AUXILIAR # 9 04/06/08 ①

Prof: Roger Bustamante

11.2.- El círculo de MOHR para un estado plano de esfuerzos

La teoría expuesta en 11.1 requiere el manejo de seis ecuaciones para estudiar los esfuerzos en un punto. A fines del siglo pasado, el ingeniero alemán Otto Mohr desarrolló un método gráfico que permite analizar rápidamente el estado de esfuerzos en un punto.

Representación gráfica de las ecuaciones ① y ②

Escribimos la ecuación ①:

$$\sigma_N - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

elevando al cuadrado, se tiene:

$$① \quad \left(\sigma_N - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\theta + 2\,\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \operatorname{sen}^2 2\theta$$

elevando al cuadrado la ecuación ②:

$$② \quad \tau^2 = \left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \operatorname{sen}^2 2\theta - 2\,\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\,\tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\theta$$

Sumando las dos ecuaciones miembro a miembro:

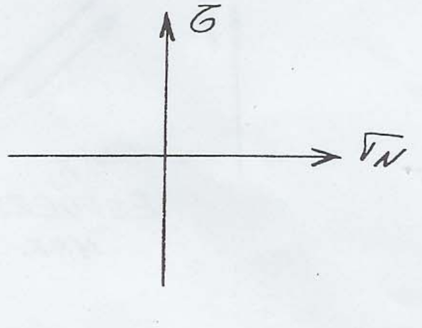
$$\boxed{\left(\sigma_N - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

haciendo $a = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$; $R^2 = \left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$

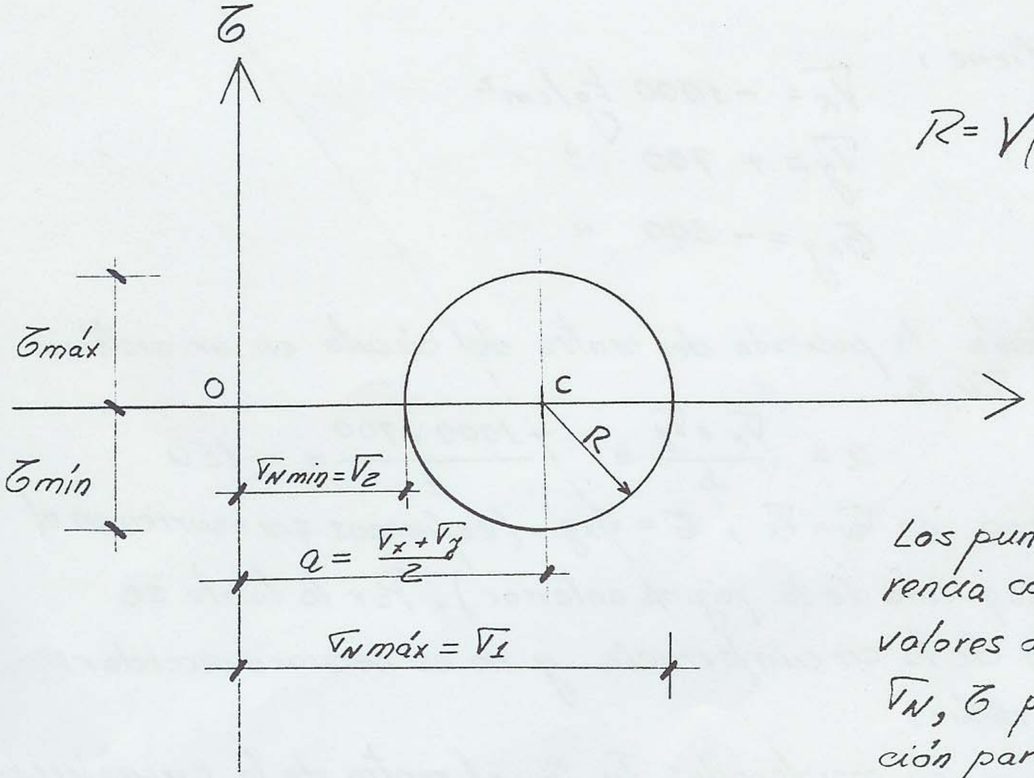
se tiene:

$$\boxed{(\sigma_N - a)^2 + \tau^2 = R^2}$$

; esta ecuación representa una familia de circunferencias en un sistema de coordenadas (σ_N, τ)



Las coordenadas del centro de las circunferencias son: $(a, 0)$. Es decir, el centro se sitúa sobre el eje σ_N.

