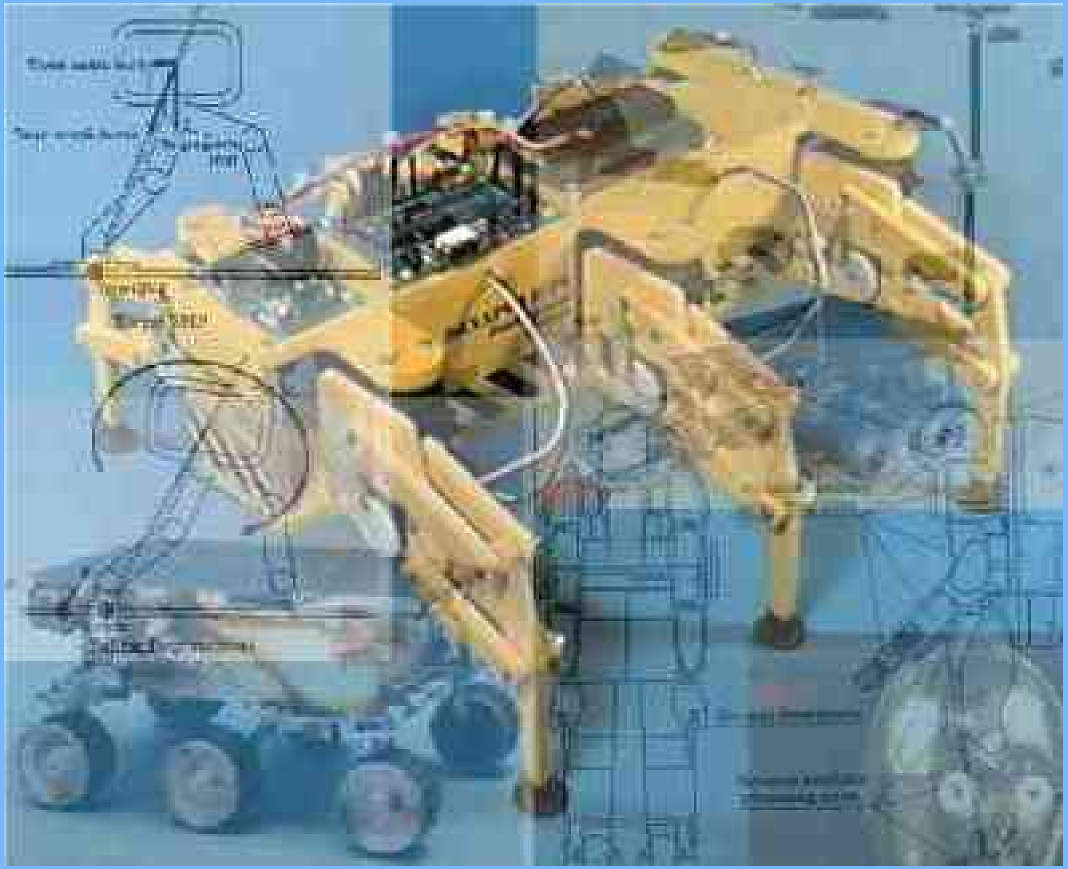
Robots con Orugas y Robots Articulados



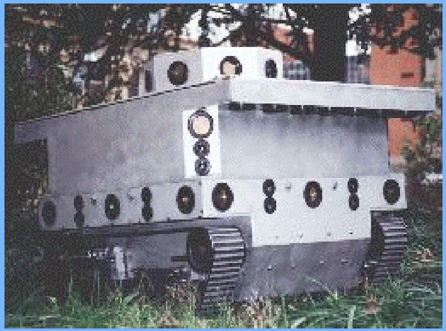
Robots con orugas

Ventajas:

- Robustos frente a variaciones en el terreno.
- Algunos son capaces de subir escaleras.

Desventajas:

- Requieren de mucha energía para cambiar de dirección, alto torque (se basan en el principio de resbalamiento).
- Es difícil derivar la pose del robot a partir de modelos cinemáticos => odometría es en general más inexacta que con ruedas .



Solución:

- Medir el desplazamiento mediante un mecanismo externo, como por ejemplo una rueda loca.

Robots con orugas

Aplicaciones:

- Rescate ☺
- Combate de incendios ☺
- Exploración ☺
- Robot War ☹




Ejemplo de robot con orugas

Andros F6-A, REMOTEC

Robots articulados

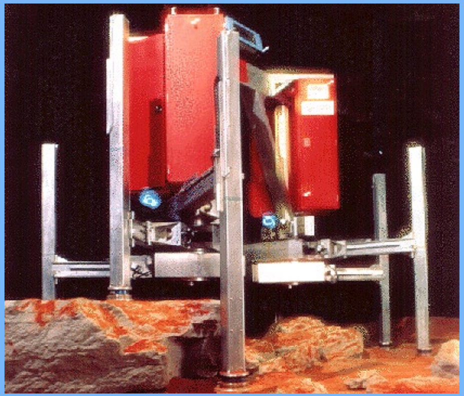
Motivaciones:

Práctica:

- Existen terrenos que no se pueden atravesar con ruedas u orugas.

Científicas:

- Existe la necesidad de investigar el funcionamiento de organismos simples como los artrópodos.



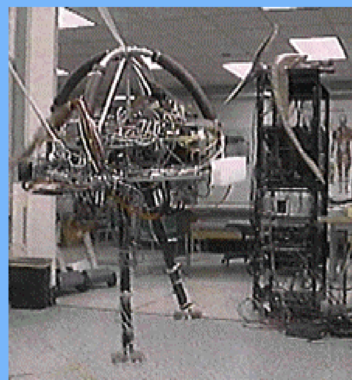
Ambler, CMU 1992

Robots articulados

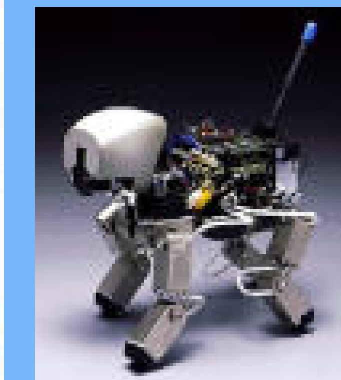
El problema principal de utilizar piernas es la estabilidad (estática o dinámica) lo que implica una mayor complejidad en su control lo que implica también un mayor consumo energía ya que tiene que oponerse a la fuerza de gravedad.

Robots articulados

¿Cuantas Patas?

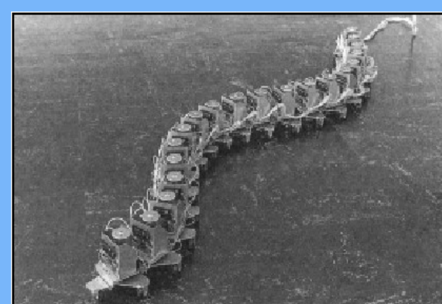


Asimo, Honda



Primer AIBO

Genghis, CMU 1992



AIBO

Primer ASIMO

Mínimo 4 para asegurar estabilidad estática

Mínimo 1 para estabilidad dinámica

Caminata en robots articulados

Caminata (gait): patrón de desplazamiento de las piernas realizado al caminar.

Tipo de caminata: trade-off velocidad, gasto de energía y estabilidad.

Primeros estudios: E. Muybridge (1899; fotógrafo). Produce secuencia de fotografias de caminatas humanas y de caballos (demuestra que caballos al correr levantan todas sus piernas, no estáticamente estable).

Mucha de la literatura técnica en la materia se basa en estudios biológicos.

Caminata en robots articulados

Caminata se descompone en los **pasos** sincronizados que realiza cada pierna.

Se definen: **Fase de transferencia**: la pierna no está en contacto con el piso. **Fase de soporte**: pierna en contacto con el piso. **Período** (cycle time): tiempo requerido para completar un paso. **Factor de utilidad** (duty factor): fracción del período en que una pierna está en la fase de soporte.

Las **caminatas no periódicas** son usadas por sistemas biológicos en terrenos no planos. Las **caminatas periódicas** se utilizan por los sistemas biológicos en terrenos planos y también por la mayoría de los robots articulados.

Muybridge define 8 caminatas periódicas para cuadrúpedos.

Caminatas periódicas para cuadrúpedos

1. The *walk* (including crawl as a special case). One leg moves at a time. *Crawl is the only statically stable gait.*
2. The *amble*. Faster than a walk. Support alternates between one and two feet.
3. The *trot*. Support is provided by diagonal pairs of feet.
4. The *rack* (or *pace*). Support is provided by lateral pairs of feet rather than by diagonal pairs of feet in the trot.
5. The *canter*. Unlike earlier gaits, the canter can not be broken into a left and right part.
6. The *gallop*. The gallop is the fastest of the quadrupedal gaits. Central to the gallop is a ballistic phase in which the quadruped jumps forwards from its hind feet to catch itself with its forward ones. Two different gallops are identified in biological quadrupeds:
   (a) The transverse gallop. The pattern of foot falls moves transversely across the body.
   (b) The rotatory gallop. The pattern of foot falls moves cyclically around the body.
7. The *ricochet*. Motion as a sequence of bounds, hops, jumps, or skips. Typically found in the rapid motion of the Australian marsupials: the kangaroo and the wallaby.

Caminata en robots articulados

Hildebrand (1967) desarrolla **diagramas de caminatas**, que muestran temporalmente como cada pierna **soporta** al robot. Se asigna una linea a cada pierna, y las zonas oscuras corresponde a la fase de soporte.

Piernas 1 y 2 son las frontales. Números impares corresponde al lado izquierdo del robot.

