fcfm Ingeniería Mecánica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

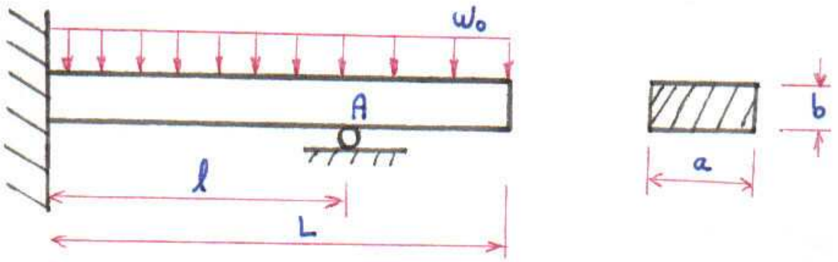
Control 3. Resistencia de Materiales ME 46A-2.

11/06/2008

Profesor: Roger Bustamante

1) Use el teorema de Castigliano para calcular las reacciones en el punto A. Considere energía por flexión y corte. La viga es de sección rectangular con lados $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. (30 puntos)

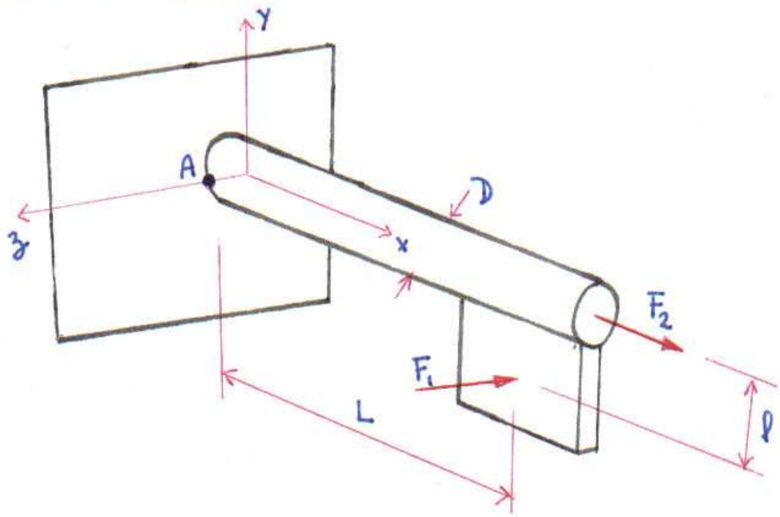
Datos: $w_o = 1000$ N/m $E = 200$ GPa $G = 83$ GPa $L = 3$ m $l = 2$ m
$a = 20$ cm $b = 10$ cm



2) Considere la viga empotrada de la figura.
   a) Calcule las fuerzas internas y momento interno en la sección del cilindro que pasa por A. (5 puntos)
   b) ¿Qué tipo de esfuerzos de generan en el punto A? justifique. (8 puntos)
   c) Determine el estado de esfuerzos en el punto A. (7 puntos)
   d) Calcule los esfuerzos principales (normal y de corte) en el punto A. (5 puntos)
   e) Determine si el material fallará o no en el punto A (use el criterio de Von Mises). Si no falla, calcule el factor de seguridad con el que se esta trabajando. (5 puntos)

   (La placa plana en donde se aplica F_1 esta pegada a la barra y es rígida)

Datos: $F_1 = 10^4$ N $F_2 = 8000$ N $D = 8$ cm $L = 1$ m $l = 20$ cm
$E = 200$ GPa $\sigma_o = 250$ MPa



Formulario

Torsión $T = \frac{\theta G J}{L}$ Sección circular $J = \frac{\pi D^4}{32}$ $\tau = \frac{Tr}{J}$

Flexión

Esfuerzo $\sigma_x = -\frac{M(x)}{I_z} y$

Momento inercia de área sección rectangular $I_z = \frac{ab^3}{12}$, Sección circular $I_z = \frac{\pi}{4} r^4$

Corte viga sección arbitraria

$$\tau = \frac{V}{It} \int_y^c \xi \, dA$$

Energía de deformación

Flexión $U_f = \int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 \, dx$

Corte (sección rectangular) $U_c = \frac{3}{5} \int_0^L \frac{1}{GA} V(x)^2 \, dx$ A: área de la sección

Esfuerzos normal y de corte máximos

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

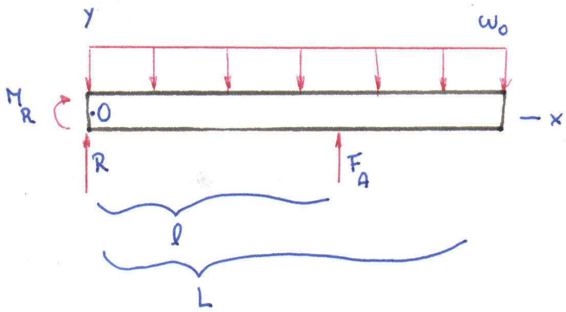
Esfuerzo de Von Mises

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}$$

Pauta Control 3

11/06/2008 (1)

