AUXILIAR # 4

16/04/08

ME46A.

Prof: Roger Bustamante

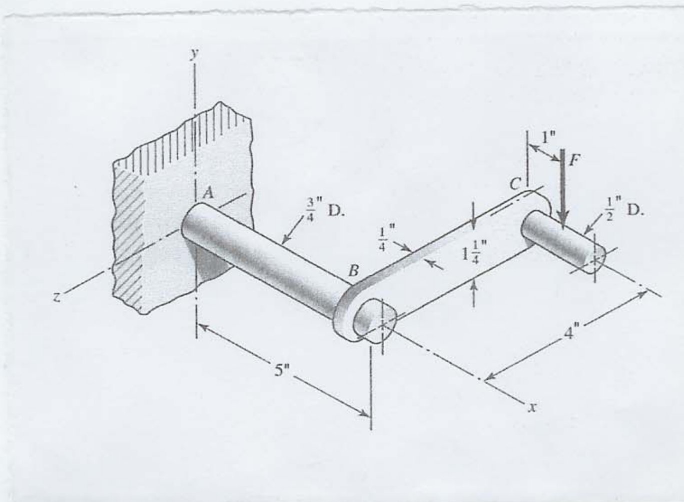
P1

La figura 3-20 expone una manivela sometida a una fuerza $F = 300$ lb que causa la torsión y flexión de un eje con un diámetro de $\frac{3}{4}$ pulg, que está fijo a un soporte en el origen del sistema de referencia. En realidad, el soporte tal vez sea una inercia que se desea girar, pero para los propósitos del análisis del esfuerzo considere que se trata de un problema de estática.

a) Dibuje diagramas de cuerpo libre separados del eje *AB* y del brazo *BC*, y calcule los valores de todas las fuerzas, momentos y pares de torsión que actúan sobre estos elementos. Identifique las direcciones de los ejes coordenados en estos diagramas.

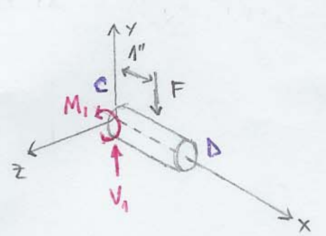
b) Calcule el máximo del esfuerzo torsional y del esfuerzo flexionante en el brazo *BC* e indique dónde actúan.

c) Localice un elemento del esfuerzo en la superficie superior del eje en *A*, y calcule todos los componentes del esfuerzo que actúan en este elemento.



a) DCL brazo BC

- primero analizamos el DCL del cilindro CD

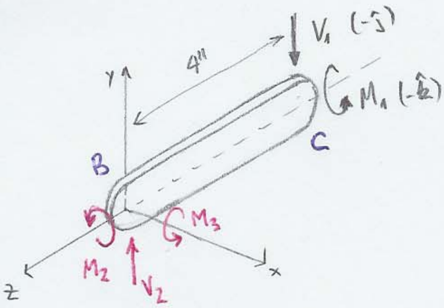


reacciones en el pto. C

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V_1 - F = 0 \Rightarrow \boxed{V_1 = 300\,\hat{j}\,[lb] = 136{,}1\,\hat{j}\,[kg]}$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow M_1 - 1 \cdot F = 0 \Rightarrow \boxed{M_1 = 300\,\hat{k}\,[lb\,pulg]}$$

$$\boxed{M_1 = 3{,}46\,\hat{k}\,[kg \cdot m]}$$



↳ reacciones en el pto. B

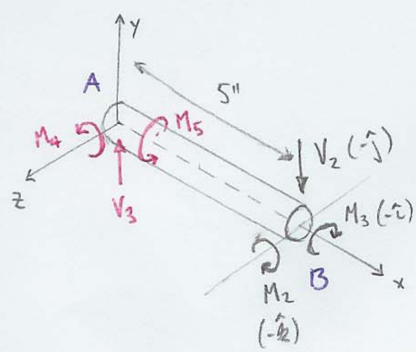
$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_2 - V_1 = 0 \Rightarrow \boxed{V_2 = 300\,\hat{j}\ [lb] = 136{,}1\,\hat{j}\ [kg]}$$

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow M_3 - 4V_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} M_3 = 1200\,\hat{i}\ [lb \cdot pulg] \\ \hline M_3 = 13{,}83\ [kg \cdot m] \end{array}}$$

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_2 - M_1 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} M_2 = 300\,\hat{k}\ [lb \cdot pulg] \\ \hline M_2 = 3{,}46\,\hat{k}\ [kg \cdot m] \end{array}}$$

- el cilindro CD transmite V_1 y M_1 al brazo BC, tanto la fza. como el momento se transmiten con sentido opuesto (acción y reacción).