Caminatas periódicas para cuadrúpedos

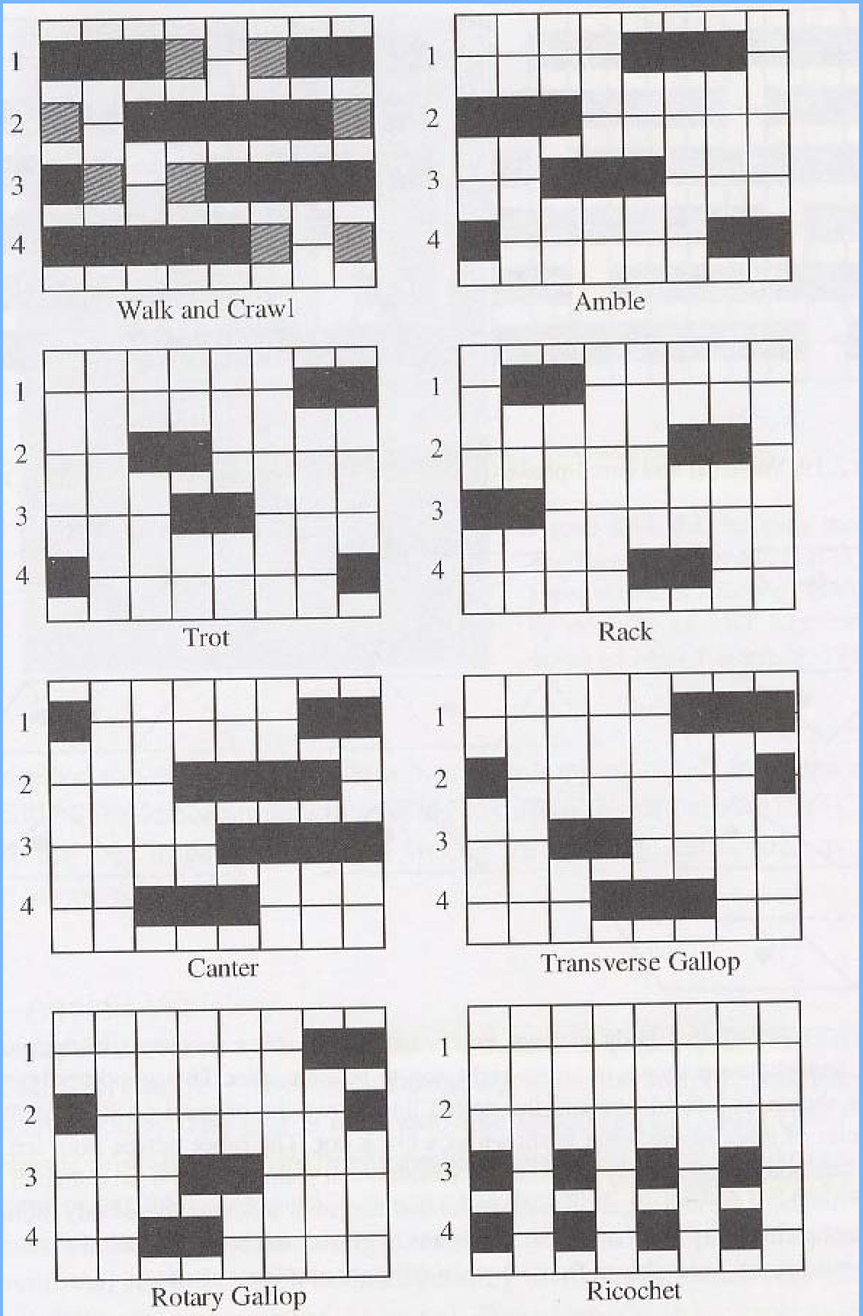


Figure 2.18. Eight quadrapedal gaits (after [255]). Each plot depicts the ground-contact phase for each leg as a function of time. The crawl gait is a slow walk gait and includes the black- and gray-colored regions. Note that only the crawl gait is statically stable. Legs 1 and 2 are the "front" legs, whereas legs 3 and 4 are the "rear." Legs 1 and 3 are on the left side of the body, whereas legs 2 and 4 are on the right.

Caminata para robots articulados

Las caminatas diseñadas para robots, con estabilidad estática, son más sencillas que las que encontramos en la naturaleza.

Song & Waldron (1989) definen: **equal-phase gait** (margen de estabilidad óptimo) y **equal-wave gait** (dsitribuye uniformemente los períodos en que las piernas están en el suelo).

Para que el robot avance no solo hay que elegir cuando levantar las piernas, sino que también se debe mover el cuerpo hacia delante. Dos estrategias: **minimizar el número de movimientos del cuerpo** y mover el centro de masa **maximizando el margen de estabilidad** del robot.

Caminata de un robot hexápodo 12DOF

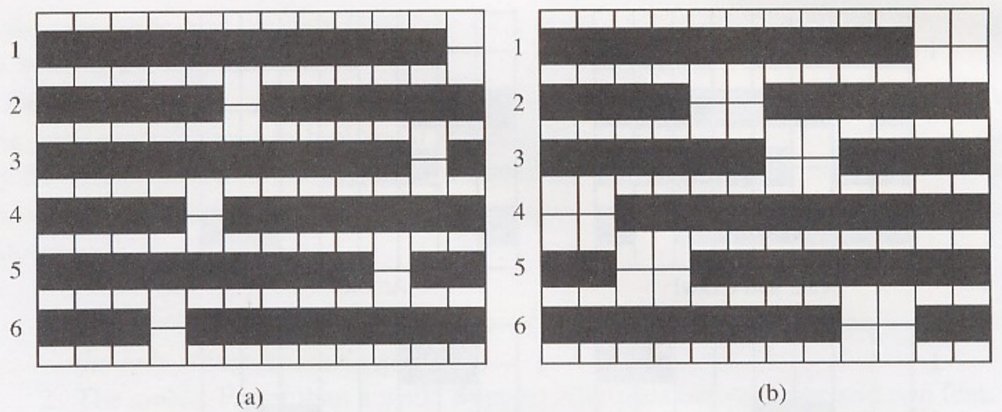


Figure 2.19. Wave (a) and equal-phase (b) gaits for a six-legged robot. (After [337].)

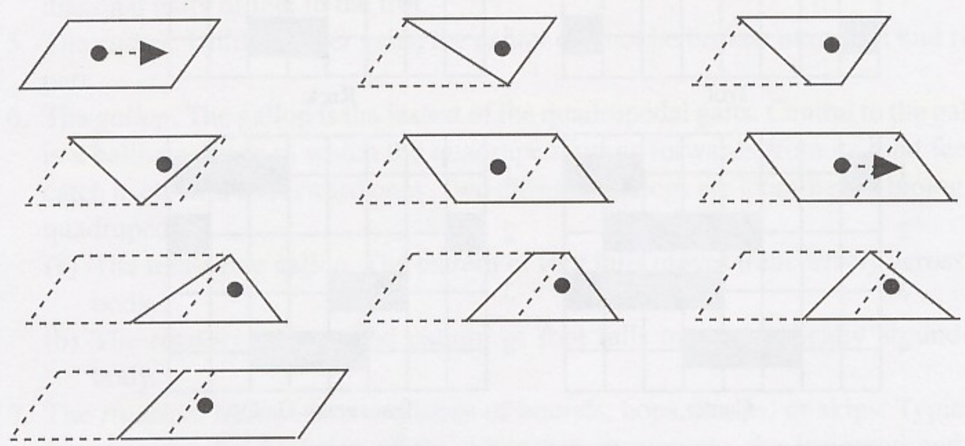


Figure 2.20. Scheduling body motions in a crawling gait. (Ten snapshots of the motion are shown. Snapshots are shown in left-to-right, top-to-bottom order. The support polygon of the robot is shown as a solid line and the dotted line shows the original position of the robot. The center of mass of the robot is shown as a black dot. The robot moves from left to right almost one body length. Body motions are scheduled at frames 1 and 6 even though the legs move throughout the entire gait. It is essential that the robot schedule these body motions. For example, had the body motion to shift the center of gravity not been scheduled at frame 1, the robot would be very unstable at frame 2 when the right rear leg was raised.

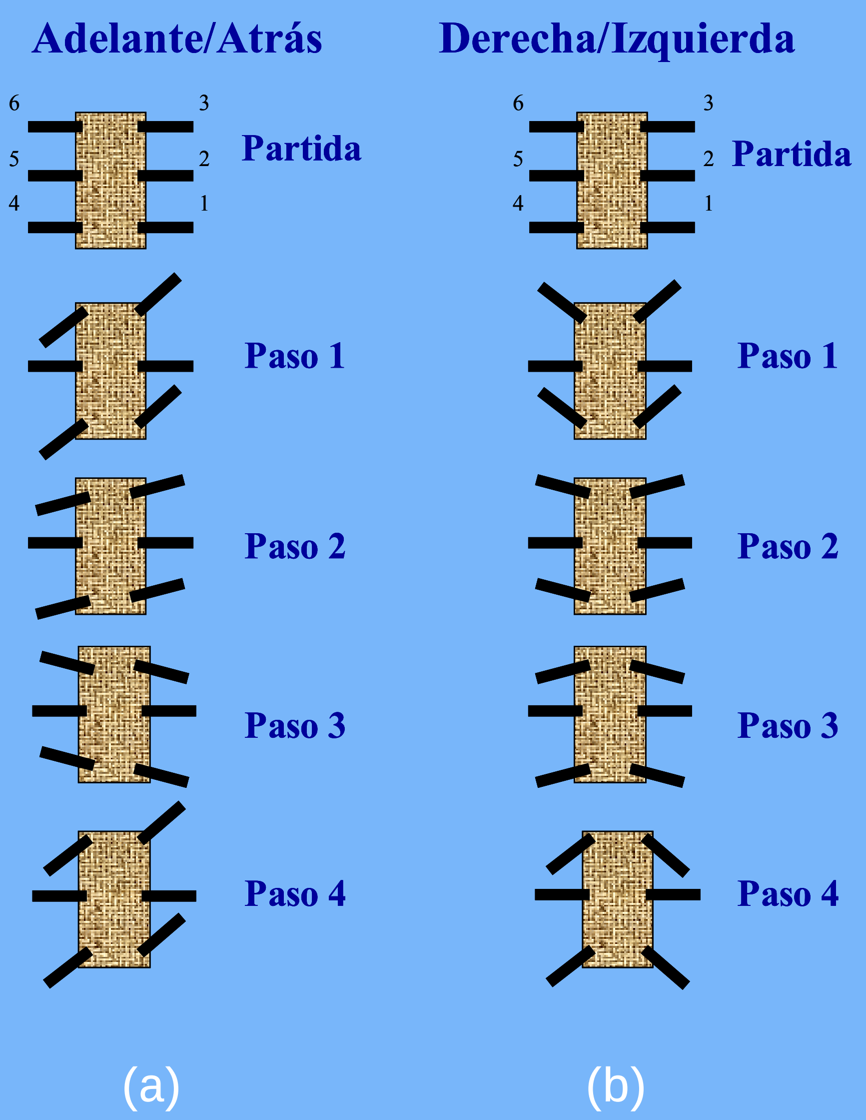
Caminata de un Hexápodo con 3DOF

Caminata: 1 motor se utiliza para levantar las piernas 1, 3, 5 o 2, 4, 6 y los otros 2 para el movimiento horizontal de 1 – 3 o 4 – 6.