(1)

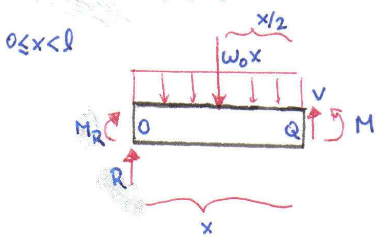


$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R = w_0 L - F_A \qquad (1)$$

$$\sum_O M_z = 0 \Rightarrow M_R = F_A \ell - w_0 \frac{L^2}{2} \qquad (1)$$

Calculo de V(x), M(x)

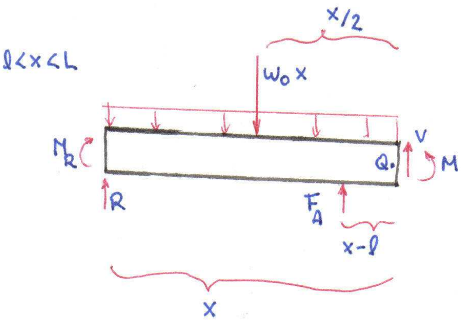
$0 \leq x < \ell$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow \quad V = w_0 x - R$$
$$= w_0 x - w_0 L + F_A$$
$$= w_0 (x - L) + F_A \qquad (2)$$

$$\sum_Q M_z = 0 \Rightarrow \quad M = Rx - w_0 \frac{x^2}{2} + M_R$$
$$= (w_0 L - F_A) x - w_0 \frac{x^2}{2} + F_A \ell - w_0 \frac{L^2}{2}$$
$$= w_0 L x + F_A (\ell - x) - \frac{w_0}{2}(x^2 + L^2) \qquad (2)$$

$\ell < x < L$



$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V = w_0 x - R - F_A$$
$$= w_0 (x - L) \qquad (2)$$

$$\sum_Q M_z = 0 \Rightarrow M = Rx - w_0 \frac{x^2}{2} + M_R + F_A (x - \ell)$$
$$= (w_0 L - F_A) x - w_0 \frac{x^2}{2} + F_A \ell - w_0 \frac{L^2}{2} + F_A (x - \ell)$$
$$= w_0 \left(Lx - \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2} \right) \qquad (2)$$

para $x = L$ $\quad M = 0$ ✓

Se calcula ahora el desplazamiento en el punto A (que es cero)

→ energía por flexión $\quad U_f = \int_0^L \frac{1}{2EI} M(x)^2 dx$

$$\Rightarrow \quad \delta_f = \frac{dU_f}{dF_A} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \frac{dM(x)}{dF_A} dx \qquad (2)$$

desplazamiento por flexión en punto A

2

pero $M(x) = \begin{cases} w_0 L x + F_A(\ell - x) - \frac{w_0}{2}(x^2 + L^2) & 0<x<\ell \\ w_0\left(Lx - \frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right) & \ell<x<L \end{cases}$

2

$\Downarrow$

$$\frac{dM}{dF_A} = \begin{cases} \ell - x & 0<x<\ell \\ 0 & \ell<x<L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dU_f}{dF_A} = \frac{1}{EI}\int_0^\ell \left[w_0 L x + F_A(\ell - x) - \frac{w_0}{2}(x^2+L^2)\right](\ell - x)\,dx$$

3

$$= \frac{1}{EI}\left[-\frac{w_0}{6}L^3\ell + \frac{w_0 L^4}{24} + F_A\left(\frac{L^3}{3} - \ell L^2 + \ell^2 L\right)\right]$$

$I = \frac{ab^3}{12} \Rightarrow I = \frac{0,2 \times 0,1^3}{12} \simeq 1,66667 \times 10^{-5}\,m^4$ 1

$\Rightarrow \frac{dU_f}{dF_A} = -1,687496 \times 10^{-3} + 8,99998 \times 10^{-7} F_A = \delta_f$ 2

$\rightarrow$ Energía por corte (sección rectangular)

$$U_c = \frac{3}{5}\int_0^L \frac{V^2}{GA}\,dx \Rightarrow \delta_c = \frac{dU_c}{dF_A} = \frac{6}{5}\frac{1}{GA}\int_0^L V\frac{\partial V}{\partial F_A}\,dx$$

2

pero $V(x) = \begin{cases} w_0(x-L) + F_A & 0<x<\ell \\ w_0(x-L) & \ell<x<L \end{cases}$