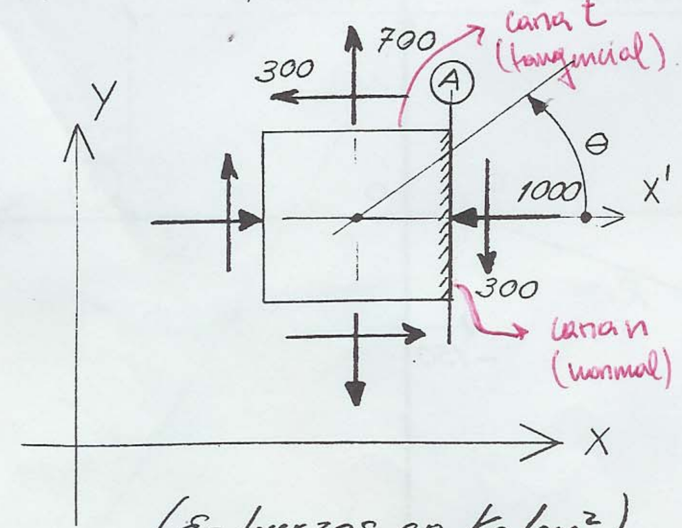


$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Los puntos sobre la circunferencia corresponden a los valores de los esfuerzos σ_N, τ para una orientación particular de un plano, definido por un ángulo θ

Veremos con un ejemplo la forma de emplear la circunferencia de Mohr.

Ejemplo de aplicación



(Esfuerzos en kg/cm^2)

Para el estado de esfuerzos del esquema, se pide:

i) Calcular los esfuerzos principales y los planos en que actúan.

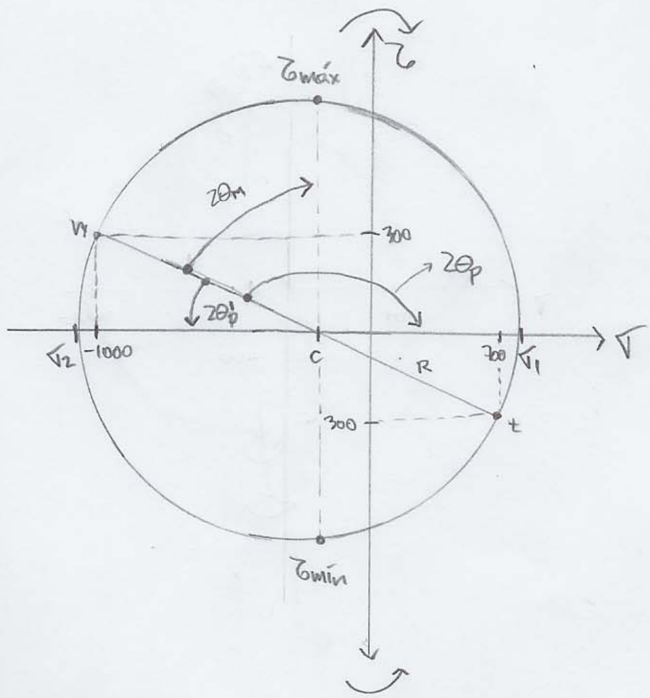
ii) Calcular los esfuerzos de corte máx. y mín y los planos en que actúan

iii) Calcular los esfuerzos que actúan en un plano definido por $\theta = 65°$

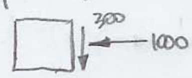
i) $\sigma_x = -1000$ [kg/cm²]

$\sigma_y = 700$ [kg/cm²]

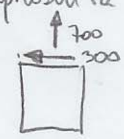
$\tau_{xy} = -300$ [kg/cm²].



