tramo  $AB$  en un punto  $E$  a localizar. Se supone que este punto está entre  $D$  y  $B$  (si no lo está, los cálculos lo indicarán y entonces es posible iniciar nuevamente asumiendo que  $E$  está entre  $A$  y  $D$ ). En el punto  $E$ , la curva de deflexión tiene una tangente horizontal; por lo tanto, el área del diagrama  $M/EI$  entre  $A$  y  $E$  debe ser igual al ángulo de rotación  $\theta_A$ . Denotando por  $x_1$  la distancia desde  $A$  hasta  $E$ , es posible formular la siguiente ecuación

$$EI\theta_A = \frac{1}{2}(x_1)(20kN)(x_1) - \frac{1}{2}(x_1 - 4m) \\ \cdot (40kN)(x_1 - 4m) \\ = x_1^2(-10kN) + x_1(160kN \cdot m) - 320kN \cdot m^2$$

donde  $x_1$  tiene unidades de metros. Sustituyendo  $EI\theta_A = 189.3kN \cdot m^2$  en esta ecuación, se obtiene la siguiente ecuación cuadrática para  $x_1$ :

$$x_1^2 - 16x_1 + 50.93 = 0$$

Resolviendo mediante la fórmula cuadrática, obtenemos  $x_1 = 4.385m$  (la otra raíz no tiene significado real en este problema). Ahora se ha determinado la posición del punto  $E$  entre  $D$  y  $B$ .

La deflexión máxima  $\delta_{m\acute{a}x}$  es numéricamente igual a la desviación  $t_{AE}$  del punto  $A$  respecto a la tangente horizontal en  $E$ . Por lo tanto, es posible calcular  $\delta_{m\acute{a}x}$  tomando momento estático del área entre  $A$  y  $E$  con respecto a  $A$ .

$$EI\delta_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2}(x_1)(20kN)(x_1)\frac{2x_1}{3} \\ - \frac{1}{2}(x_1 - 4m)(40kN)(x_1 - 4m) \left[ 4m + \frac{2}{3}(x_1 - 4m) \right]$$

Sustituyendo  $x_1 = 4.385m$  en las expresiones anteriores, obtenemos

$$EI\delta_{m\acute{a}x} = 562.2kN \cdot m^3 - 12.63kN \cdot m^3 \\ = 549.6kN \cdot m^3$$

En términos numéricos

$$\delta_{m\acute{a}x} = \frac{549.6kN \cdot m^3}{256.0kN \cdot m^2} = 2.15mm$$