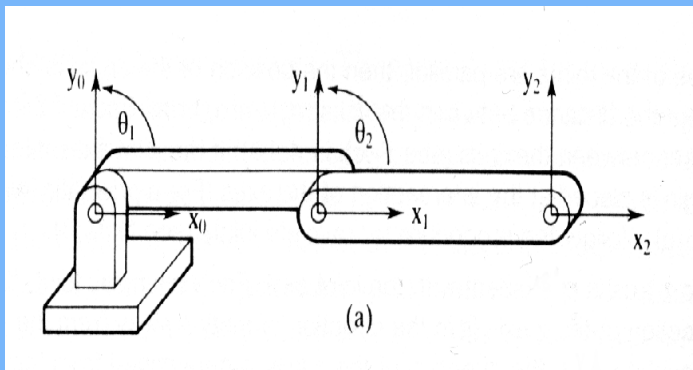
Partida: levantar 2 ó 5, para luego moverse hacia delante (atrás) o derecha (izquierda).

Caminar Adelante: secuencia Paso 1 al Paso 4. **Caminar atrás**: secuencia Paso 4 al Paso 1.

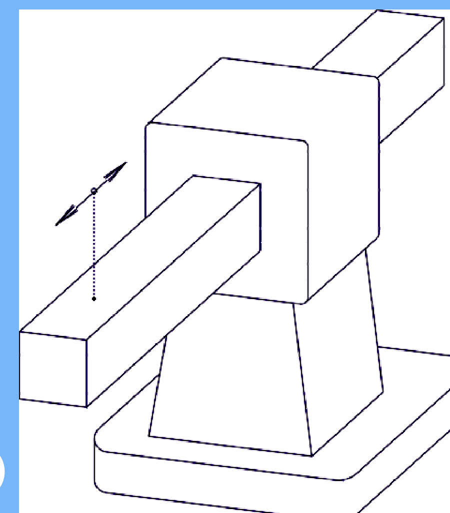
Derecha: Secuencia (b) 1 –4.
Izquierda: Secuencia (b) 4 –1.



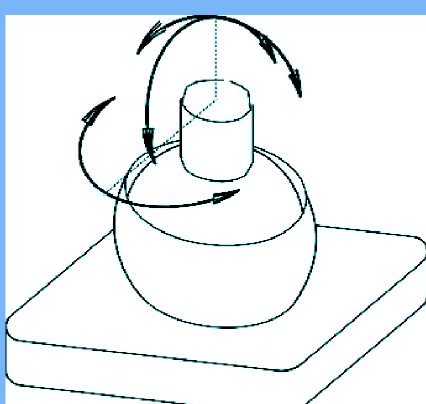
Articulaciones básicas



Articulación rótula
1 DOF (Variable - Y)



Articulación deslizante
1 DOF (linear) (Variables - d)



Articulación esférica
3 DOF (Variables - Y_1, Y_2, Y_3)

Ejemplos de Articulaciones para una pierna

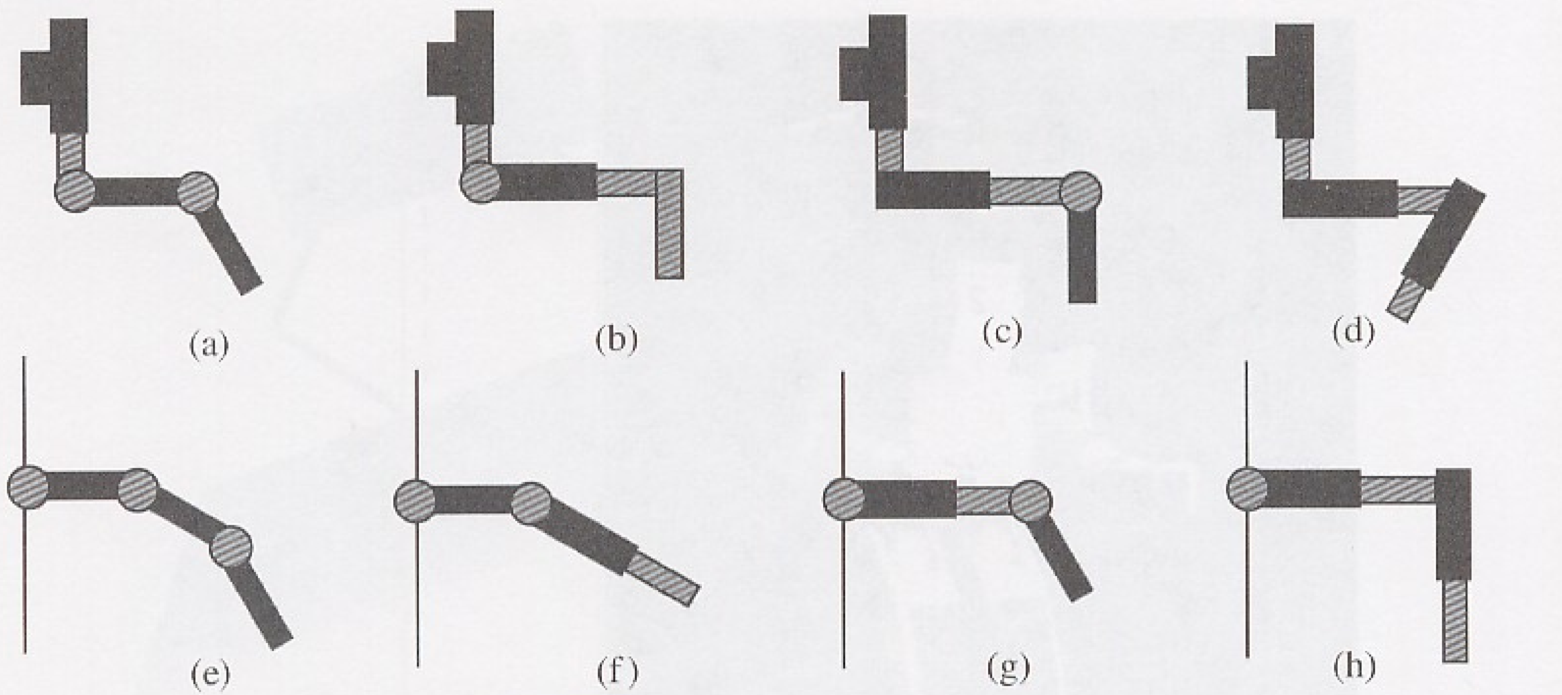


Figure 2.15. Sample limb designs. Eight three-jointed limbs based on simple prismatic and rotational joints. Rotational joints are indicated by small circles, whereas prismatic joints are indicated by two intensity-level rectangles. (a) through (d) utilize prismatic joints at the contact with the robot body, whereas (e) through (h) utilize rotational joints. The final prismatic joint of (d) is directed out of the page.

Control de robots articulados

Alto Nivel: Decidir tipo de caminata a realizar (caminar hacia delante, hacia la derecha, correr hacia delante, caminar hacia un punto y llegar con un ángulo dado, etc.). **Definir tipo de caminata.**

Nivel Intermedio: Características de la caminata, es decir, la secuencia de pasos a seguir por cada articulación (fase, período, factor de utilidad, etc.). Se define las posiciones que debe alcanzar cada efector en función del tiempo. **Definir movimiento de los efectores**.

Bajo Nivel: Determinar qué ordenes dar exactamente a los a cada actuador, de tal forma que los efectores realicen el movimiento definido. Es decir, resolver el problema de cinemática inversa. **Definir ordenes a los actuadores.**

Robots articulados

Cinemática directa (de los ángulos a la posición)

Dados: Largos y configuración de cada segmento.
El ángulo de cada unión.

