TEORIA DE 2º ORDEN:

INTRODUCCION:

Una de las hipótesis del análisis estructural de sistemas elásticos lineales es que las deformaciones son finitas, pero suficientemente pequeñas en magnitud para poder establecer el equilibrio de la estructura en la configuración no deformada sin incurrir en errores significativos. Esta suposición es generalmente válida para el estado de servicio de estructuras y, por tanto, el análisis elástico de 1er orden es adecuado para determinar la respuesta de la estructura para este nivel de solicitaciones.

Sin embargo, cuando se debe determinar la capacidad de la estructura, ya sea en términos de resistencia (nivel de diseño) o de deformación (niveles de diseño y último), necesariamente tenemos que considerar los efectos de las solicitaciones actuando en la configuración deformada de la estructura. Estos efectos se pueden dividir en dos (ver ejemplo clase):

a) Aumento en los esfuerzos internos de los elementos
b) Aumento en las deformaciones de la estructura

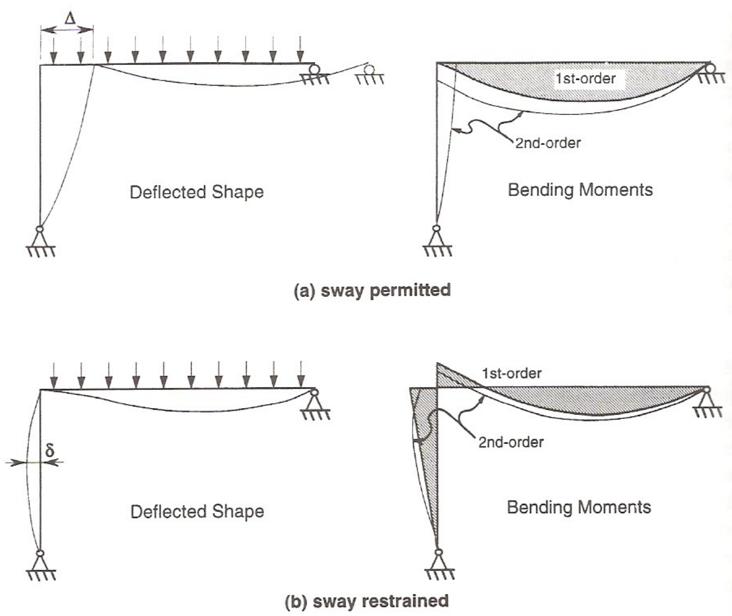


Fig. 16.2 Second-order P–Δ and P–δ moments.

Con respecto al aumento de los esfuerzos internos, normalmente se distingue entre dos tipos. Para ilustrar estos efectos vamos a volver al ejemplo:

1. El primer aumento proviene del momento adicional causado por las cargas axiales en los extremos del elemento actuando a través de la posición desplazada de estos. Es por eso que este efecto es normalmente llamado P-Δ.

2. El segundo efecto tiene que ver con el momento adicional generado en el elemento por el esfuerzo axial actuando a través de la deformación transversal del elemento δ. De ahí el nombre comúnmente asociado a este efecto (P-δ).

Cuando se habla en general del efecto de segundo orden sobre los esfuerzos se utiliza normalmente el término “efecto P-delta”. Utilizando nuevamente el ejemplo, vamos a hacer algunas observaciones:

- Los efectos de segundo orden afectan los esfuerzos tanto en columnas como en vigas y conexiones.
- Los momentos de segundo orden no tienen necesariamente la misma distribución que los de primer orden. Por lo tanto, el uso de factores de amplificación para considerar estos efectos debe hacerse con mucho cuidado de las hipótesis consideradas cuando se derivaron estos factores.
- Todos los elementos estructurales están sujetos a ambos tipos de P-delta. En muchos casos un efecto dominará sobre el otro, pero la distinción entre ambos no siempre es tan clara como en el ejemplo considerado.
- Superposición ya no es aplicable. Para considerar los efectos de segundo orden en el análisis es necesario aplicar todas las acciones al mismo tiempo, mayoradas por sus respectivos factores si se está utilizando un método de diseño con factores de carga.

Otra aplicación muy importante del análisis de 2º orden es la determinación de la estabilidad de una estructura sometida a cargas laterales y verticales simultáneamente. Al analizar el límite de estabilidad de una estructura como la de la figura, un análisis de 1er orden diría que la carga crítica que causa inestabilidad de la estructura es la misma para los casos con y sin carga lateral. Sin embargo, al considerar los efectos de 2º orden la carga crítica disminuye.

NIVELES DE ANALISIS:

De acuerdo con lo visto hasta ahora, y considerando las diversas fuentes de no linealidad en una estructura, podemos distinguir los siguientes niveles de análisis:

1. Análisis elástico de primer orden: el más comúnmente utilizado para diseño hoy en día. No considera ninguna de las fuentes de no linealidad en estructuras. Matricialmente lo podemos expresar como la solución al problema

   $$[K_e]\{\Delta\}=\{P\}$$

   donde K_e es la matriz de rigidez elástica.

2. Análisis elástico de 2º orden: considera los efectos sobre esfuerzos y deformaciones de la estructura provenientes de considerar el equilibrio de ésta en la posición deformada. No incluye los efectos de la no linealidad del material, pero permite determinar la estabilidad elástica de estructuras sometidas simultáneamente a cargas verticales (gravitacionales) y laterales (viento, sismo, etc.). El problema debe plantearse en forma incremental, debido a que el estado actual de la estructura depende de lo que haya pasado anteriormente. Entonces, tenemos que resolver el problema

   $$[K_e+K_g]\{d\,\Delta\}=\{dP\}$$

   donde K_e y K_g son las matrices de rigidez elástica y geométrica de la estructura, respectivamente, y $d\Delta$ y dP son los incrementos de desplazamiento y de carga.

