

Prof: Rogin Bustamante.

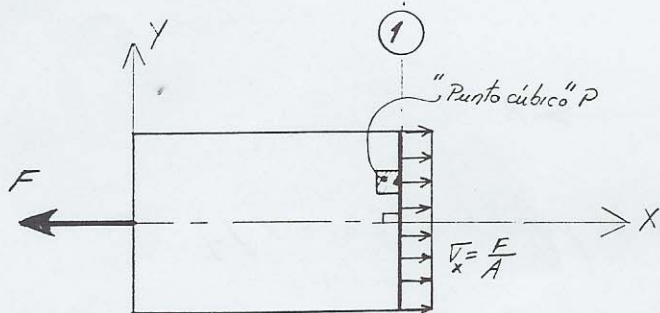
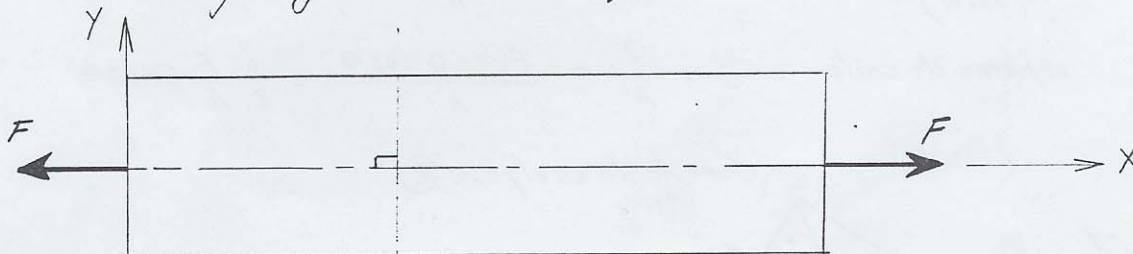
11.- ESFUERZOS PRINCIPALES

11.1 - Planteamiento general

En los diferentes estados de sollicitaciones estudiados anteriormente, se han analizado los esfuerzos que ocurren en un punto del material. El modelo matemático empleado es el del "punto cúbico". Hasta ahora, la orientación de las caras de este punto cúbico se ha considerado fija, sin embargo, si se consideran distintas orientaciones del cubo elemental, se obtienen sobre sus caras esfuerzos que son función de la orientación. El propósito del estudio que sigue a continuación es determinar los valores que toman los esfuerzos en un punto del material cuando se varía la orientación del cubo infinitesimal que lo define.

Un ejemplo aclarará esta situación:

Sea una barra sometida a tracción simple (las fuerzas exteriores coinciden con el eje longitudinal de la barra).

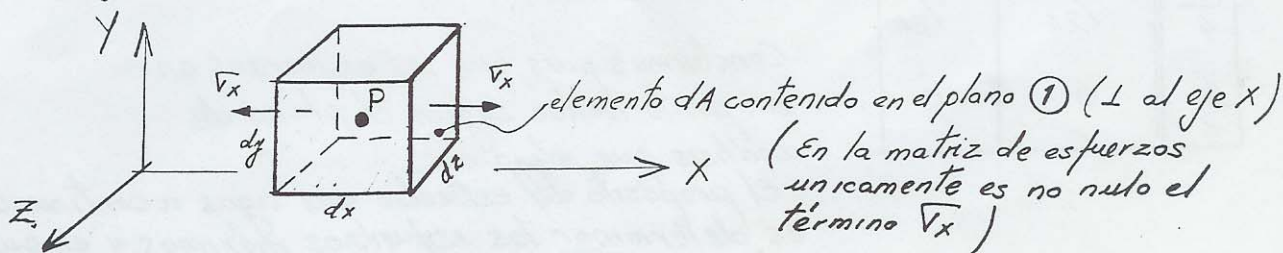


aislando el trozo de barra que queda a la izquierda de un plano ①, se obtiene el esquema de equilibrio que se indica.

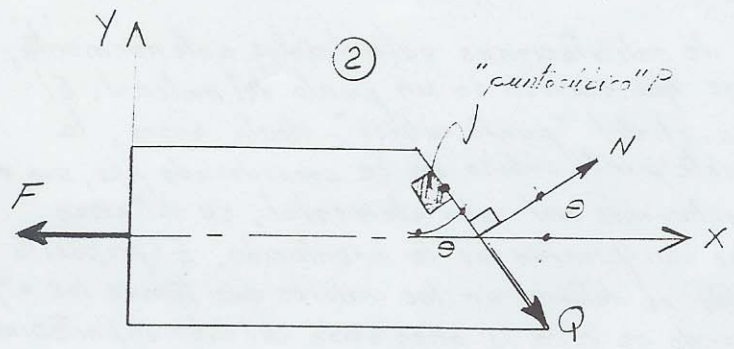
A : área de la sección transversal de la barra.

El plano ① es perpendicular al eje longitudinal de la barra. (eje x)

Los esfuerzos en el punto P se indican en el siguiente esquema:



Si en lugar del plano ① (\perp al eje x), elegimos un plano de investigación inclinado un ángulo θ respecto del eje longitudinal, la situación de esfuerzos en el mismo punto P cambia, apareciendo además esfuerzos de corte provocados por la componente tangencial al plano estudiado (Q)



Las condiciones de equilibrio exigen que $\vec{F} + \vec{N} + \vec{Q} = 0$

luego:

$$N = F \cos \theta$$

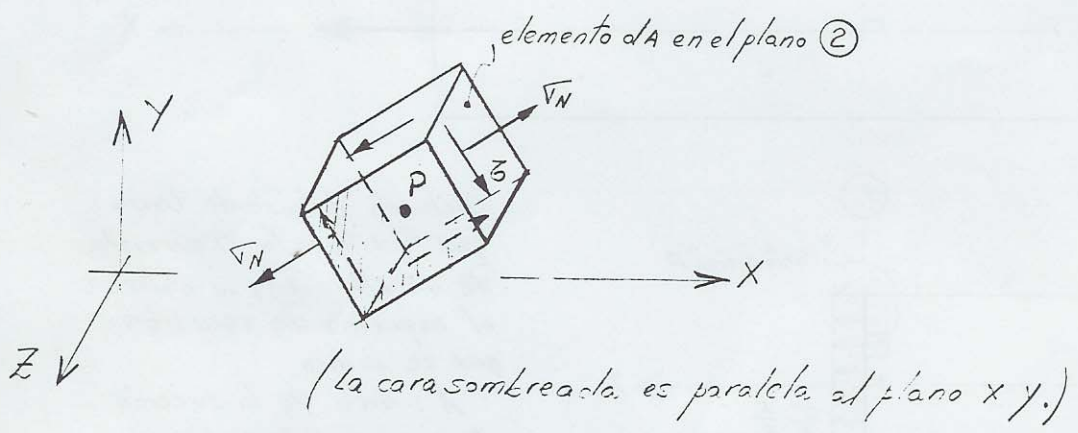
$$Q = F \sin \theta$$

El área transversal del plano inclinado es $A' = \frac{A}{\cos \theta}$

Luego, los esfuerzos sobre el plano inclinado son:

esfuerzo normal (axial) : $\sigma_N = \frac{N}{A'} = \frac{F \cos^2 \theta}{A}$

esfuerzo de corte : $\tau = \frac{Q}{A'} = \frac{F \sin \theta \cos \theta}{A} = \frac{1}{2} \frac{F}{A} \sin 2\theta$