Determinar: La posición de cada punto (esp. efector).
(i.e. las coordenadas (x, y, z))

Cinemática inversa (de la posición a los ángulos)

Dados : Largos y configuración de cada segmento
La Posición de algún punto del robot

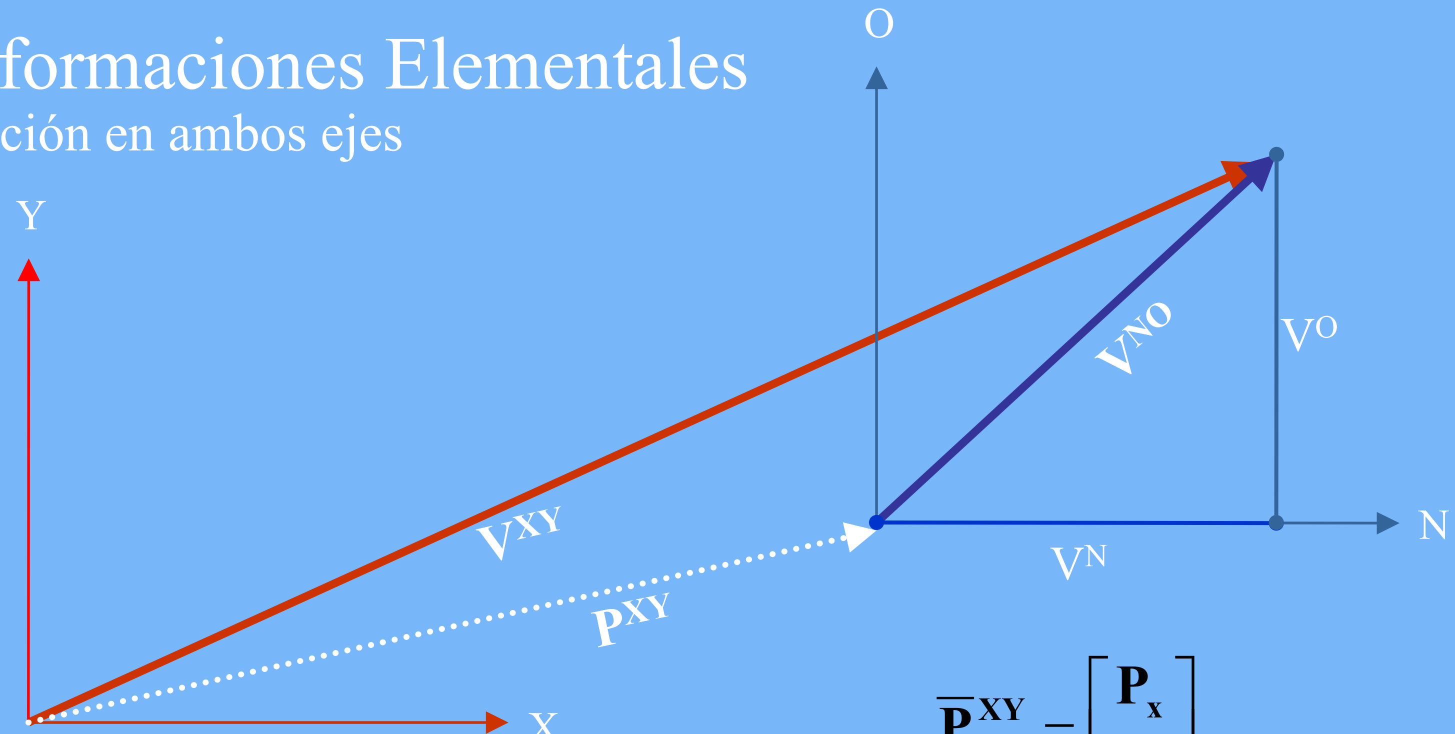
Determinar : Los ángulos de cada unión necesarios para
Determinar aquella posición.
A partir de estos se puede determinar las
órdens a dar a los actuadores.

Cinemática Directa e Inversa de Articulaciones

Robots articulados

Transformaciones Elementales

Translación en ambos ejes



$$\overline{\mathbf{P}}^{XY} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_Y \end{bmatrix}$$

Escribiendo $\overline{\mathbf{V}}^{XY}$ en términos de $\overline{\mathbf{V}}^{NO}$

$$\overline{\mathbf{V}}^{XY} = \overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{V}}^{NO} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_X + \mathbf{V}^N \\ \mathbf{P}_Y + \mathbf{V}^O \end{bmatrix}$$

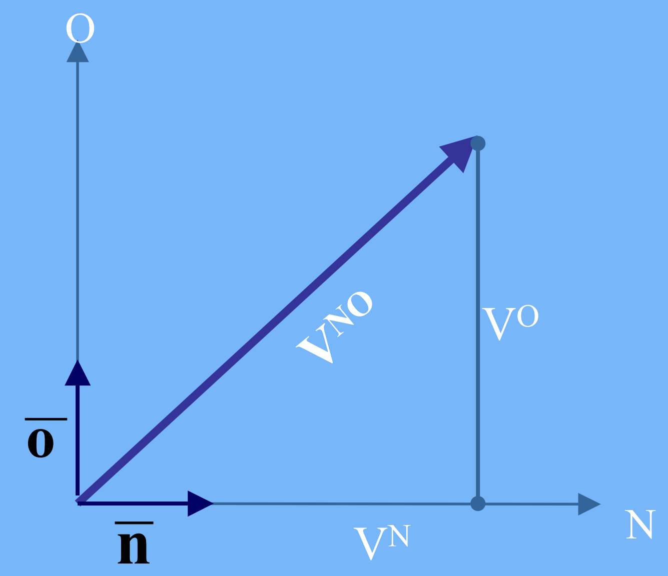
Robots articulados

Empleando vectores bases

$\overline{\mathbf{n}}$ Vector unitario eje N

$\overline{\mathbf{o}}$ Vector unitario eje O

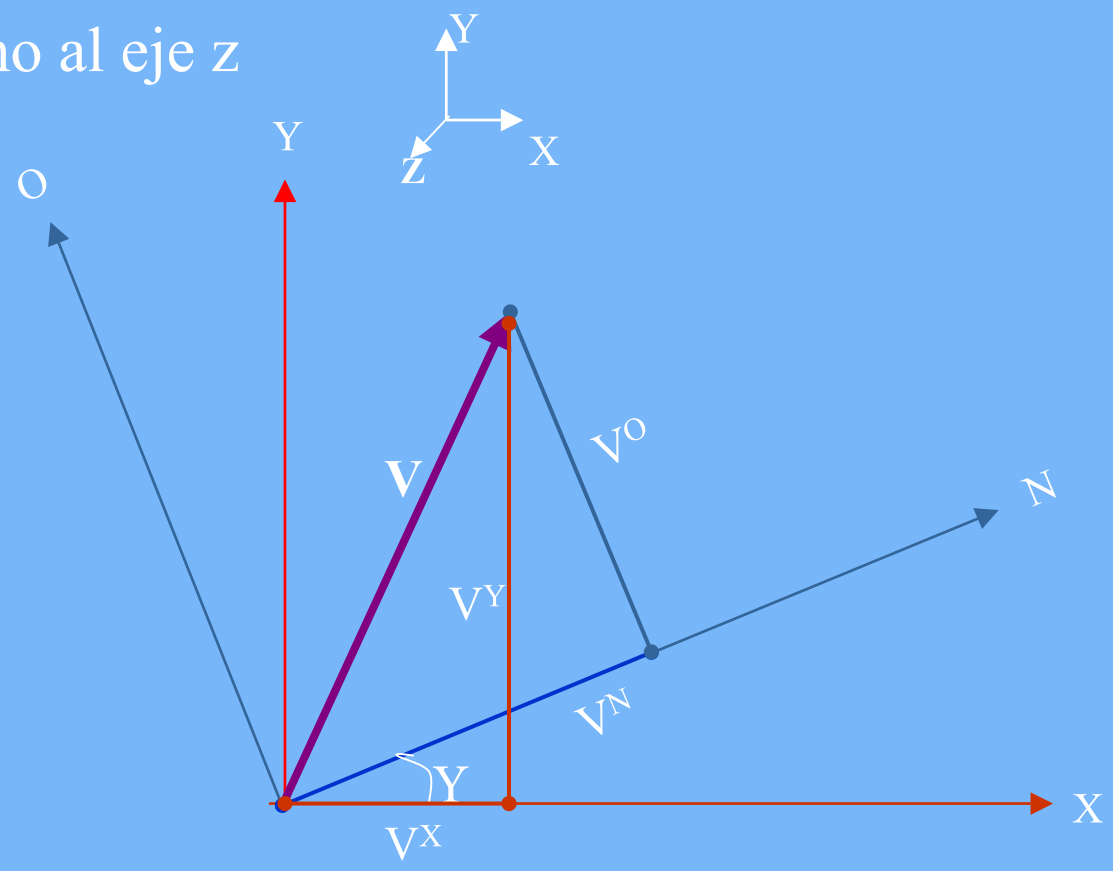
$\left\|\mathbf{V}^{\mathbf{NO}}\right\|$ Norma vector V^{NO}



$$\overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{NO}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{\mathbf{N}} \\ \mathbf{V}^{\mathbf{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\|\mathbf{V}^{\mathbf{NO}}\right\| \mathbf{cos\theta} \\ \left\|\mathbf{V}^{\mathbf{NO}}\right\| \mathbf{sin\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\|\mathbf{V}^{\mathbf{NO}}\right\| \mathbf{cos\theta} \\ \left\|\mathbf{V}^{\mathbf{NO}}\right\| \mathbf{cos(90-\theta)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{NO}} \bullet \overline{\mathbf{n}} \\ \overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{NO}} \bullet \overline{\mathbf{o}} \end{bmatrix}$$

Robots articulados

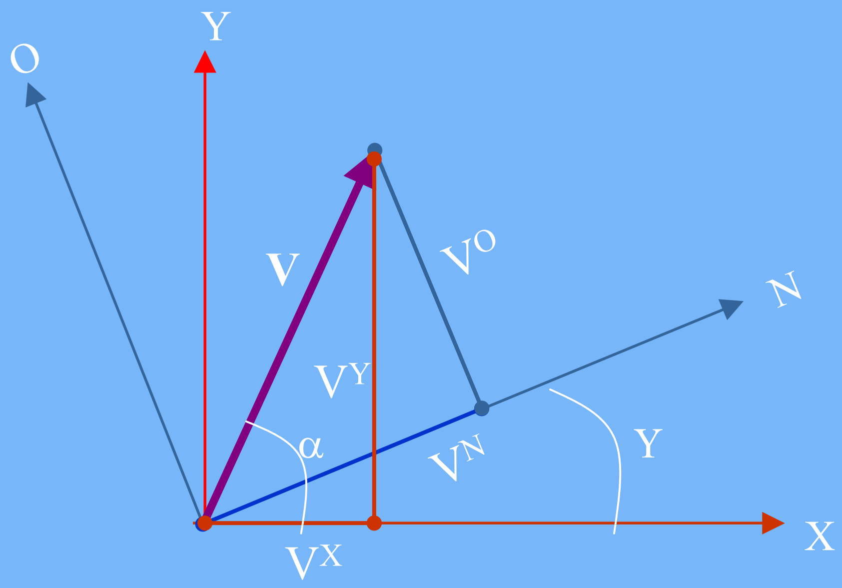
Rotación entorno al eje z



Y = Angulo entre sistema XY y sistema NO

$$\overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{XY}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{\mathbf{X}} \\ \mathbf{V}^{\mathbf{Y}} \end{bmatrix} \qquad \overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{NO}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{\mathbf{N}} \\ \mathbf{V}^{\mathbf{O}} \end{bmatrix}$$