- El pto n representa el estado de esfuerzos en la cara n



- El pto t representa el estado de esfuerzos en la cara t



- c ≡ centro del círculo

$$\Rightarrow \quad c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{-1000+700}{2} \Rightarrow \boxed{c = -150 \text{ [kg/cm}^2]}$$

- R ≡ radio del círculo

$$\Rightarrow \quad R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{-1000-700}{2}\right)^2 + (-300)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = 901{,}388 \text{ [kg/cm}^2]}$$

- σ_1 ≡ esfuerzo principal (máx).

$$\sigma_1 = c + R = -150 + 901{,}388 \Rightarrow \boxed{\sigma_1 = 751{,}388 \text{ [kg/cm}^2]}$$

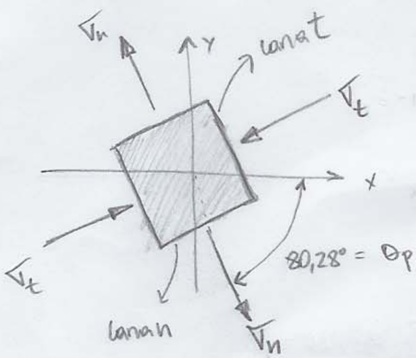
- σ_2 ≡ esfuerzo principal (mín)

$$\sigma_2 = c - R = -150 - 901{,}388 \Rightarrow \boxed{\sigma_2 = -1051{,}388 \text{ [kg/cm}^2]}$$

- θ_p ≡ ángulo de la normal al plano donde actua σ_1

$$2\theta_p + tg^{-1}\left(\frac{300}{1000-150}\right) = 180° \Rightarrow \boxed{\theta_p = 80{,}28°}$$

⇒



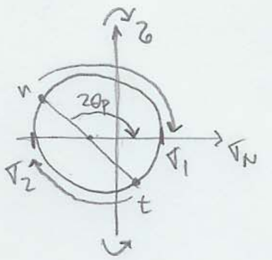
$\boxed{\sigma_t = 1051{,}388 \text{ [kg/cm}^2] \text{ compresión } (-)} \rightarrow = \sigma_2$

$\boxed{\sigma_n = 751{,}388 \text{ [kg/cm}^2] \text{ tracción } (+)} \rightarrow = \sigma_1$

- σ_n es el esfuerzo que actúa en la cara n del elemento, en este caso $\sigma_n = \sigma_1$

- σ_t es el esfuerzo que actúa en la cara t del elemento, en este caso $\sigma_t = \sigma_2$

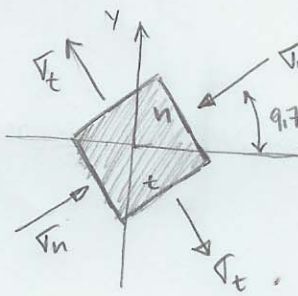
- ¿Cómo se sabe que σ_1 actúa en la cara n y que σ_2 actúa en la cara t?



Si elijo trabajar con $2\theta_p$, al girar la recta $\overline{nt}$ en $2\theta_p$ (↷) el punto n coincide con σ_1 y el pto t coincide con σ_2 $\Rightarrow$ cara n $\rightarrow \sigma_1$
cara t $\rightarrow \sigma_2$

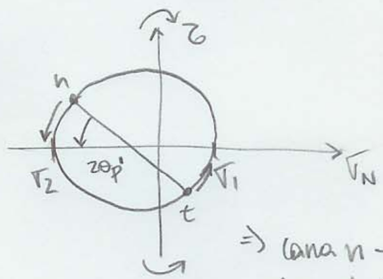
- Si hubiese elegido trabajar con $2\theta_p'$ se obtiene lo siguiente:

$\theta_p' = 9{,}72°$



$\boxed{\sigma_n = 1051{,}388\ [kg/cm^2] \text{ compresión } (-)} \rightarrow = \sigma_2$

$\boxed{\sigma_t = 751{,}388\ [kg/cm^2] \text{ tracción } (+)} \rightarrow = \sigma_1$



$\Rightarrow$ cara n $\rightarrow \sigma_2$
cara t $\rightarrow \sigma_1$

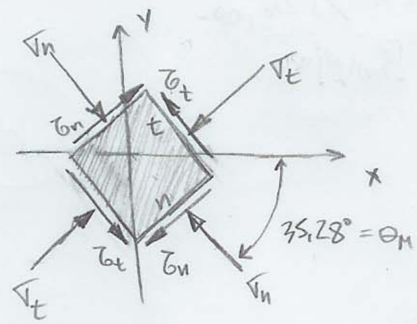
- queda lo mismo trabajar con θ_p o θ_p', la única diferencia es el sentido en que se rota el elemento diferencial.