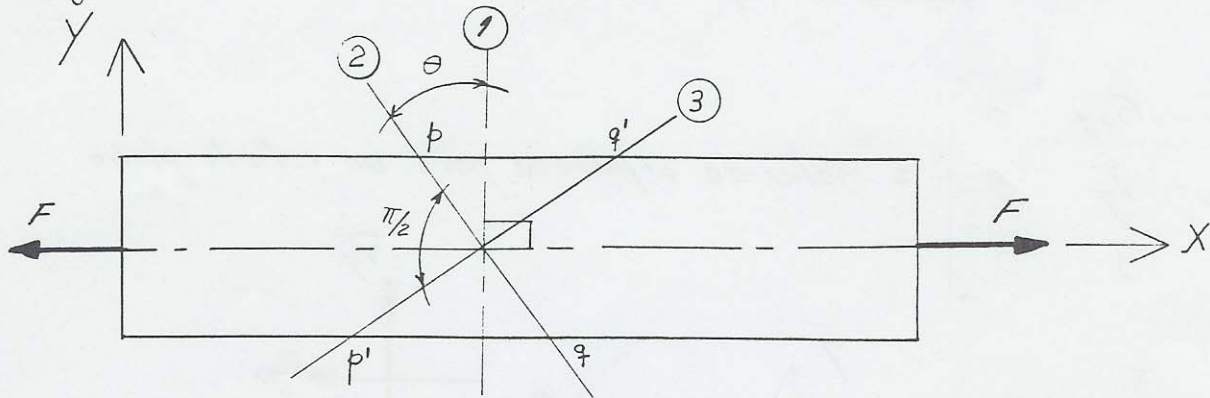


θ	σ_N	τ
0	F/A	0
$\frac{\pi}{4}$	$F/2A$	$F/2A$
$\frac{\pi}{2}$	0	0

Luego, si el material es más débil a corte que a tracción, puede ocurrir que la rotura ocurra en un plano a 45° en que el esfuerzo cortante es máximo.

Concluimos pues, que los esfuerzos en un punto varían según el plano de análisis que elijamos. El propósito del estudio que sigue a continuación es determinar los esfuerzos máximos y en qué planos ocurren.

Investigaremos los esfuerzos que ocurren en dos planos perpendiculares entre sí



El plano ③ queda definido por $\theta' = \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$

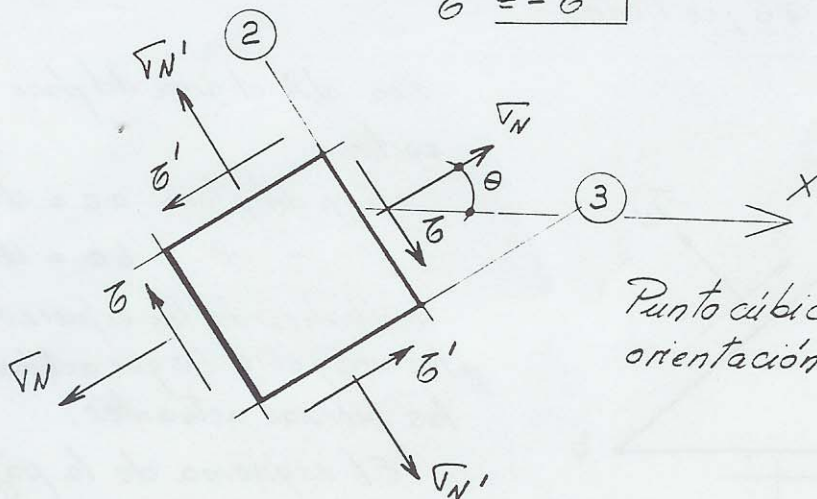
$$\sqrt{N}' = \frac{F \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{A} = \frac{F}{A} \sin^2 \theta$$

$$\bar{\sigma}' = \frac{F}{A} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\frac{1}{2} \frac{F}{A} \sin 2\theta$$

Al sistema de esfuerzos \sqrt{N} , \sqrt{N}' , $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}'$ se le denomina esfuerzos complementarios porque actúan en planos perpendiculares.

$$\text{Se cumple: } \sqrt{N} + \sqrt{N}' = \frac{F}{A}$$

$$\bar{\sigma}' = -\bar{\sigma}$$

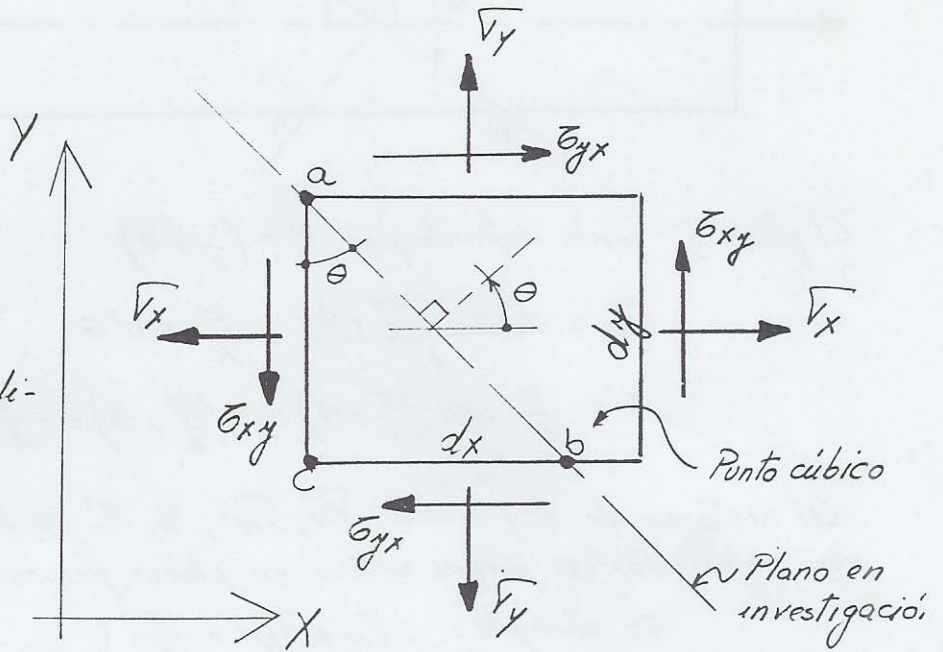


Punto cúbico con una orientación θ .