Robots articulados



$\overline{\mathbf{x}}$ Vector unitario eje X

$$\left\|\overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{XY}}\right\| = \left\|\overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{NO}}\right\|$$

$$\mathbf{V}^{\mathbf{X}} = \left\|\overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{XY}}\right\| \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha} = \left\|\overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{NO}}\right\| \mathbf{cos}\ \boldsymbol{\alpha} = \overline{\mathbf{V}}^{\mathbf{NO}} \bullet \overline{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{V}^{\mathbf{X}} = (\mathbf{V}^{\mathbf{N}} * \overline{\mathbf{n}} + \mathbf{V}^{\mathbf{O}} * \overline{\mathbf{o}}) \bullet \overline{\mathbf{x}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^{\mathbf{X}} &= \mathbf{V}^{\mathbf{N}} (\overline{\mathbf{x}} \bullet \overline{\mathbf{n}}) + \mathbf{V}^{\mathbf{O}} (\overline{\mathbf{x}} \bullet \overline{\mathbf{o}}) \\ &= \mathbf{V}^{\mathbf{N}} (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta}) + \mathbf{V}^{\mathbf{O}} (\mathbf{cos}(\boldsymbol{\theta} + \mathbf{90})) \\ &= \mathbf{V}^{\mathbf{N}} (\mathbf{cos}\ \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{V}^{\mathbf{O}} (\mathbf{sin}\ \boldsymbol{\theta}) \end{aligned}$$

Robots articulados

Análogamente….

$$V^{Y} = \left\| \overline{V}^{NO} \right\| \sin\alpha = \left\| \overline{V}^{NO} \right\| \cos(90 - \alpha) = \overline{V}^{NO} \bullet \overline{y}$$

$$V^{Y} = (V^{N} * \overline{n} + V^{O} * \overline{o}) \bullet \overline{y}$$

$$V^{Y} = V^{N}(\overline{y} \bullet \overline{n}) + V^{O}(\overline{y} \bullet \overline{o})$$

$$= V^{N}(\cos(90 - \theta)) + V^{O}(\cos\theta)$$

$$= V^{N}(\sin\theta) + V^{O}(\cos\theta)$$

Entonces….

$$V^{X} = V^{N}(\cos\theta) - V^{O}(\sin\theta)$$

$$V^{Y} = V^{N}(\sin\theta) + V^{O}(\cos\theta)$$

$$\overline{V}^{XY} = \begin{bmatrix} V^{X} \\ V^{Y} \end{bmatrix}$$

Matricialmente

$$\overline{V}^{XY} = \begin{bmatrix} V^{X} \\ V^{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^{N} \\ V^{O} \end{bmatrix}$$

Matriz de rotación en torno a z

Robots articulados

Matrices de rotación en 3D

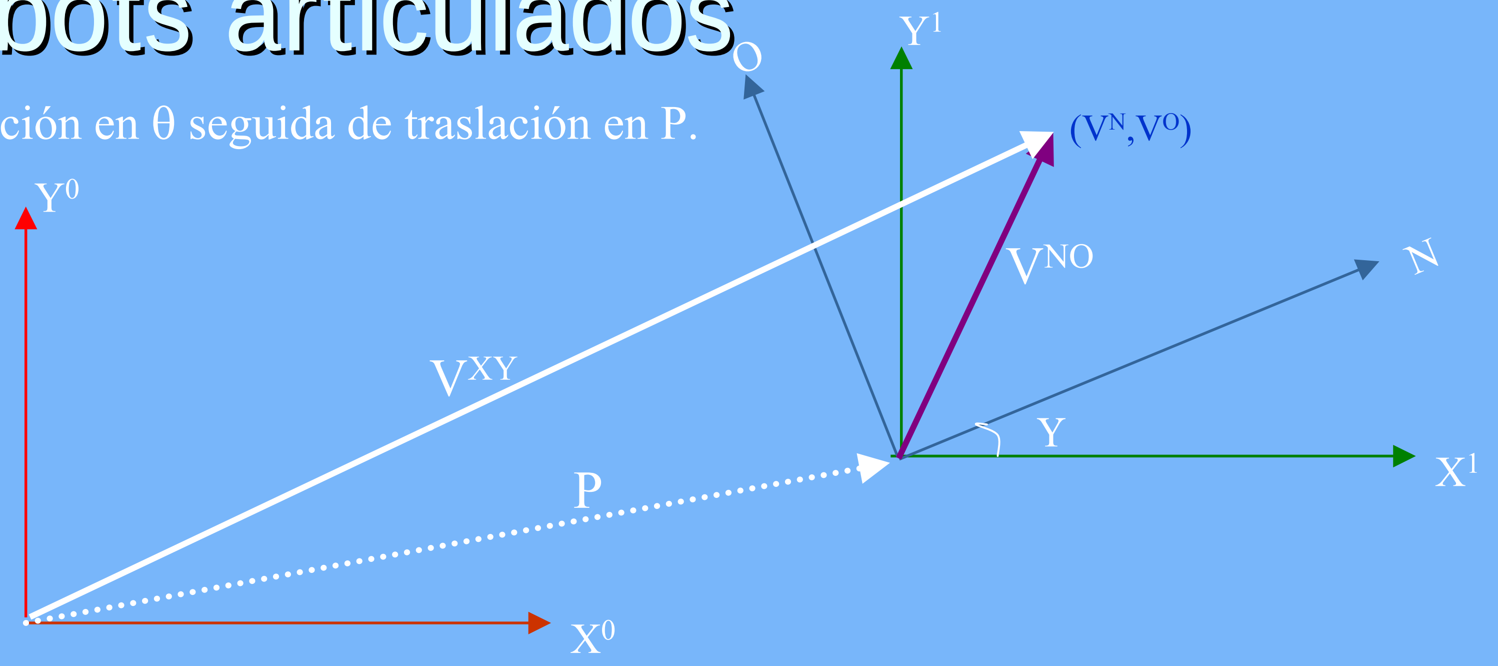
$$\mathbf{R_z} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Rotación en eje Z}$$

$$\mathbf{R_y} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Rotación en eje Y}$$

$$\mathbf{R_z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \longleftarrow \text{Rotación en eje X}$$

Robots articulados

Rotación en θ seguida de traslación en P.



$$V^{XY} = \begin{bmatrix} V^X \\ V^Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V^N \\ V^O \end{bmatrix}$$

(Ojo : P_x, P_y son relativos al sistema original. Traslación seguida de rotación es diferente de rotación seguida de traslación.)

Robots articulados

REPRESENTACIÓN HOMOGENEA

Poniendo todo en una sola matriz

$$\mathbf{V}^{XY} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{X} \\ \mathbf{V}^{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{N} \\ \mathbf{V}^{O} \end{bmatrix}$$

Rotación seguido de traslación

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{X} \\ \mathbf{V}^{Y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{N} \\ \mathbf{V}^{O} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Llenando con 0's y 1's

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{X} \\ \mathbf{V}^{Y} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \mathbf{P}_x \\ \sin\theta & \cos\theta & \mathbf{P}_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{N} \\ \mathbf{V}^{O} \\ 1 \end{bmatrix}$$

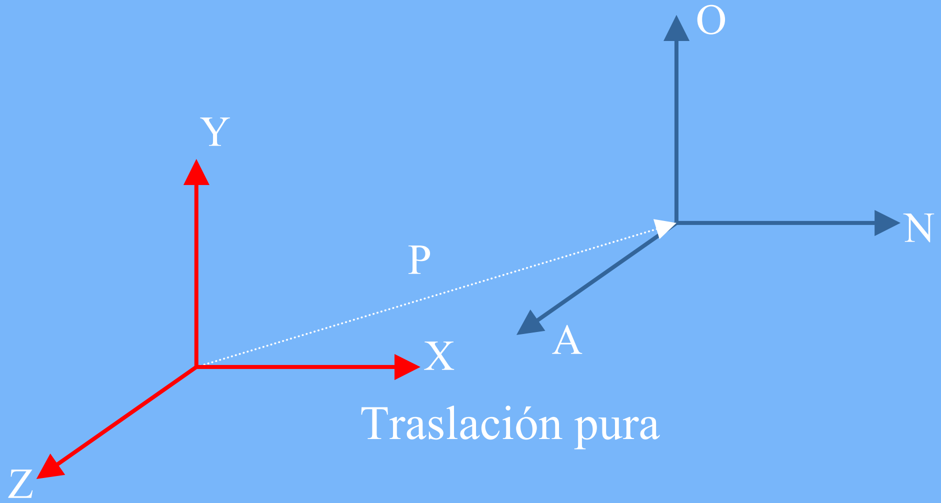
En forma matricial

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & \mathbf{P}_x \\ \sin\theta & \cos\theta & \mathbf{P}_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz homogénea para una rotación en torno al eje z seguida de una traslación en el plano XY.