3. Análisis inelástico de 1er orden: considera sólo los efectos de la no linealidad del material. No permite evaluar la estabilidad de la estructura, pero para problemas donde los desplazamientos no son suficientemente significativos entrega una buena aproximación a la capacidad de la estructura. Similarmente al caso anterior, es necesario plantear el problema en términos incrementales de la siguiente forma

   $$[K_e+K_m]\{d\,\Delta\}=\{dP\}$$

   donde K_e y K_m son las matrices de rigidez elástica y de reducción plástica de la estructura, respectivamente, y $d\Delta$ y dP son los incrementos de desplazamiento y de carga.

4. Análisis inelástico de 2º orden: considera tanto la no linealidad del material como la geométrica. En términos generales, provee la representación más adecuada del comportamiento real de la estructura ante cargas. El problema a resolver se puede representar como

   $$[K_e+K_g+K_m]\{d\,\Delta\}=\{dP\}$$

El problema de la no linealidad del material ha sido cubierto en las clases anteriores, por lo que en lo que viene nos vamos a concentrar en la no linealidad asociada a los efectos geométricos. La extensión a no linealidad del material es simple.

ESTRATEGIAS DE SOLUCION

TERMINOLOGIA:

$\underline{v}$: vector de deformaciones del elemento (coordenadas locales).

$\underline{r}$: vector de desplazamientos de la estructura.

$\underline{S}$: vector de esfuerzos del elemento.

$\underline{R}$: vector de fuerzas nodales en la estructura.

k: matriz de rigidez del elemento.

K: matriz de rigidez de la estructura.

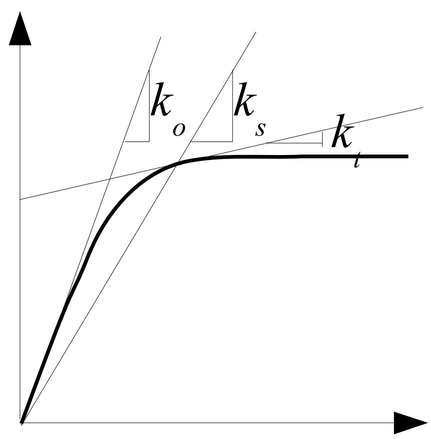
a: matriz de transferencia.

RELACIONES:

	Lineal	No lineal
Cinemáticas	$\underline{v}=\underline{a}\cdot\underline{r}$	$\underline{v}=f_v(\underline{r})$
Acción-deformación	$\underline{S}=\underline{k}\cdot\underline{v}+\underline{S_o}$ $(\underline{S}=\underline{k}\cdot(\underline{v}-\underline{v_o}))$	$\underline{S}=f_s(\underline{v})+\underline{S_o}$
Equilibrio	$\underline{R}=\underline{a}^T\cdot\underline{S}$ $(\underline{a}^T\cdot\underline{k}\cdot\underline{a})\cdot\underline{r}=\underline{R}-\underline{a}^T\cdot\underline{S_o}$	$\underline{R}=\underline{a}^T_{deform}\cdot\underline{S}$ $\underline{a}^T_{deform}\left[f_s(f_v(\underline{r}))\right]=\underline{R}-\underline{a}^T_{deform}\cdot\underline{S_o}$

ALGORITMO DE SOLUCION CON METODO ITERATIVO:

1. Inicializar vector de carga $\underline{\boldsymbol{R}}^U = \underline{\boldsymbol{R}}^E - \underline{\boldsymbol{R}}^I$
2. Linearización del problema. Formar matrices de rigidez de los elementos $\underline{\boldsymbol{k}}$ ($\underline{\boldsymbol{k}_o}$, $\underline{\boldsymbol{k}_t}$ o $\underline{\boldsymbol{k}_s}$)



3. Ensamblar matriz de rigidez de la estructura $\underline{\boldsymbol{K}}$ ($\underline{\boldsymbol{K}_o}$, $\underline{\boldsymbol{K}_t}$ o $\underline{\boldsymbol{K}_s}$)
4. Resolver para el incremento del desplazamiento $\underline{\boldsymbol{K}}\cdot\boldsymbol{\Delta}\underline{\boldsymbol{r}} = \underline{\boldsymbol{R}}^U$
5. Determinar los desplazamientos totales $\underline{\boldsymbol{r}} = \underline{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\Delta}\underline{\boldsymbol{r}}$
6. Calcular la deformación de los elementos $\underline{\boldsymbol{v}} = \underline{\boldsymbol{a}}\cdot\underline{\boldsymbol{r}}$
7. Calcular esfuerzos en los elementos $\underline{\boldsymbol{S}}$ (determinación de estado) $\underline{S} = f_s(\underline{v}) + \underline{S_o}$. En el caso no lineal requiere iteración.
8. Calcular las fuerzas nodales $\underline{\boldsymbol{R}}^I = \boldsymbol{\Sigma}\,\underline{\boldsymbol{a}}^T\cdot\underline{\boldsymbol{S}}$
9. Determinar desequilibrio de fuerzas $\underline{\boldsymbol{R}}^U = \underline{\boldsymbol{R}}^E - \underline{\boldsymbol{R}}^I$
10. Revisar convergencia. Si $\underline{\boldsymbol{R}}^U \leq tol$ continuar con el siguiente incremento de carga $\underline{\boldsymbol{R}}^E$. Si no volver al paso 2 con el nuevo $\underline{\boldsymbol{R}}^U$.