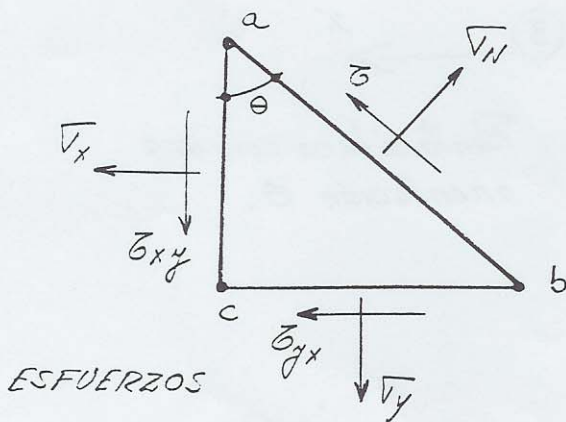
Sea un estado plano de esfuerzos:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x & \bar{\sigma}_{xy} & 0 \\ \bar{\sigma}_{yx} & \bar{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{matriz de esfuerzos para un estado plano}$$

Supongamos que es dato la matriz de esfuerzos y que queremos encontrar el valor de los esfuerzos $\bar{\sigma}_N, \bar{\sigma}$ que actúan en un plano ab , definido por el ángulo θ



Aislado lo que queda a la izquierda del plano ab , se tiene:



Sea dA el área del plano ab
se tiene:

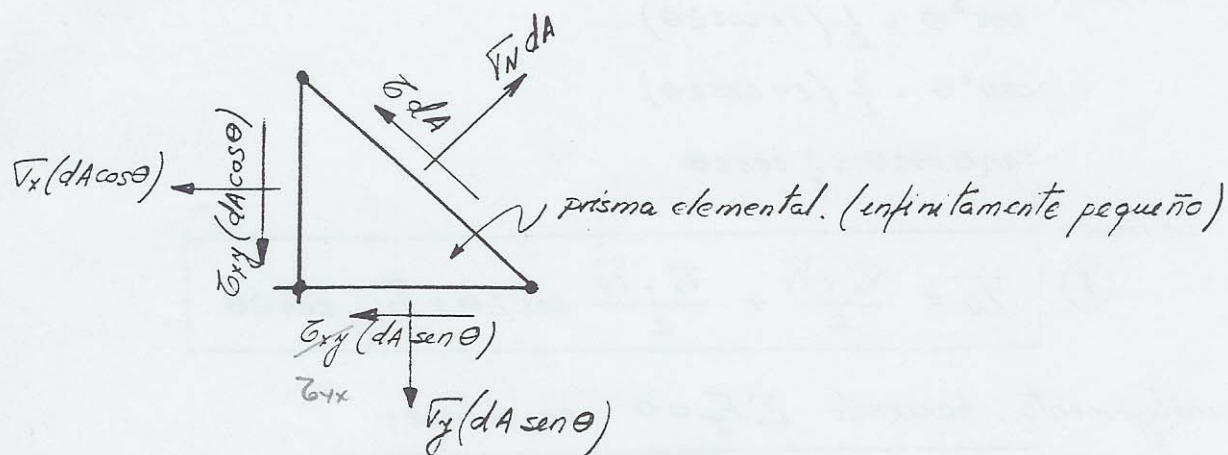
$$\text{área del plano } ac = dA \cos \theta$$

$$\text{" " " } bc = dA \sin \theta$$

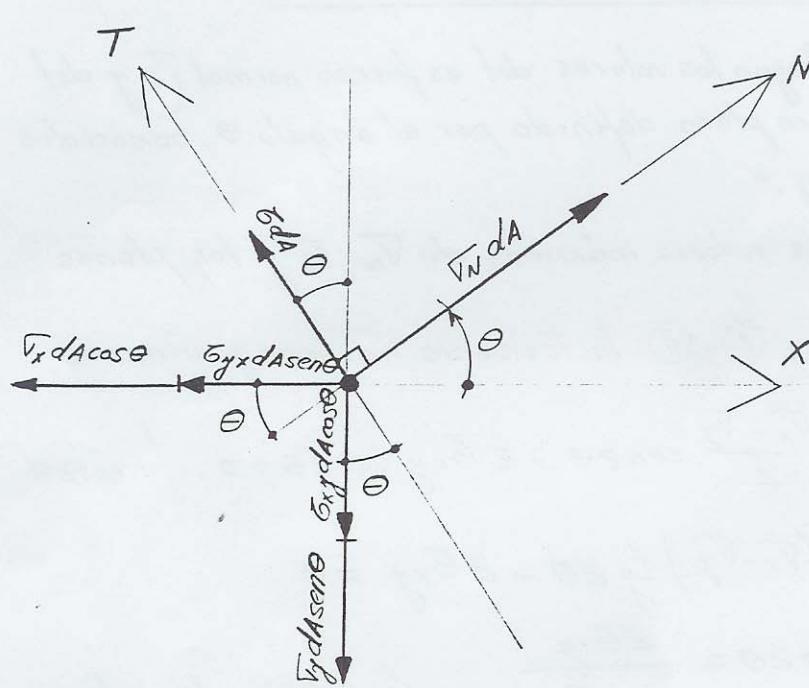
multiplicando los esfuerzos por las áreas sobre las que actúan obtenemos las fuerzas actuantes.

El esquema de la página siguiente muestra las fuerzas que actúan en el punto.

FUERZAS EN EL PUNTO



Aplicaremos condiciones de equilibrio a las fuerzas actuantes:



$$i) \sum F_N = 0$$

$$ii) \sum F_T = 0$$

$$i) \quad V_N dA = V_y dA \sin^2 \theta + \tau_{xy} dA \cos \theta \sin \theta + V_x dA \cos^2 \theta + \tau_{yx} dA \sin \theta \cos \theta$$

$$V_N = V_x \cos^2 \theta + V_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta + \tau_{yx} \sin \theta \cos \theta$$

pero $|\tau_{xy}| = |\tau_{yx}|$, luego

$$V_N = V_x \cos^2 \theta + V_y \sin^2 \theta + 2 \tau_{xy} \sin \theta \cos \theta$$

recordando que

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta)$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

se tiene:

$$\textcircled{1} \quad \sigma_N = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

análogamente, haciendo $\sum F_T = 0$, se obtiene:

$$\textcircled{2} \quad \tau = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

Las ecuaciones $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$ entregan los valores del esfuerzo normal σ_N y del esfuerzo de corte τ en un plano definido por el ángulo θ , conocidos los esfuerzos σ_x , σ_y , τ_{xy} .

Nos interesará conocer los valores máximos de σ_N , τ y los planos sobre los que actúan.