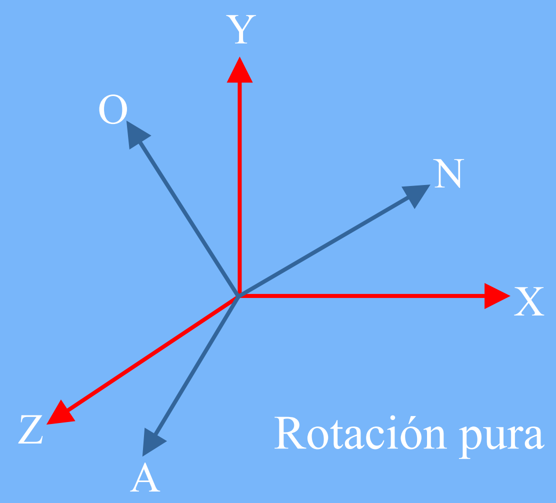
Robots articulados

Matrices homogéneas en 3D



Traslación pura

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_x \\ 0 & 1 & 0 & P_y \\ 0 & 0 & 1 & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Rotación pura

$$H = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & 0 \\ n_y & o_y & a_y & 0 \\ n_z & o_z & a_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sector de rotación:

Corresponde a una rotación en torno al eje x, y, z , o a una combinación.

Robots articulados

Matriz homogénea

Sirve para expresar la orientación y posición de un sistema de referencia móvil NO con respecto a otro fijo XY

Robots articulados

Transformaciones homogéneas cont,..

$$V^{XY} = H\begin{bmatrix} V^N \\ V^O \\ V^A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Representa la posición (n,o,a) de un punto relativo al sistema actual.

$$V^{XY} = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & P_x \\ n_y & o_y & a_y & P_y \\ n_z & o_z & a_z & P_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V^N \\ V^O \\ V^A \\ 1 \end{bmatrix}$$

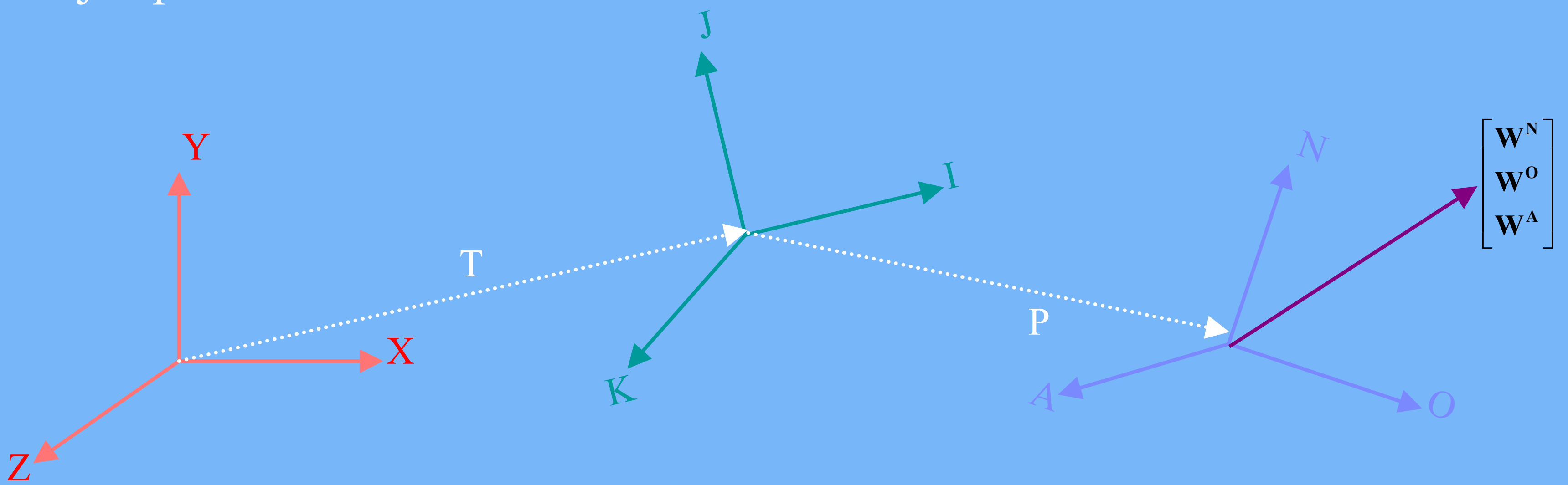
$$V^X = n_x V^N + o_x V^O + a_x V^A + P_x$$

Rotación y traslación pueden combinarse en una matriz homogénea sólo si son relativas al mismo sistema de referencias.

Robots articulados

Encontrando la matriz homogénea

Ejemplo.



$$\begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \end{bmatrix}$$ Punto relativo al sistema X-Y-Z

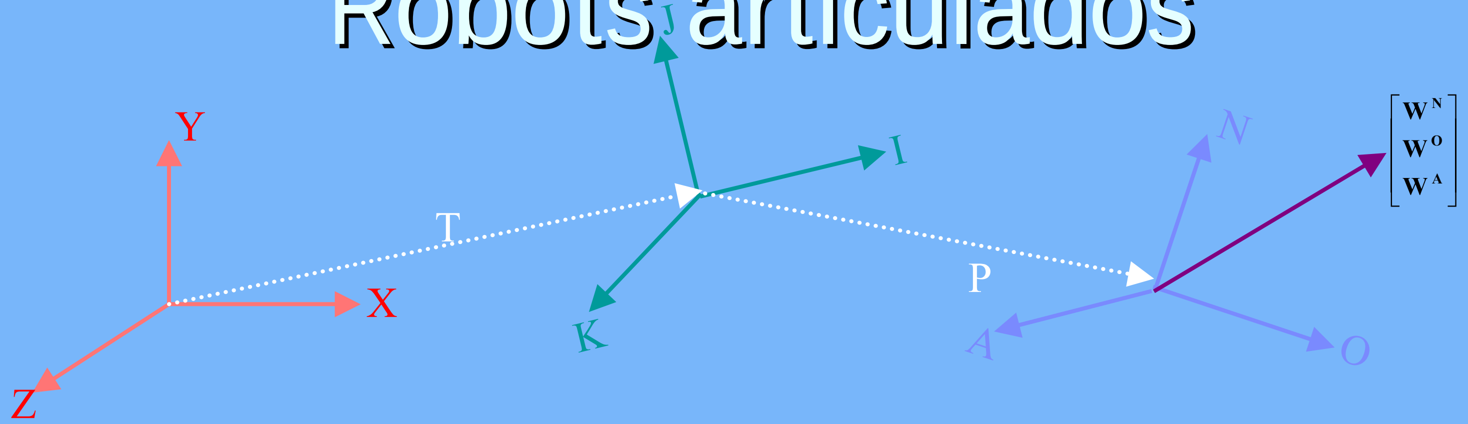
$$\begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \end{bmatrix}$$ Punto relativo al sistema I-J-K

$$\begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \end{bmatrix}$$ Punto relativo al sistema N-O-A

$$\begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ P_j \\ P_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i \\ n_j & o_j & a_j \\ n_k & o_k & a_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & P_i \\ n_j & o_j & a_j & P_j \\ n_k & o_k & a_k & P_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Robots articulados



$$\begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x \\ i_y & j_y & k_y \\ i_z & j_z & k_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^k \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & T_x \\ i_y & j_y & k_y & T_y \\ i_z & j_z & k_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \\ 1 \end{bmatrix}$$

Substituyendo por $\begin{bmatrix} W^I \\ W^J \\ W^K \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & T_x \\ i_y & j_y & k_y & T_y \\ i_z & j_z & k_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & P_i \\ n_j & o_j & a_j & P_j \\ n_k & o_k & a_k & P_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \\ 1 \end{bmatrix}$$

Robots articulados

$$\begin{bmatrix} W^X \\ W^Y \\ W^Z \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} W^N \\ W^O \\ W^A \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & T_x \\ i_y & j_y & k_y & T_y \\ i_z & j_z & k_z & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & P_i \\ n_j & o_j & a_j & P_j \\ n_k & o_k & a_k & P_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

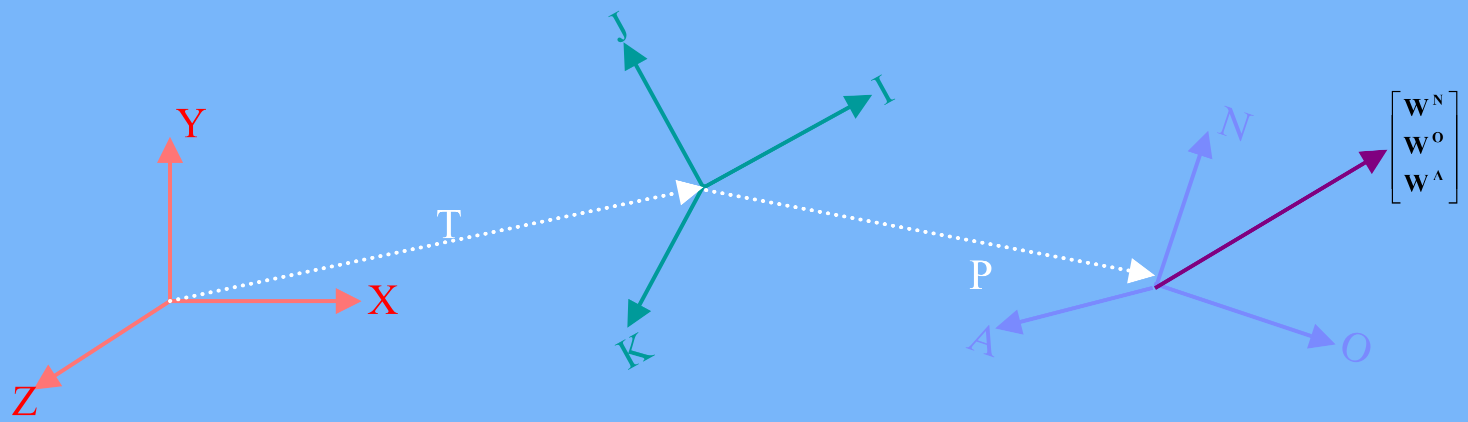
Producto de las dos matrices

Notar que H también puede escribirse como

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & 0 & T_y \\ 0 & 0 & 1 & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_x & j_x & k_x & 0 \\ i_y & j_y & k_y & 0 \\ i_z & j_z & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & P_i \\ 0 & 1 & 0 & P_j \\ 0 & 0 & 1 & P_k \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_i & o_i & a_i & 0 \\ n_j & o_j & a_j & 0 \\ n_k & o_k & a_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