ii) $\theta_M \equiv$ ángulo de la normal al plano donde actúa $\tau_{máx}$

$\tau_{máx} = R \Rightarrow \boxed{\tau_{máx} = 901,388 \,[kg/cm^2]}$

$\tau_{mín} = -R \Rightarrow \boxed{\tau_{mín} = -901,388 \,[kg/cm^2]}$

$2\theta_M = 2\theta_p - 90 \Rightarrow \boxed{\theta_M = 35,28°}$



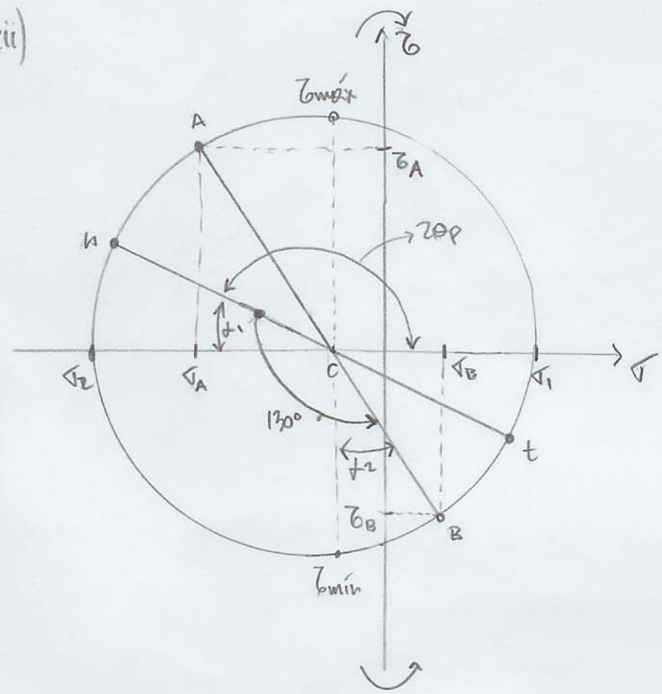
$\boxed{\sigma_t = 150 \,[kg/cm^2] \text{ compresión } (-)}$

$\boxed{\tau_t = 901,388 \,[kg/cm^2]}$

$\boxed{\sigma_n = 150 \,[kg/cm^2] \text{ compresión } (-)}$

$\boxed{\tau_n = 901,388 \,[kg/cm^2]}$

iii)



→ Un plano definido por $\theta = 65°$, en el círculo de MOHR queda definido por 2θ, osea, 130°.

→ estos 130° se miden a partir de la recta que une n con t en sentido contrario al reloj.

→ debemos encontrar las coordenadas de los ptos A y B

→ A: $2\theta_p + \alpha_1 = 180° \Rightarrow \boxed{\alpha_1 = 19,44°}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + 90 = 130° \Rightarrow \boxed{\alpha_2 = 20,56°}$

$\Rightarrow \sigma_A = C + R\,\text{sen}(\alpha_2) = -150 + 901,388 \cdot \text{sen}(20,56°)$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_A = 166,557 \,[kg/cm^2]}$

→ $\tau_A = R\cos(\alpha_2) = 901,388 \cos(20,56°)$

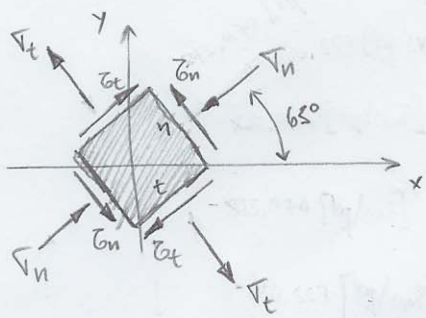
$\Rightarrow \boxed{\tau_A = 843,974 \,[kg/cm^2]}$

→ B:

$\sigma_B = C - R\cos(90 - 2\alpha) = -150 - 901{,}388\cos(90° - 20{,}56°)$

$\Rightarrow \boxed{\sigma_B = -466{,}557\ [kg/cm^2]}$

$\tau_B = R\sin(90 - 20{,}56°) \rightarrow \boxed{\tau_B = 843{,}974\ [kg/cm^2]}$