Aplicamos a las ecuaciones $\textcircled{1}$ y $\textcircled{2}$ la teoría de máximos y mínimos.

$$\frac{d\sigma_N}{d\theta} = -2 \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + 2 \tau_{xy} \cos 2\theta = 0 \quad | : \cos 2\theta$$

$$-(\sigma_x - \sigma_y) \operatorname{tg} 2\theta + 2\tau_{xy} = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$$\textcircled{3} \quad \left. \begin{array}{l} \theta_1 \\ \theta_1 + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

θ_1 y $(\theta_1 + \frac{\pi}{2})$ definen los planos en que actúan $\sigma_{N\max}$ y $\sigma_{N\min}$.

se obtienen dos valores para el ángulo 2θ , que difieren entre sí en 180° , por lo tanto los planos de esfuerzo normal máximo y mínimo son perpendiculares entre sí.

Derivando y arulando la ecuación (2) se obtiene:

$$\operatorname{tg} 2\theta_2 = - \frac{(\sigma_x - \sigma_y)}{2\tau_{xy}}$$

$$\textcircled{4} \left. \begin{array}{l} \theta_2 \\ \theta_2 + \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(- \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \right)$$

θ_2 y $(\theta_2 + \frac{\pi}{2})$ definen los planos en que actúan $\sigma_{máx}$ y $\sigma_{mín}$.

Introduciendo los valores de θ_1 y θ_2 dados por las ecuaciones (3) y (4), en las ecuaciones (1) y (2) respectivamente, se obtiene:

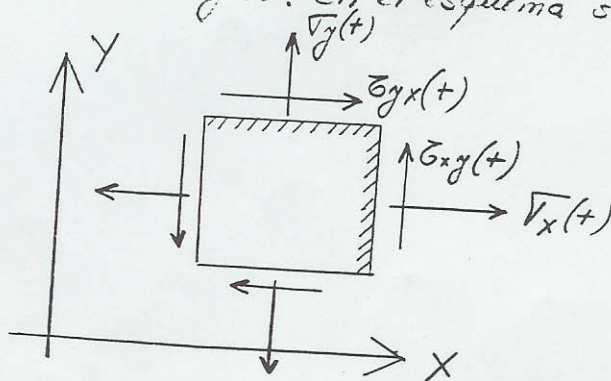
$$\textcircled{5} \left. \begin{array}{l} \sigma_{1 \text{ máx}} = \sigma_1 \\ \sigma_{2 \text{ mín}} = \sigma_2 \end{array} \right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

σ_1, σ_2 : ESFUERZOS PRINCIPALES

$$\textcircled{6} \left. \begin{array}{l} \sigma_{máx} \\ \sigma_{mín} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

En todas las ecuaciones anteriores los esfuerzos $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ deben introducirse con su signo. En el esquema se indican los signos positivos:

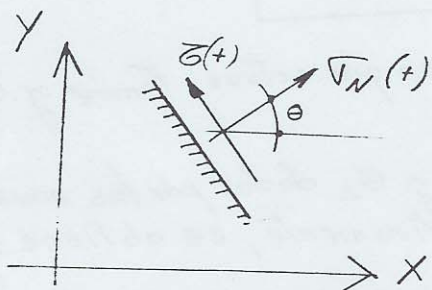
Los planos achurados definen los sentidos positivos de los esfuerzos



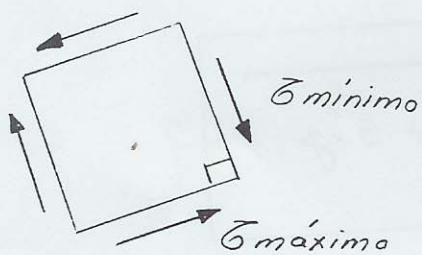
Signos de los esfuerzos τ_N y τ .

El esfuerzo normal τ_N será positivo si produce tracción sobre el plano en que actúa.

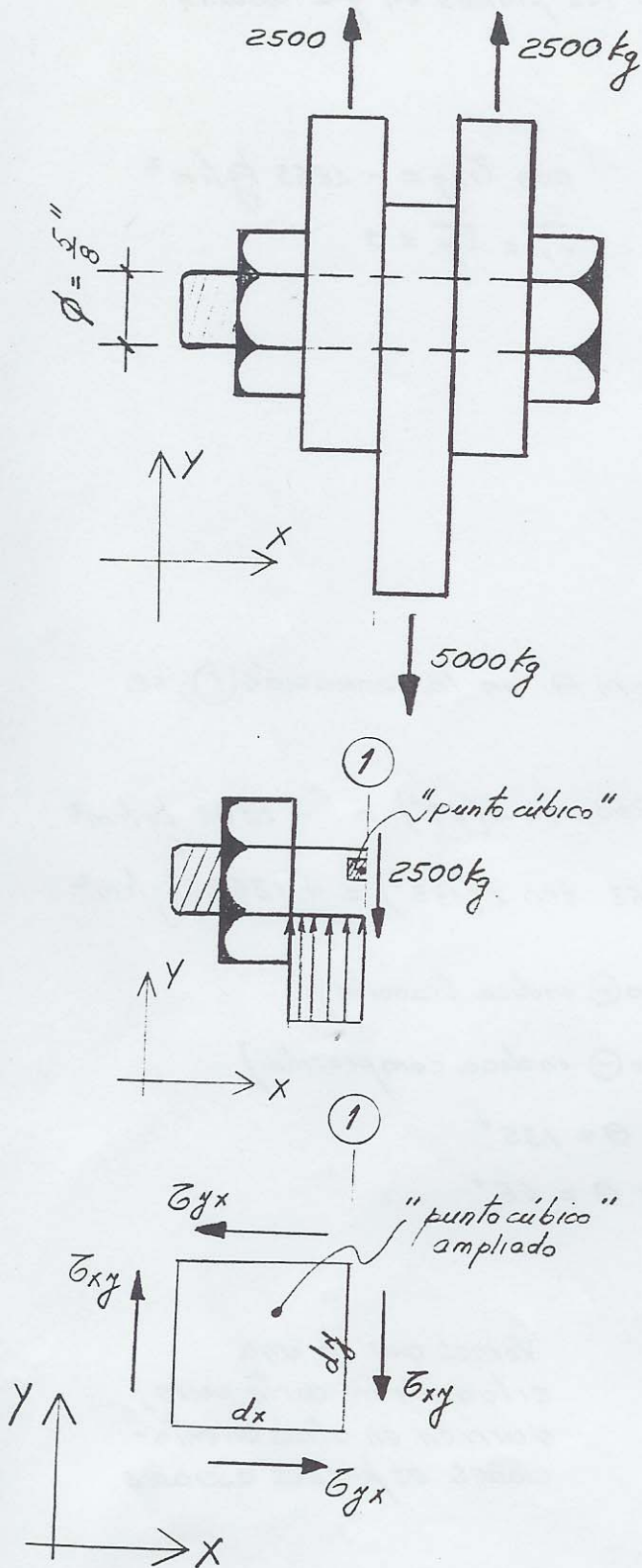
El esfuerzo de corte τ será positivo si produce momento positivo en torno del eje z.



De la ecuación (6) se deduce que el esfuerzo cortante máximo difiere únicamente del mínimo en el signo y por la ecuación (4) sabemos que actúan en planos perpendiculares entre sí.