H = (Traslación relativa a XYZ) * (Rotación relativa a XYZ)
* (Traslación relativa a IJK) * (Rotación relativa a IJK)

Robots articulados



Una variación más de H:

H = (Rotar de manera tal que el eje X este alineado con eje T)

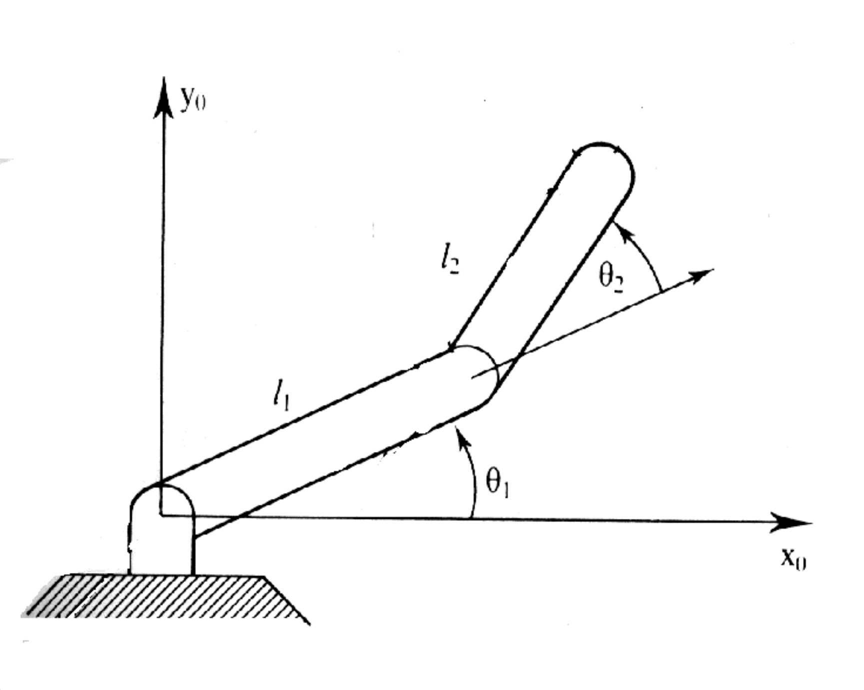
* (Trasladar a lo largo del nuevo eje t en || T ||)

* (Rotar de modo que eje t este alineado a P)

* (Trasladar a lo largo de eje p en factor || P ||)

* (Rotar para que eje p este alineado con eje O)

Robots articulados Cinemática directa



Situación:

Se tiene un brazo robótico que parte alineado con el eje x_o. El primer eslabón rota enY_1 y el segundo en Y_2.

Pregunta:

¿Cual es la posición del extremo del brazo?

Solución:

1. Enfoque geométrico

Es la mejor solución para los casos sencillos. Dado que los ángulos se miden c/r al eslabón anterior, la complejidad aumenta mucho c/r a la cantidad de eslabones. ¡El problema se vuelve tedioso!.

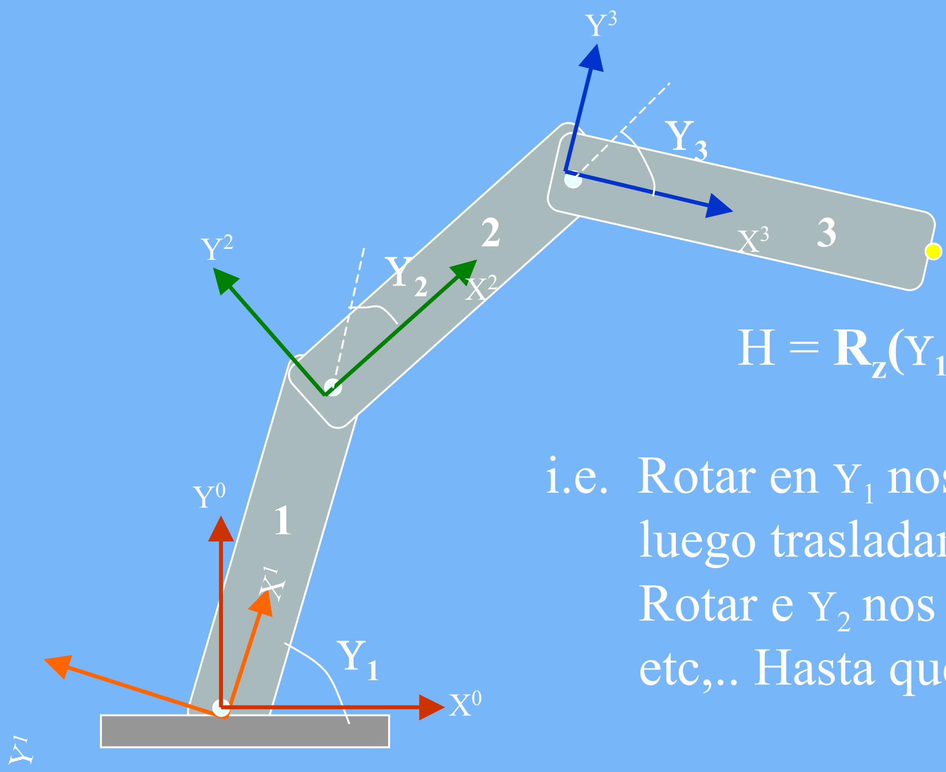
2. Enfoque algebraico

Implica transformaciones de coordenadas.

Robots articulados

Ejemplo:

Determinar la matriz homogénea para encontrar la posición del punto amarillo en el sistema de referencia X^0Y^0



$$H = \mathbf{R_z}(Y_1) * \mathbf{T_{x1}}(\boldsymbol{l_1}) * \mathbf{R_z}(Y_2) * \mathbf{T_{x2}}(\boldsymbol{l_2}) * \mathbf{R_z}(Y_3)$$

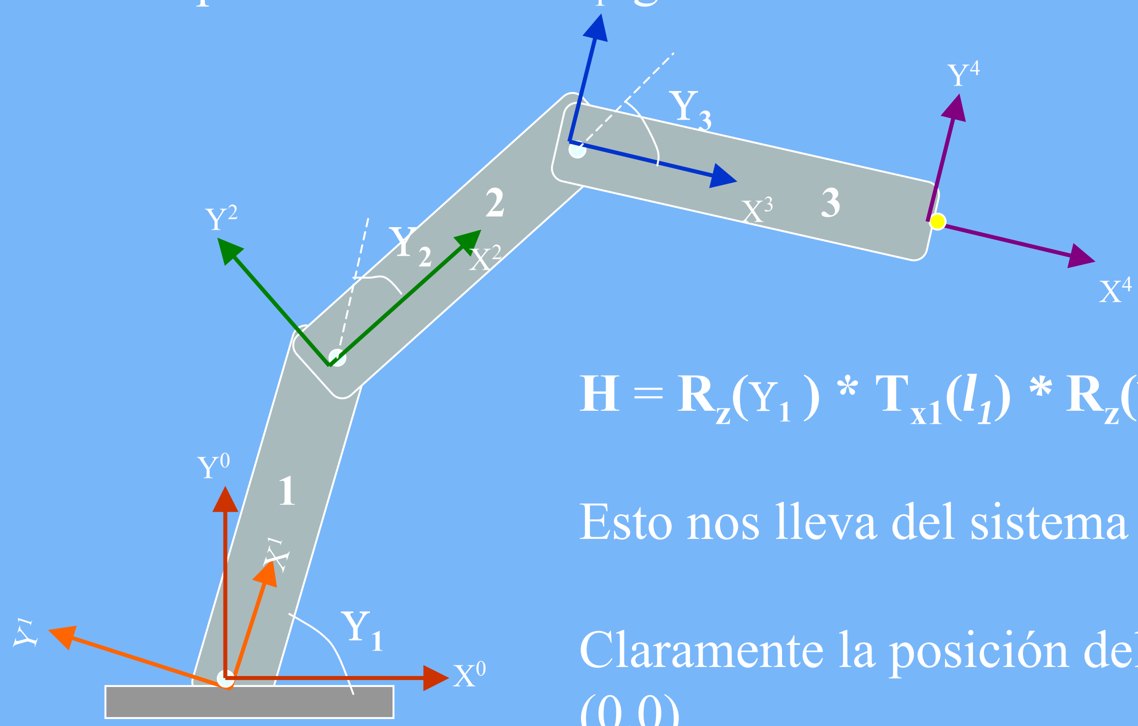
i.e. Rotar en Y_1 nos situa a lo largo del sistema X^1Y^1 .
luego trasladamos a lo largo de X^1 en l_1.
Rotar e Y_2 nos situa a lo largo del sistema X^2Y^2.
etc,.. Hasta que llegamos al sistema X^3Y^3.

La posición del punto amarillo relativa al sistema X^3Y^3 es $(l_1, 0)$. Multiplicando H por este vector de posición entrega las coordenadas del punto amarillo c/r al sistema X^0Y^0.

Robots articulados

Una pequeña variación en la última solución:

Sea el punto amarillo el origen de otro sistema X^4Y^4



$$\mathbf{H} = \mathbf{R_z}(Y_1) * \mathbf{T_{x1}}(\boldsymbol{l_1}) * \mathbf{R_z}(Y_2) * \mathbf{T_{x2}}(\boldsymbol{l_2}) * \mathbf{R_z}(Y_3) * \mathbf{T_{x3}}(\boldsymbol{l_3})$$

Esto nos lleva del sistema X^0Y^0 al sistema X^4Y^4.

