# COMPUTACIONAL 3

## METODO DE DIFERENCIAS FINITAS

CI71D MODELACION NUMERICA EN INGENIERIA HIDRAULICA Y AMBIENTAL
Prof. Y. Niño, Prof. Aux. D. Ojeda — Sem. Primavera 2008

1. Considere la ecuación de advección no lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

donde $x$ y $t$ denotan distancia y tiempo, respectivamente. Se desea resolver los problemas de valor inicial dados por las condiciones iniciales ($t = 0$) siguientes:

Caso 1:

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \leq 0.5\,m \\ 0 & ; \quad 0.5\,m \leq x \end{cases}$$

Caso 2:

$$u(x,0) = \begin{cases} 2\,x & ; \quad 0 \leq x \leq 0.5\,m \\ 2\,(1-x) & ; \quad 0.5\,m \leq x \leq 1\,m \end{cases}$$

Resuelva numéricamente el problema mediante diferencias finitas usando los siguientes esquemas numéricos revisados en clase: Lax, Lax-Wendroff, MacCormak, Upwind.

Especifique las condiciones de estabilidad de cada método y en base a ellas determine la discretización temporal, $\Delta t$, a utilizar en el cálculo. Se sugiere usar una discretización espacial, $\Delta x$, no superior a 0.1 m. Compare y discuta los resultados obtenidos con los distintos métodos. Cuál es la principal diferencia entre este problema no lineal y el lineal resuelto en el computacional previo, en términos de la física del problema? Cómo se refleja esto en el problema numérico?

2. Considere el problema de advección-difusión dado por la ecuación siguiente:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\,\frac{\partial C}{\partial x} = D_x\,\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

donde $C$ denota concentración, $x$ denota distancia longitudinal, $t$ denota el tiempo, $u$ es la velocidad media del flujo en la dirección $x$ y $D_x$ es el coeficiente de difusión en la dirección $x$, sujeta a las condiciones iniciales y de borde:

Caso 1:

$$C(x,0) = 0$$

$$C(0,t) = C_0 \quad , \quad C(\infty,t) = 0$$

Caso 2:

$$C(x,0) = C_0 \quad , \quad -5m < x < 5m$$

$$C(x,0) = 0 \quad , \quad Fuera\,del\,intervalo$$

$$C(-\infty,t) = 0 \quad , \quad C(\infty,t) = 0$$

(a) Encuentre una solución analítica para el régimen permanente del problema planteado, en el Caso 1, cuando $u < 0$.

(b) Para los valores $u = 0.1$ m/s y $u = -0.1$ m/s resuelva numéricamente el problema de advección-difusión planteado en ambos casos mediante el esquema FTCS. Considere: $C_0 = 0.5$, $D_x = 0.5$ $m^2$/s y un dominio espacial finito, de largos $L = 100$ m y 200 m. Considere las restricciones de estabilidad de este esquema y en base a ellas determine la discretización temporal, $\Delta t$, a utilizar en el cálculo. Se sugiere usar una discretizacón espacial $\Delta x = 1$ m. Compare el resultado numérico en régimen permanente (obtenido para un tiempo de cálculo suficientemente alto) con la solución analítica encontrada en a) para el Caso 1 y $u = -0.1$ m/s. Cómo difiere la solución numérica de la analítica en función del largo $L$ del dominio numérico?

(c) Repita el cálculo de la parte b) para una variación periódica de la velocidad:

$$u(t) = u_0 \, \cos(\frac{2\pi}{T}\, t)$$

donde $u_0$ es la amplitud de la variación de velocidad y $T$ es el periodo de oscilación. Realice el cálculo para los datos: $u_0 = 0.1$ m/s y $T = 12$ hrs.