Ejemplo de aplicación: N°1-



En la conexión de cizalle doble del esquema, se pide determinar los esfuerzos principales (σ_1, σ_2) en el material del perno de $\frac{5}{8}$ de pulgada de diámetro.

(1 pulgada = 2.54 cm)

Solución:

Area de la sección transversal del perno: $A = \left(2.54 \frac{5}{8}\right)^2 \frac{\pi}{4} = 1.98 \text{ cm}^2$

Aislando las fuerzas a la izquierda del plano ①, se obtiene el diagrama de equilibrio indicado.

Asumiendo que el espesor de las planchas es pequeño, aceptamos que se trata de una situación de corte puro (la flexión del perno es despreciable).

El plano ① está sometido a una fuerza de corte: $V = 2500 \text{ kg}$.

Un punto del material del perno, contenido en el plano ① está sometido a un esfuerzo de corte: $\tau_{xy} = \frac{-2500}{1.98} \text{ kg/cm}^2$

$\tau_{xy} = -1263 \text{ kg/cm}^2$. ($= \tau_{yx}$)
Los otros términos de la matriz de esfuerzos son nulos.

(continúa)

Aplicando la ecuación (3), encontramos los planos en que actúan $\sigma_1 (= \sigma_{N \text{ máx}})$ y $\sigma_2 (= \sigma_{N \text{ mín}})$.

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 \\ (\theta_1 + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} ; \quad \text{con } \tau_{xy} = -1263 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 \\ (\theta_1 + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2(-1263)}{0}$$

$$\theta_1 = 45^\circ$$

$$(\theta_1 + \frac{\pi}{2}) = 135^\circ$$

Introduciendo los valores obtenidos para θ en la ecuación (1), se obtiene:

$$\sigma_N = \frac{0}{2} + \frac{0}{2} \cos 2(45^\circ) - 1263 \sin 2(45^\circ) = -1263 \text{ kg/cm}^2$$

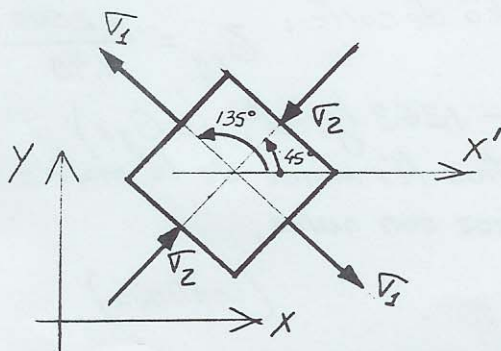
$$\sigma_{N'} = \frac{0}{2} + \frac{0}{2} \cos 2(135^\circ) - 1263 \sin 2(135^\circ) = +1263 \text{ kg/cm}^2$$

luego, $\sigma_1 = \sigma_{N'} = 1263 \text{ kg/cm}^2$ (el signo \oplus indica tracción)

$\sigma_2 = \sigma_N = -1263$ " (el signo \ominus indica compresión)

σ_1 ocurre en un plano definido por $\theta = 135^\circ$

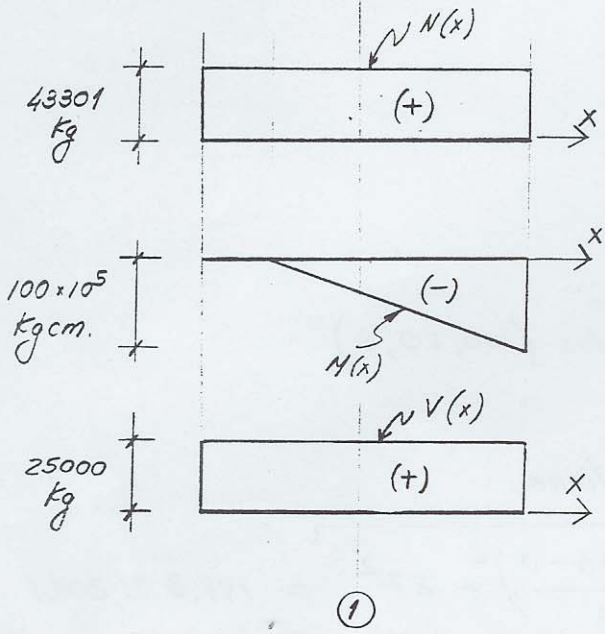
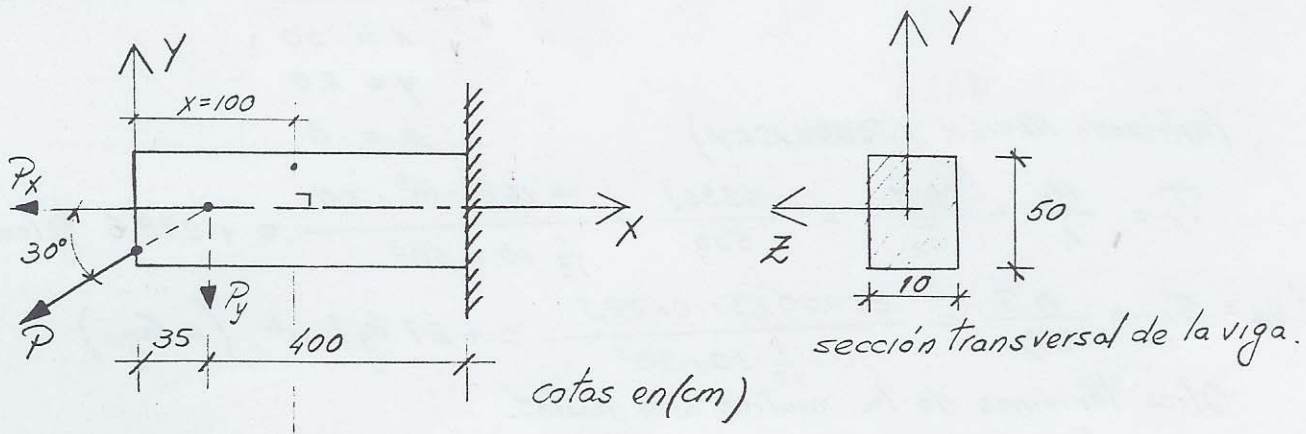
σ_2 ocurre en un plano definido por $\theta = 45^\circ$



Vemos que en una situación de corte puro, ocurren en otras orientaciones esfuerzos axiales.

El "punto cúbico" orientado en la dirección de los esfuerzos principales.

Ejemplo N°2



Se pide encontrar los esfuerzos principales y de corte máximo en el punto de coordenadas $x = 100$
 $y = 20$
 cuando la viga está sometida a una fuerza $P = 50 \text{ ton}$.

Solución.

Descomponiendo la fuerza P según las direcciones x, y , se tiene:

$$P_x = P \cos 30^\circ = 43301 \text{ kg}$$

$$P_y = P \sin 30^\circ = 25000 \text{ kg}$$

Con estos valores se dibujan los diagramas de fuerza axial, fuerza de corte y momento de flexión.