DCL eje AB



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow V_3 - V_2 = 0 \Rightarrow \boxed{V_3 = 300\,\hat{j}\ [lb] = 136{,}1\,\hat{j}\ [kg]}$$

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow M_5 - M_3 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} M_5 = 1200\,\hat{i}\ [lb \cdot pulg] \\ \hline M_5 = 13{,}83\,\hat{i}\ [kg \cdot m] \end{array}}$$

$$\Sigma M_z = 0 \Rightarrow M_4 - M_2 - 5 \cdot V_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} M_4 = 1800\,\hat{k}\ [lb \cdot pulg] \\ \hline M_4 = 20{,}74\,\hat{k}\ [kg \cdot m] \end{array}}$$

- al igual que antes, el brazo BC transmite V_2, M_2 y M_3 al eje AB pero en sentido opuesto.

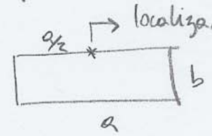
b) - máximo esfuerzo de torsión en BC

- Dado que el brazo BC presenta un perfil rectangular, la fórmula $\tau_{máx} = \frac{T \cdot r}{J}$ (T= momento de torsión; r= radio; J= momento de inercia polar) no puede ser utilizada.

- Para perfiles rectangulares se tiene la sgte. fórmula:

$$\tau_{máx} = \frac{T}{K_1 a b^2}$$

(T= momento de torsión; $k_1 = k_1(a/b)$;



$b \leq a$)

- en este caso: * $T = M_1 = 300\,\hat{k}$ [lb·pulg]
$= 3{,}46\,\hat{k}$ [kg·m]

*

$a = 1\frac{1}{4}'' = 0{,}03175$ [m]

$b = \frac{1}{4}'' = 0{,}00635$ [m].

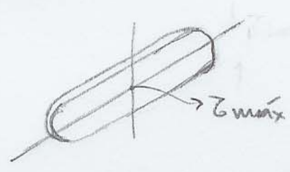
* $a/b = 5 \Rightarrow K_1 \approx 0{,}297$

- K_1 viene de interpolar para $a/b = 5$ de la siguiente tabla:

a/b	1	1,5	2	4	10	∞
K_1	0,208	0,231	0,246	0,282	0,312	1/3

$$\Rightarrow \tau_{máx} = \frac{300}{0{,}297 \cdot 1{,}25 \cdot (0{,}25)^2} = 12929{,}3 \text{ [psi]} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \tau_{máx} = 12929{,}3 \text{ [psi]} \\ \tau_{máx} = 89{,}14 \text{ [MPa]} \end{array}}$$

→ ocurre en



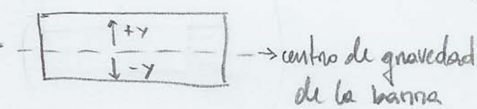
b) - máximo esfuerzo de flexión en BC

- los esfuerzos producto de momentos de flexión son esfuerzos de compresión y de tracción, es decir, σ.
- los esfuerzos producto de momentos de torsión son esfuerzos de corte, es decir, τ.

- Para calcular los esfuerzos debido a flexión se utiliza la sgte ecuación:

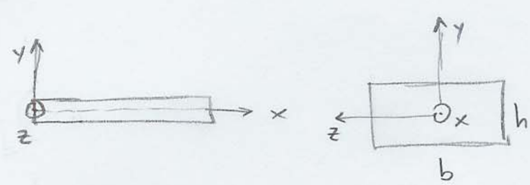
$$\sigma = \frac{-M \cdot y}{I}$$

M = momento de flexión
y =
I = momento de inercia



- en este caso: * $M = M_z = 1200\,\hat{z}$ [lb·pulg]
$= 13{,}83\,\hat{z}$ [kgm]

* $I = \frac{1}{12} b h^3 \rightarrow$

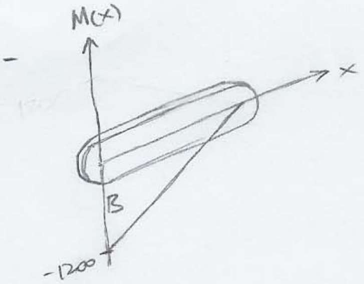


$\Rightarrow b = 1/4''$, $h = 1\,1/4''$ $\Rightarrow I = \frac{1}{12}\, 0{,}25\,(1{,}25)^3$