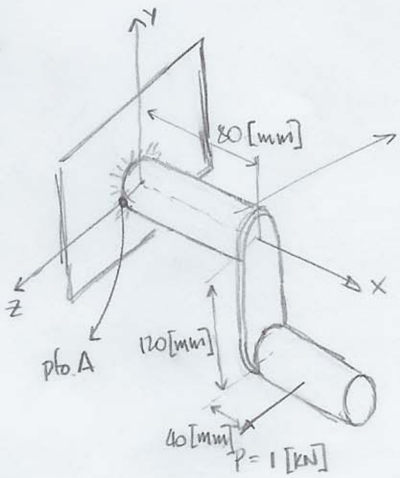
$\boxed{\sigma_n = 466{,}557\ [kg/cm^2]}$ compresión (−)

$\boxed{\tau_n = 843{,}974\ [kg/cm^2]}$

$\boxed{\sigma_t = 166{,}557\ [kg/cm^2]}$ tracción (+)

$\boxed{\tau_t = 843{,}974\ [kg/cm^2]}$

P2

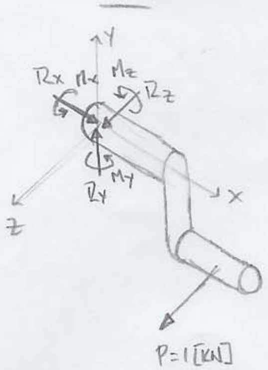


$d = 20\ [mm]$

$\sigma_0 = 300\ [MPa]$

- Verifique si el material falla o no
- Determinar F.S (factor de seguridad) en el pto A. según VON MISES.

DCL



REACCIONES

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow \boxed{R_y = 0}$

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow \boxed{R_x = 0}$

$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow R_z + P = 0$

$\Rightarrow \boxed{R_z = -1\ [KN]}$

→

- $\Sigma M_{x,y,z} = 0$

$\Rightarrow M_x\hat{i} + M_y\hat{j} + M_z\hat{k} + \vec{r}\times\vec{F} = \vec{0}$

- donde: $\vec{r} = \left[(80+40)\hat{i} - 120\hat{j}\right][mm]$ (distancia a la fza P)

$\vec{F} = 1000\hat{k}\ [N] = \vec{P}$

$\vec{r}\times\vec{F} = 120(\hat{i} - \hat{j}) \times 1000\hat{k} = 120(-\hat{j} - \hat{i})\ [KN\cdot mm]$

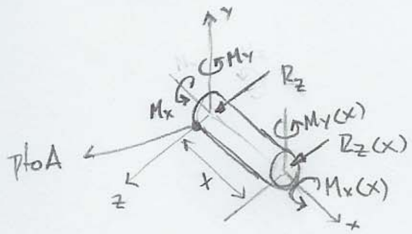
- esto nos dice que existe flexión según z y torsión según X.

$\Rightarrow \boxed{M_x = 120\ [KN\cdot mm]}$

$\boxed{M_y = 120\ [KN\cdot mm]}$

$\boxed{M_z = 0}$

- CORTES:



$$\Sigma F_z = 0 \Rightarrow R_z + R_z(x) = 0 \Rightarrow \boxed{R_z(x) = 1\,[kN]}$$

$$\Sigma M_x = 0 \Rightarrow M_x + M_x(x) = 0 \Rightarrow \boxed{M_x(x) = 120\,[kN\cdot mm]}$$

$$\Sigma M_y = 0 \Rightarrow M_y + M_y(x) + xR_z = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{M_y(x)\ (-120 + x)\,[kN\cdot mm]}$$

$x \in [0, 80)$

pto A $\rightarrow (x, y, z) = (0, 0, 10)$ [mm]

- $R_z(x)$ provocará esfuerzos de corte τ_{xz}
- $M_x(x)$ provocará esfuerzos de corte τ_{xz} y τ_{xy} (esfuerzos producidos por torsión)
- $M_y(x)$ provocará esfuerzos de compresión y tracción σ_x y σ_y (esfuerzos producidos por flexión).