En el plano ① ($x=100$), existen las siguientes solicitaciones:

Fuerza axial: $N_1 = +43301 \text{ kg}$ (tracción)

Momento de flexión: $M_1 = -16,25 \times 10^5 \text{ kgcm}$ (flexión negativa)

Fuerza de corte: $V_1 = +25000 \text{ kg}$ (hacia arriba)

Con estas solicitaciones, encontraremos la matriz de esfuerzos en el punto en estudio.

Cálculo de la matriz de esfuerzos en el punto de coordenadas

$$x = 100$$

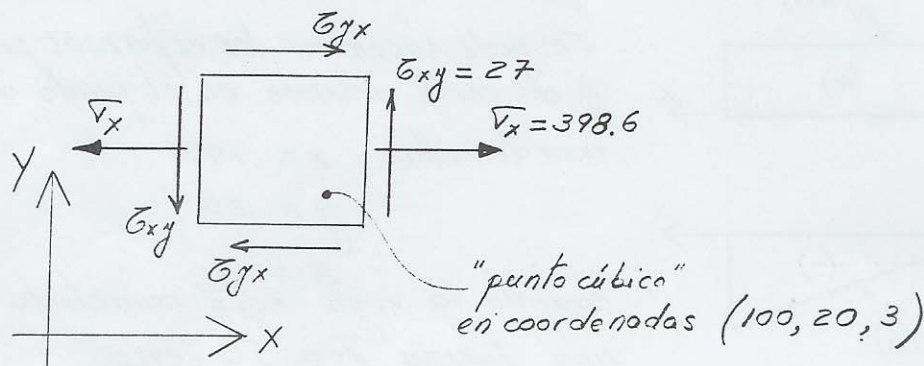
$$y = 20$$

$$z = 3$$

$$\bar{\sigma}_x = \frac{N_1}{A} - \frac{M_1 y}{I_z} = \frac{43301}{500} - \frac{-16,25 \times 10^5 \times 20}{\frac{1}{12} 10 \times 50^3} = +398,6 \text{ kg/cm}^2$$

$$\frac{V(x)}{t I_z} \int y dA = \bar{\sigma}_{xy} = \frac{V_1 S}{b I_z} = \frac{25000 \times 5 \times 10 \times 22,5}{10 \times \frac{1}{12} 10 \times 50^3} = +27 \text{ kg/cm}^2 (= \bar{\sigma}_{yx})$$

Otros términos de la matriz son nulos.



Aplicando las ecuaciones (5) y (6), se tiene:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \end{array} \right\} = \frac{398,6 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{398,6 - 0}{2}\right)^2 + 27^2} = 199,3 \pm 201,1$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_{\max} \\ \bar{\sigma}_{\min} \end{array} \right\} = \pm \sqrt{\left(\frac{398,6 - 0}{2}\right)^2 + 27^2} = \pm 201,1$$

se tiene: $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\sigma}_1 (= \bar{\sigma}_N \max) = +400,4 \text{ kg/cm}^2 \text{ (el signo indica tracción)} \\ \bar{\sigma}_2 (= \bar{\sigma}_N \min) = -1,8 \text{ kg/cm}^2 \text{ (compresión)} \\ \bar{\sigma}_{\max} = 201,1 \text{ kg/cm}^2 \end{array} \right.$

Averiguaremos ahora sobre qué planos actúan estos esfuerzos

Aplicando la ecuación (3):

$$\left. \begin{array}{l} \theta_1 \\ (\theta_1 + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 \times 27}{398.6 - 0} = \begin{cases} 3.86^\circ \\ 93.86^\circ \end{cases}$$

para saber si σ_1 actúa con θ_1 o con $(\theta_1 + \frac{\pi}{2})$, se debe emplear la ecuación (1)

$$\sigma_N = \frac{398.6 + 0}{2} + \frac{398.6 - 0}{2} \cos 2(3.86^\circ) + 27 \sin 2(3.86^\circ)$$

$$\sigma_N = +400.9 = \sigma_1 ; \text{ luego } \sigma_1 \text{ actúa en el plano definido por } \theta_1 \\ \text{ y } \sigma_2 \text{ actúa en el plano definido por } (\theta_1 + \frac{\pi}{2})$$

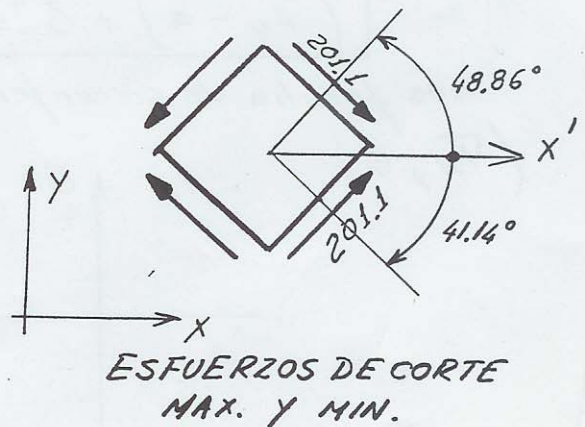
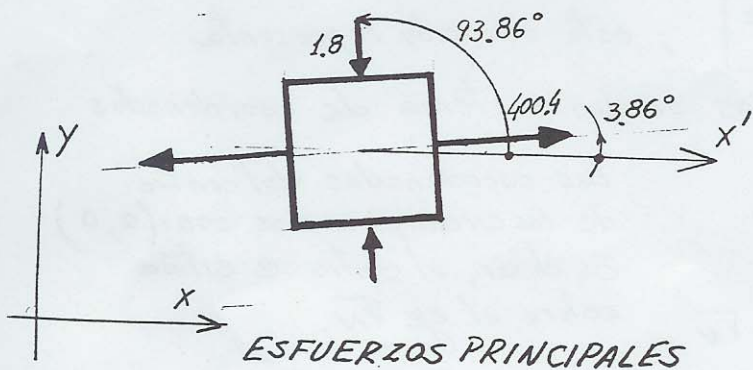
Aplicando la ecuación (4):

$$\left. \begin{array}{l} \theta_2 \\ (\theta_2 + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{398.6 - 0}{2 \times 27} \right) = \begin{cases} -41.14^\circ \\ +48.86^\circ \end{cases}$$

para saber si τ_{\max} actúa con θ_2 o con $(\theta_2 + \frac{\pi}{2})$, se debe emplear la ecuación (2)

$$\tau = -\frac{398.6 - 0}{2} \sin 2(-41.14^\circ) + 27 \cos 2(-41.14^\circ)$$

$$\tau = +201.1 = \tau_{\max} ; \text{ luego } \tau_{\max} \text{ actúa en el plano definido por } \theta_2 \\ \text{ y } \tau_{\min} \text{ actúa en el plano definido por } (\theta_2 + \frac{\pi}{2})$$



11.2.- El círculo de MOHR para un estado plano de esfuerzos

La teoría expuesta en 11.1 requiere el manejo de seis ecuaciones para estudiar los esfuerzos en un punto. A fines del siglo pasado, el ingeniero alemán Otto Mohr desarrolló un método gráfico que permite analizar rápidamente el estado de esfuerzos en un punto.