2

$\Downarrow$

$$\frac{dV}{dF_A} = \begin{cases} 1 & 0<x<\ell \\ 0 & \ell<x<L \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dU_c}{dF_A} = \frac{6}{5GA}\int_0^\ell w_0(x-L) + F_A\,dx = \frac{6}{5GA}\left[\frac{w_0}{2}(\ell^2 - 2\ell L) + F_A \ell\right]$$ 2

$$= -2,891566 \times 10^{-6} + 1,445783 \times 10^{-9} F_A = \delta_c$$

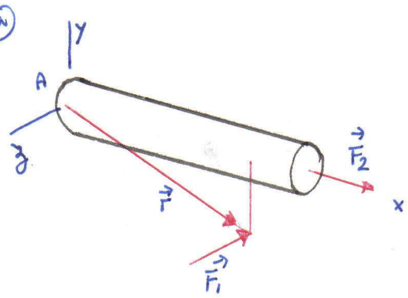
Desplazamiento total en A $\quad \delta_T = \delta_f + \delta_c = -1,6903876 \times 10^{-3} + 9,014438 \times 10^{-7} F_A$ 2

pero en A el desplazamiento es cero, de modo que $\delta_T = 0$

$\Rightarrow F_A = 1875,2\ N$ 2

P2

② ⓐ



Se traslada fuerza $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ a zona en A ③

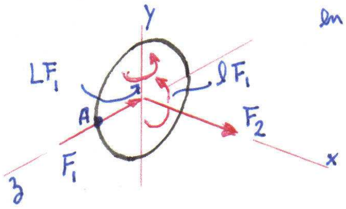
$\vec{F}_2$ se traslada en la misma línea de acción

$\vec{F}_1$ al trasladarse genera un momento $\vec{M}_A$

$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}_1$

$\vec{F}_1 = -F_1 \hat{k}$ $\quad \vec{r} = L\hat{\imath} - l\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{M}_A = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ L & -l & 0 \\ 0 & 0 & -F_1 \end{vmatrix} = lF_1\hat{\imath} + LF_1\hat{\jmath}$ ②

de modo que en Ⓐ se tiene



en A tenemos

- Fuerza de tracción $F_2\hat{\imath}$ ①
- Fuerza de corte $-F_1\hat{k}$ ①
- momento $\vec{M}_A = lF_1\hat{\imath} + LF_1\hat{\jmath}$ ①

ⓑ Tipos de esfuerzos

- Fuerza de tracción genera un esfuerzo normal σ_x en A ②
- La fuerza de corte $-F_1\hat{k}$ genera un esfuerzo de corte, pero este esfuerzo de corte es cero en A ②
- La componente $\hat{\imath}$ de $\vec{M}_A$ que es lF_1 genera un esfuerzo de corte por torsión en A ②
- La componente $\hat{\jmath}$ de $\vec{M}_A$ que es LF_1 genera un esfuerzo de tracción en A σ_x ②

ⓒ · Tracción por $F_2\hat{\imath}$ $\quad \sigma_x = \dfrac{F_2}{Area} = \dfrac{F_2}{\frac{\pi D^2}{4}} = \dfrac{4F_2}{\pi D^2}$ ①

· Corte por torsión lF_1 $\quad \tau = \dfrac{T\, r_{max}}{J}$ $\quad J = \dfrac{\pi D^4}{32}$ $\quad r_{max} = D/2$

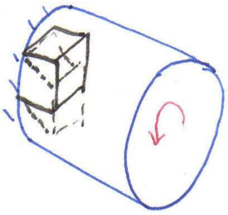
$T = lF_1$

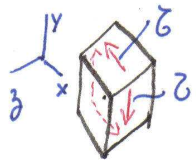
falta la orientación

4

$$\tau = \frac{l F_1 \frac{D}{2}}{\left(\frac{\pi D^4}{32}\right)} = \frac{16\, l F_1}{\pi D^3}$$ 2

orientación





de modo que τ es τ_{xy} con signo negativo

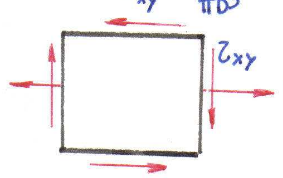
• Tracción por flexión $\sigma_x = \frac{M\, y_{max}}{I_z}$ (es positivo) $I_z = \frac{\pi}{4}\left(\frac{D}{2}\right)^4$ $M = LF_1$

$y_{max} = D/2$ 2

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{L F_1 \, D/2}{\frac{\pi}{2^6} D^4} = \frac{2^5 L F_1}{\pi D^3} = \frac{32 L F_1}{\pi D^3}$$

Estado de esfuerzos

$\tau_{xy} = \frac{16\, l F_1}{\pi D^3}$ 2



$$\sigma_x = \frac{4F_2}{\pi D^2} + \frac{32 L F_1}{\pi D^3}$$

ⓓ $\sigma_x = 200{,}535$ MPa $\quad \tau_{xy} = 19{,}894$ MPa

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{2} + \tau_{xy}^2}$$ 3

$\Downarrow$

$\sigma_1 = 202{,}4896$ MPa $\quad \sigma_2 = -1{,}9546$ MPa

$$\tau = \sqrt{\frac{\sigma_x^2}{4} + \tau_{xy}^2} = 102{,}222 \text{ MPa}$$ 2

ⓔ $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = 203{,}4739$ MPa $< 250 \Rightarrow$ no falla 2

$$\sigma_{VM} \leq \frac{\sigma_0}{F.S.} \Rightarrow \underbrace{F.S.}_{\text{factor de seguridad}} = \frac{\sigma_0}{\sigma_{VM}} \simeq 1{,}229$$ 3