$\Rightarrow \boxed{I = 0{,}04069 \text{ [pulg}^4\text{]}}$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{1200 \text{ [lb·pulg]} \cdot 1{,}25/2 \text{ [pulg]}}{0{,}04069 \text{ [pulg}^4\text{]}} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} \sigma = 18432 \text{ [psi]} \\ \hline \sigma = 127{,}08 \text{ [MPa]} \end{array}}$$

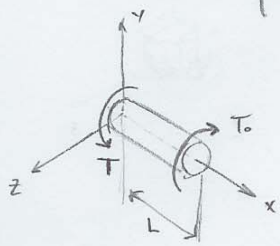
- para que σ sea máximo se debe evaluar en $y = 1{,}25/2$ [pulg] (ver apuntes de cátedra)

-


$\Rightarrow \sigma_{máx}$ ocurre en B y en $y = 1{,}25/2$ [pulg]

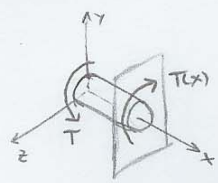
c) Esfuerzos provocados por la TORSIÓN

- Sabemos que:

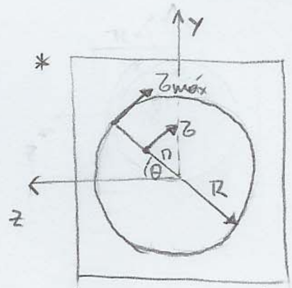


$* \ \Sigma M_x = 0 \Rightarrow T - T_0 = 0 \Rightarrow \boxed{T = T_0}$

* si hacemos un corte entre 0 y L:



$* \ \Sigma M_x = 0 \Rightarrow T - T(x) = 0 \Rightarrow \boxed{T(x) = t_0}$

*


(plano ⊥ al eje x)

$\Rightarrow \dfrac{\tau_{máx}}{R} = \dfrac{\tau}{r}$

$\Rightarrow \boxed{\tau = \tau_{máx} \cdot \dfrac{r}{R}}$

$\Rightarrow \boxed{\tau_{xz} = -\tau \cdot \operatorname{sen}\theta}$

$\boxed{\tau_{xy} = \tau \cdot \cos\theta}$

- en este caso nos piden un elemento en la superficie superior del eje AB, en particular en el pto A:

$\Rightarrow r = R \Rightarrow \tau = \tau_{máx}$

$\Rightarrow \theta = \pi/2 \Rightarrow \tau_{xz} = -\tau = -\tau_{max}$

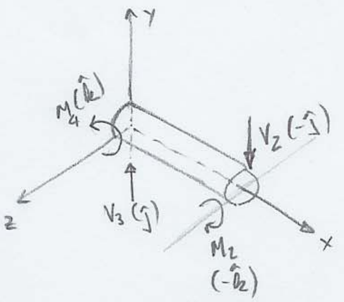
$\tau_{xy} = 0$

$\Rightarrow T\Big|_{pto\,A} = 1200$ [lb·pulg]

$\Rightarrow \tau_{xz} = -\tau_{máx} = -\dfrac{T \cdot r}{J} = \dfrac{-1200 \cdot (3/4'')/2}{\dfrac{\pi\,(3/4'')^4}{32}} \Rightarrow$ $\boxed{\tau_{xz} = -14.486{,}6 \text{ [psi]}}$

$\boxed{\tau_{xz} = -99{,}88 \text{ [MPa]}}$

- Esfuerzos provocados por la FLEXIÓN



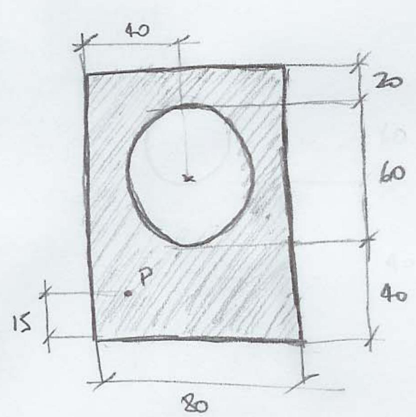
$\sigma = -\dfrac{M\,y}{I}$, * $M|_{\text{pto }A} = -1800$ [lb·pulg].