- dependiendo donde se evalúen estos esfuerzos, algunos serán nulos y otros no, en particular, en el pto. A se tiene lo siguiente:

$R_z(x)$:

$$\tau_{xy} = \underbrace{\frac{64V(x)}{3\pi D^4}\left(\frac{D^2}{4} - y^2\right)}_{\text{sección circular}}$$

$\rightarrow$ esfuerzo de corte en un plano $\perp$ al eje x y en dirección $\hat{j}$ o $-\hat{j}$ producido por fzas. según $\hat{j}$ o $-\hat{j}$

$\rightarrow$ en este caso no hay fzas. según $\hat{j}$ o $-\hat{j}$ $\Rightarrow \boxed{\tau_{xy} = 0}$

$$\tau_{xz} = \underbrace{\frac{64V(x)}{3\pi D^4}\left(\frac{D^2}{4} - z^2\right)}_{\text{sección circular}}$$

$\rightarrow$ esfuerzo de corte en un plano $\perp$ al eje x y en dirección $\hat{k}$ o $-\hat{k}$ producido por fzas. según $\hat{k}$ o $-\hat{k}$

$\rightarrow$ en este caso si hay fzas. según $\hat{k}$ $(R_z(x)) \Rightarrow \tau_{xz} \neq 0$

$\rightarrow$ en particular, el pto A tiene coord. $(x, y, z) = (0, 0, 10)$ [mm]

$$\Rightarrow V(x=0) = R_z(x=0) = 1\,[kN]$$

$$\Rightarrow z = 10 = D/2 \Rightarrow \boxed{\tau_{xz} = 0}$$

$$J = \frac{\pi D^4}{32}$$

$M_x(x)$:

$$\tau = \frac{T \cdot r}{J}$$

- $\tau_{xy} = \tau\cos\theta$
- $\tau_{xz} = -\tau\,\text{sen}\,\theta$

- pto A:
  - $\theta = 0$
  - $r = D/2$
  - $T = M_x(x=0)$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{xz} = 0}$$

$$\Rightarrow \tau_{xy} = \frac{M_x(x=0)\cdot D/2}{J}$$

$$\tau_{xy} = \frac{120\,[kN\cdot mm]\cdot \frac{20}{2}\,[mm]}{\frac{\pi}{32}(20\,[mm])^4}$$

$$\boxed{\tau_{xy} = 76{,}394\,[MPa]}$$

$M_y(x)$:

$\sigma = -\dfrac{M \cdot y}{I_z}$ → en este caso en particular, dado que la flexión se produce según el eje Y, la fórmula del esfuerzo tiene la siguiente variación:

$$\sigma_x = -\frac{M_y(x) \cdot z}{I_y} \quad , \quad \text{pero } I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64}$$

→ pto. A: $z = 10\,[mm]$

$M_y(x=0) = 120\,[kN \cdot mm]$

$$\Rightarrow \sigma_x = -\frac{120\,[kN \cdot mm] \cdot 10\,[mm]}{\frac{\pi}{64}\left(20\,[mm]\right)^4} \Rightarrow \boxed{\sigma_x = -152{,}79\,[MPa]}$$

- Ahora que conocemos el estado de esfuerzos en el pto. A podemos calcular los esfuerzos principales:

pto. A → $\tau_{xy} = 76{,}394\,[MPa]$

$\sigma_x = -152{,}79\,[MPa]$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{-152{,}79 - 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-152{,}79 - 0}{2}\right)^2 + (76{,}394)^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \sigma_1 = 31{,}6431\,[MPa] \\ \hline \sigma_2 = -184{,}433\,[MPa] \end{array}}$$

$$\sigma_{VM} = \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cancel{\sigma_3^2}^{\,0} - \sigma_1\sigma_2 - \cancel{\sigma_1\sigma_3}^{\,0} - \cancel{\sigma_2\sigma_3}^{\,0}\right]^{1/2}$$

$$\sigma_{VM} = \left[(31{,}6431)^2 + (-184{,}433)^2 - (31{,}6431)(-184{,}433)\right]^{1/2}$$

$$\boxed{\sigma_{VM} = 202{,}121\,[MPa]}$$

- según el criterio de Von Mises, el esfuerzo máximo en el pto A es $\sigma_{VM} = 202,121$ [MPa], y dado que el material posee un esfuerzo de falla igual a $\sigma_0 = 300$ [MPa], el material no fallará.

- el factor de seguridad se calcula así:

$$\sigma \leq \sigma_0 / F.S. \quad \Rightarrow \quad F.S = \sigma_0 / \sigma_{VM} = \frac{300 \text{ [MPa]}}{202,121 \text{ [MPa]}} \quad \Rightarrow \boxed{F.S. = 1,48}$$