Representación gráfica de las ecuaciones ① y ②

Escribimos la ecuación ①:

$$\sqrt{N} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

elevando al cuadrado, se tiene:

$$\textcircled{1} \left(\sqrt{N} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2} \right)^2 \cos^2 2\theta + 2 \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2} \tau_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\theta$$

elevando al cuadrado la ecuación ②:

$$\textcircled{2} \tau^2 = \left(- \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2} \right)^2 \sin^2 2\theta - 2 \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2} \tau_{xy} \sin 2\theta \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta$$

Sumando las dos ecuaciones miembro a miembro:

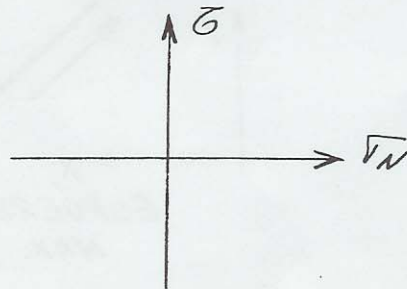
$$\boxed{\left(\sqrt{N} - \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2} \right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

haciendo $a = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{2}$; $R^2 = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2$

se tiene:

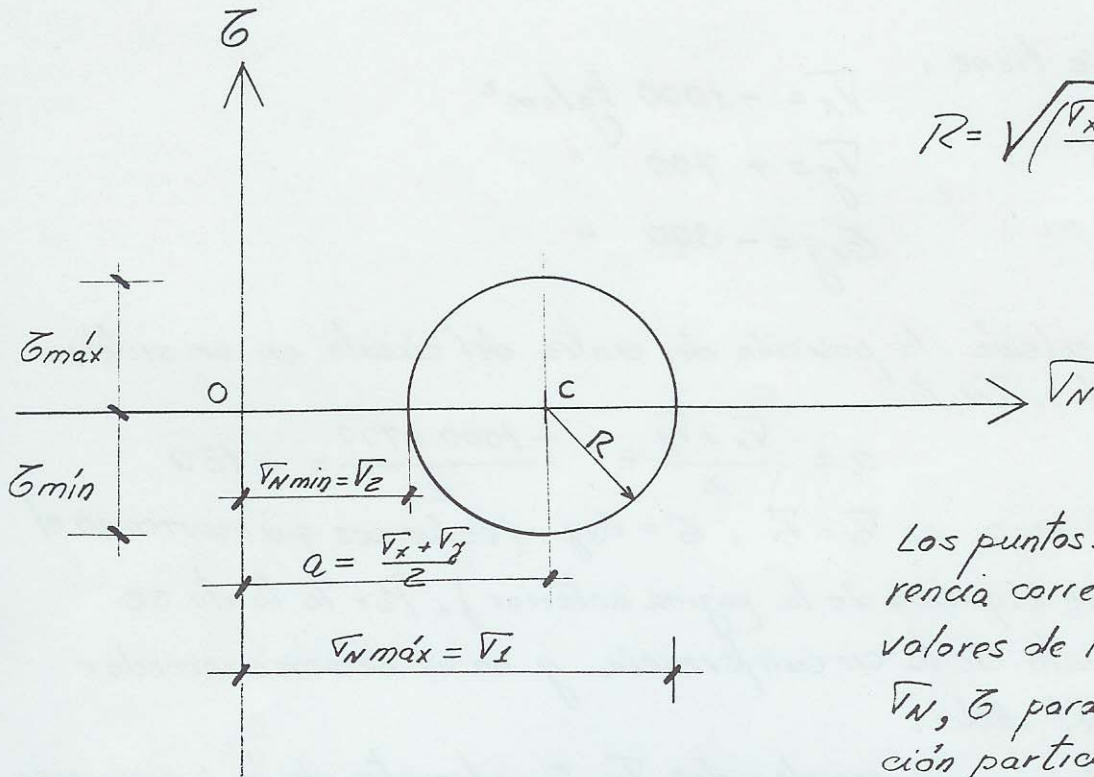
$$\boxed{\left(\sqrt{N} - a \right)^2 + \tau^2 = R^2}$$
 ; esta ecuación representa

una familia de circunferencias en un sistema de coordenadas (\sqrt{N}, τ)



Las coordenadas del centro de las circunferencias son: $(a, 0)$
Es decir, el centro se sitúa sobre el eje \sqrt{N} .

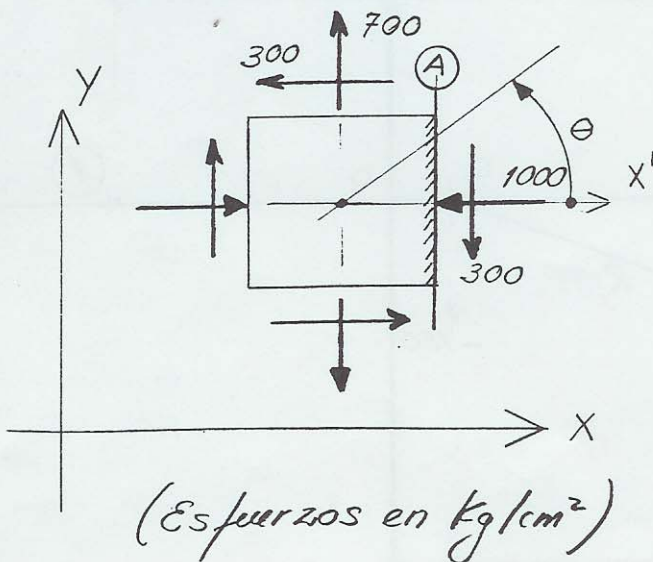
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



Los puntos sobre la circunferencia corresponden a los valores de los esfuerzos σ_N , τ para una orientación particular de un plano, definido por un ángulo θ

Veremos con un ejemplo la forma de emplear la circunferencia de Mohr.