* parte superior del eje A => $y = \dfrac{(3/4'')}{2}$

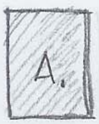
* $I = \dfrac{\pi D^4}{64} = \dfrac{\pi\,(3/4'')^4}{64} = 0{,}015532$ [pulg^4].

$$\Rightarrow \sigma = \frac{-(-1800)\cdot(3/4)/2}{0{,}015532} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = 43458{,}7 \text{ [psi]}}$$

P2| En la figura se muestra la sección transversal de una viga sometida a un momento de flexión positivo de 150 [kg·m] (cotas en mm). Determine el esfuerzo en el pto. P situado a 15 mm de la base.



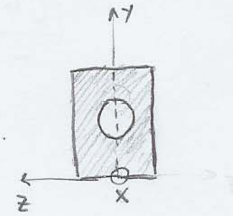
- primero calculamos el centro de gravedad de la figura, puesto que ahí pondremos el origen del sistema de coordenadas.



$A_1 = 80 \cdot 120 \Rightarrow \boxed{A_1 = 9600\ [mm^2]}$

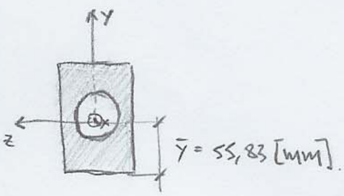
$A_2 = \dfrac{\pi \cdot 60^2}{4} \Rightarrow \boxed{A_2 = 2827{,}43\ [mm^2]}$

- ocupamos este sistema en un comienzo. (ge)



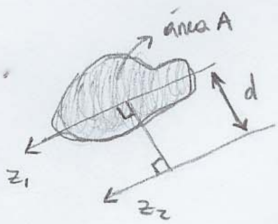
$$\Rightarrow \bar{y} = \frac{\bar{y}_1 A_1 - \bar{y}_2 A_2}{A_1 - A_2} = \frac{60 \cdot 9600 - 70 \cdot 2827{,}43}{9600 - 2827{,}43} \Rightarrow \boxed{\bar{y} = 55{,}83\ [mm]}$$

$\Rightarrow$



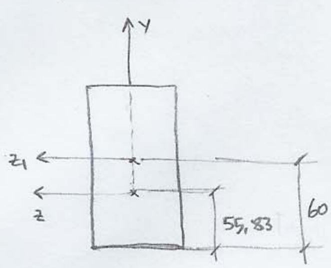
→ Ahora calculamos el momento de inercia con respecto a z.

- Sabemos que:



$\Rightarrow \boxed{I_{z_2} = I_{z_1} + Ad^2}$

- primero calculamos I_{z_R} para el rectángulo lleno.
↳(rectángulo)

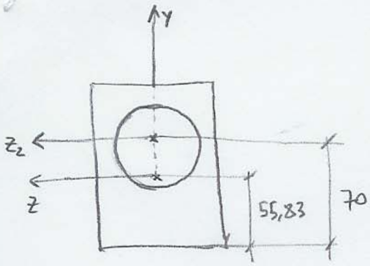


$$I_{z_R} = I_{z_1} + A_1 \cdot (60 - 55{,}83)^2$$

$$I_{z_R} = \frac{1}{12} 80 \cdot 120^3 + 9600 \cdot (60 - 55{,}83)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{z_R} = 11686933{,}4\ [mm^4]}$$

- ahora calculamos I_{z_c} (del círculo):



$$I_{z_c} = I_{z_2} + A_2 \cdot (70 - 55{,}83)^2$$

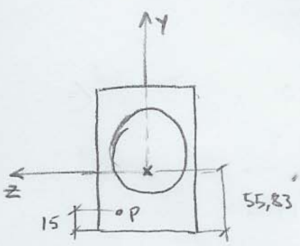
$$I_{z_c} = \frac{\pi \, 60^4}{64} + 2827{,}43\,(70 - 55{,}83)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_{z_c} = 1203889{,}07 \ [mm^4]}$$

$$\Rightarrow I_{z_{total}} = I_{z_R} - I_{z_c} \quad \Rightarrow \boxed{I_{z_{total}} = 10483044{,}4 \ [mm^4]}$$

- finalmente calculamos el esfuerzo en el pto. P.

$$\sigma = -\frac{M \cdot y}{I}$$



$$\Rightarrow \sigma = -\frac{150.000 \ [kg \cdot mm] \cdot -(55{,}83 - 15) \ [mm]}{10483044{,}4 \ [mm^4]}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = 0{,}584 \ [kg/mm^2]}$$