Ejemplo de aplicación



Para el estado de esfuerzos del esquema, se pide:

- i) Calcular los esfuerzos principales y los planos en que actúan.
- ii) Calcular los esfuerzos de corte máx. y min y los planos en que actúan
- iii) Calcular los esfuerzos que actúan en un plano definido por $\theta = 65^\circ$

Solución:

se tiene:

$$\sigma_x = -1000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\sigma_y = +700 \text{ ''}$$

$$\tau_{xy} = -300 \text{ ''}$$

Se calcula la posición del centro del círculo en un sistema de coordenadas σ_N, τ .

$$a = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-1000 + 700}{2} = -150$$

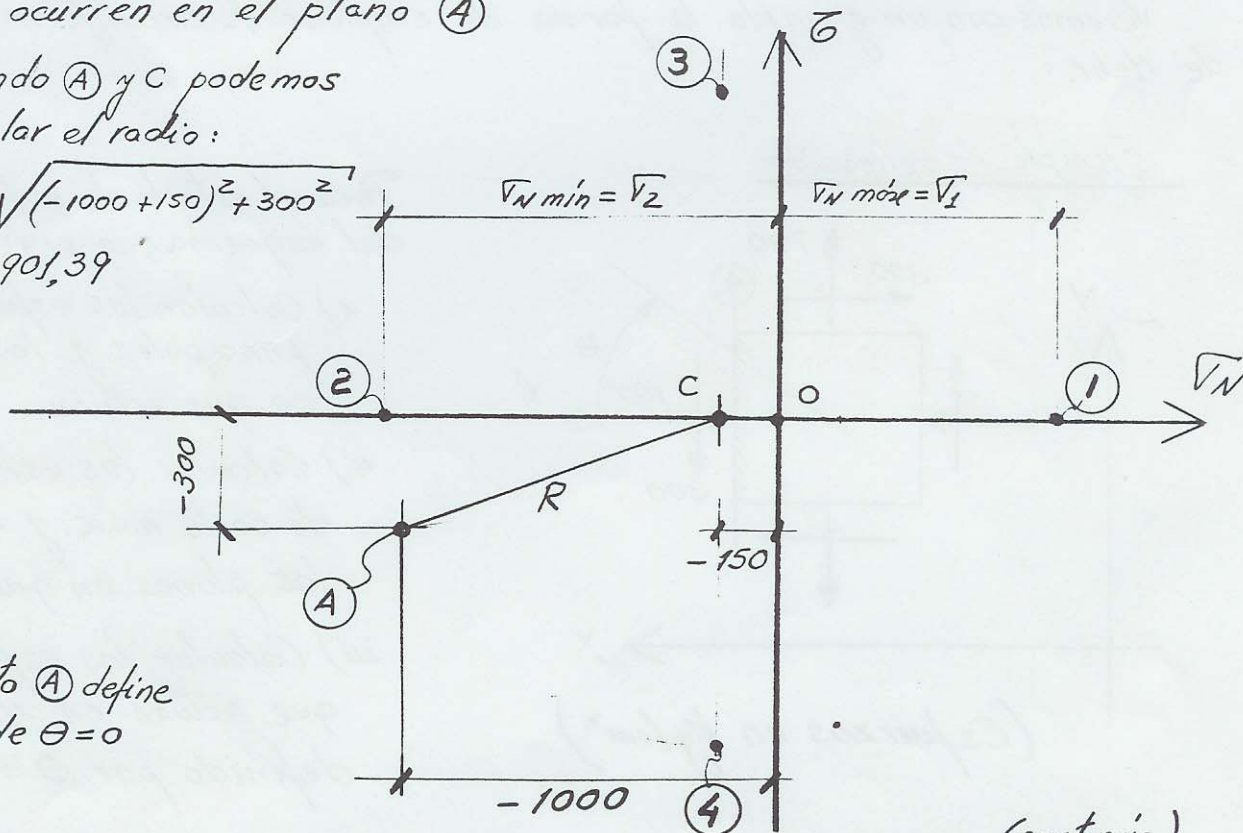
Para $\theta=0$ es $\sigma_N = \sigma_x$, $\tau = \tau_{xy}$ (esfuerzos que ocurren en el plano (A) véase esquema de la página anterior). Por lo tanto se conoce un punto de la circunferencia y no es necesario recordar la fórmula del radio.

Se dibuja en coordenadas σ_N, τ , el centro de la circunferencia y el punto de la circunferencia que corresponde a los esfuerzos que ocurren en el plano (A)

Uniendo (A) y C podemos calcular el radio:

$$R = \sqrt{(-1000 + 150)^2 + 300^2}$$

$$R = 901,39$$



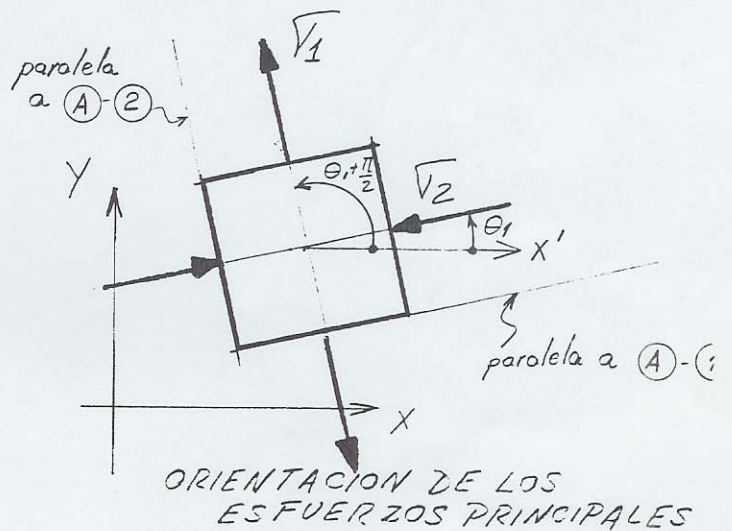
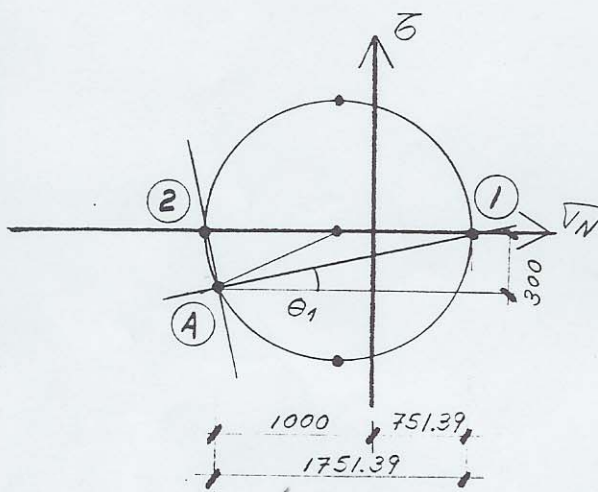
El punto (A) define el plano de $\theta=0$

(continúa)

De la figura de la página anterior, se tiene:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= +R - 150 = +901,39 - 150 = +751,39 \text{ (tracción)} \\ \sigma_2 &= -R - 150 = -901,39 - 150 = -1051,39 \text{ (compresión)} \\ \sigma_{\text{máx}} &= +R = +901,39 \\ \sigma_{\text{mín}} &= -R = -901,39 \end{aligned} \quad \text{(Todos los esfuerzos en kg/cm}^2\text{)}$$

Se demuestra que el plano en el que actúa σ_1 queda definido por la recta que une los puntos A y ①; mientras que σ_2 actúa en el plano definido por la recta que une los puntos A y ②



El ángulo θ_1 se calcula trigonómicamente como $\arctg \frac{300}{1751,39}$

$$\theta_1 = 9,72^\circ ; \quad \theta_1 + \frac{\pi}{2} = 99,72^\circ$$

(continúa)