Claramente la posición del punto amarillo c/r a X^4Y^4 es (0,0).

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \\ \mathbf{Z} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Notar que al multiplicar por el vector (0,0,0,1) se obtiene la última columna de la matriz H.

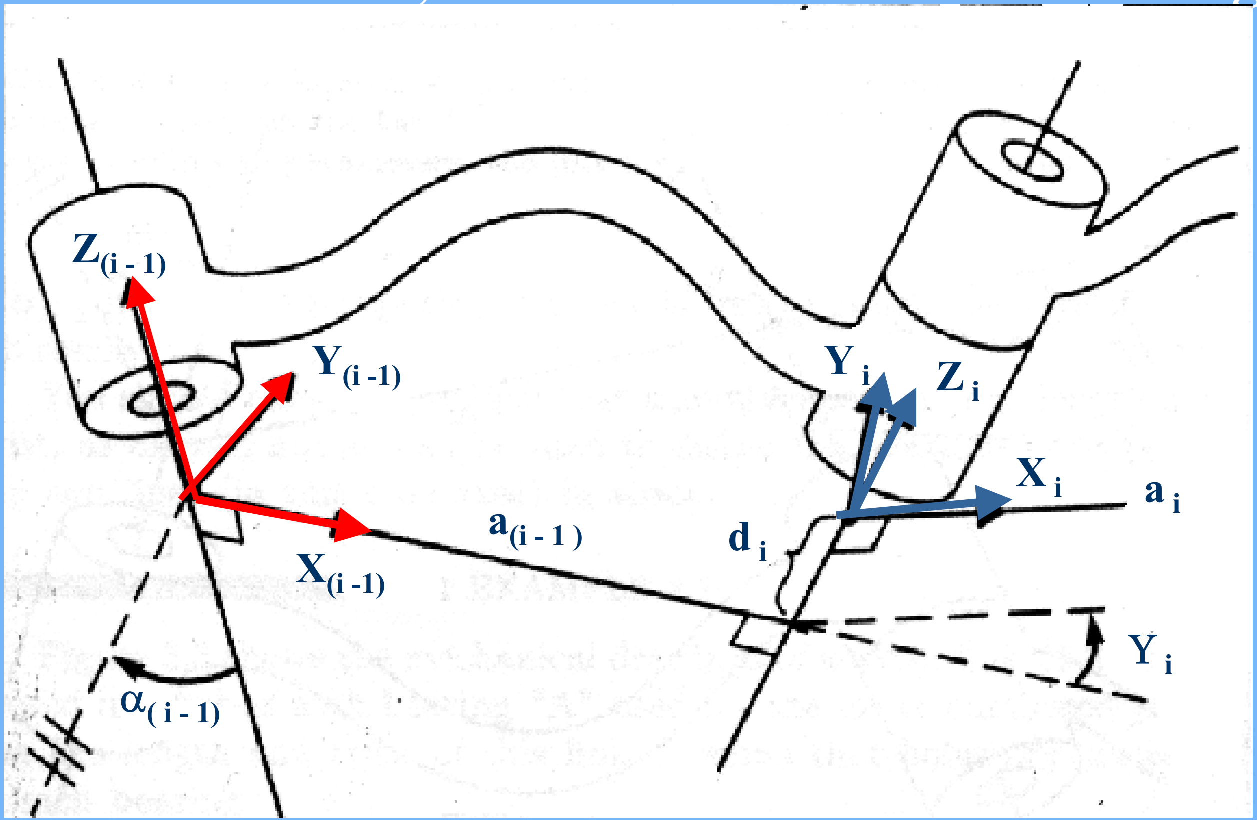
Robots articulados

Más en cinemática directa…

Denavit - Hartenberg

Robots articulados

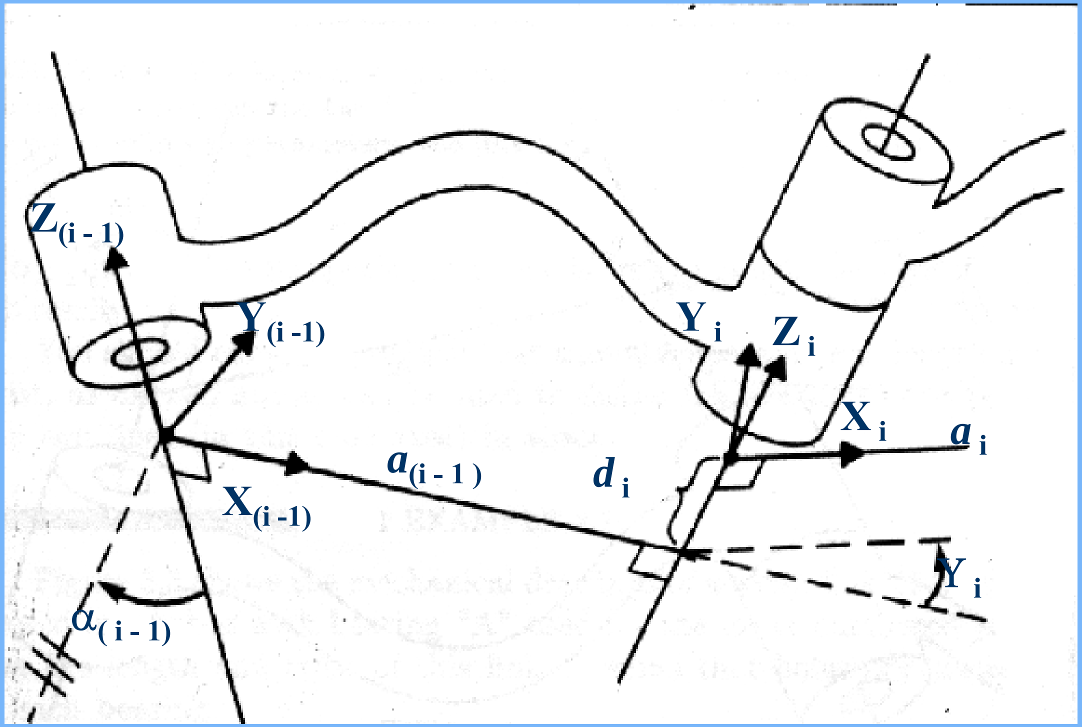
Método sistemático; Notación Denavit-Hartenberg (1955)



IDEA: A cada unión se asigna un sistema de coordenadas de acuerdo al sistema D-H. Es posible relacionar el sistema (*i*) con el sistema (*i -1*) mediante 4 transformaciones básicas que dependen exclusivamente de las características geométricas del eslabón.

Los parámetros/variables son: α, a, d, Y

Robots articulados



1) $a_{(i-1)}$

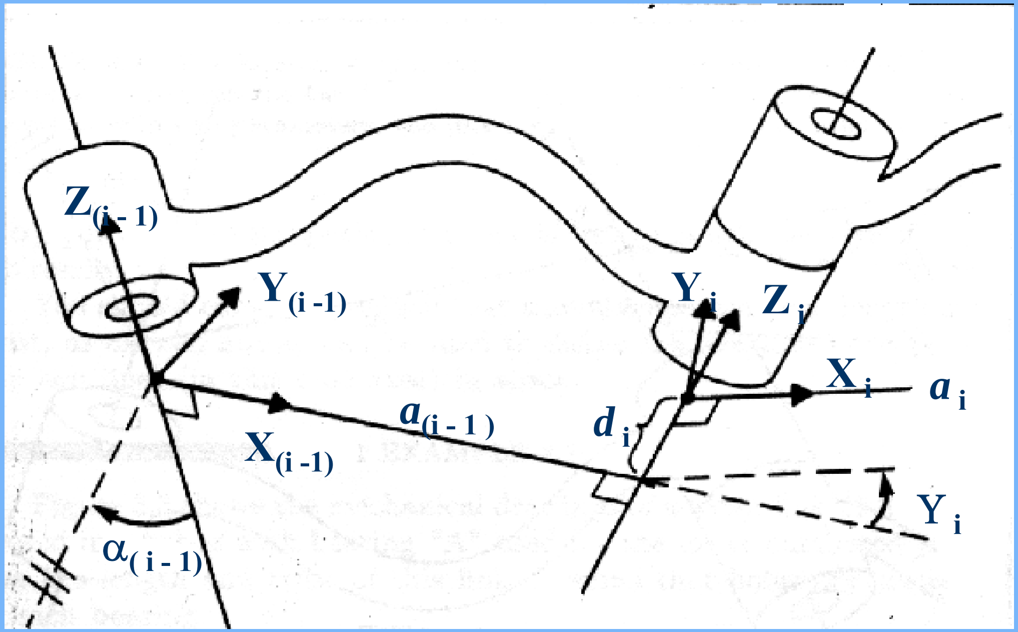
Definición: $a_{(i-1)}$ es el largo de la perpendicular entre los ejes de las articulaciones. Estos ejes corresponden a los ejes de giro, que corresponden a los ejes $Z_{(i-1)}$ y $Z_{(i)}$. Estos ejes deben considerarse rectas en el espacio. La recta perpendicular corresponde al segmento más corto entre las dos líneas axiales, y es perpendicular a ambas.

Robots articulados

***a**$_{(i-1)}$ cont...*

<u>Enfoque visual</u> - "***a**$_{(i-1)}$* puede visualizarse como un cilindro de eje $Z_{(i-1)}$ que se expande hasta tocar el eje *i* , entonces el radio del cilindro corresponde a ***a**$_{(i-1)}$.*"

Si el eje es del tipo deslizante, entonces ***a**$_{(i-1)}$* pasa a ser una variable y no un parámetro.



Robots articulados

2) $\alpha_{(i-1)}$

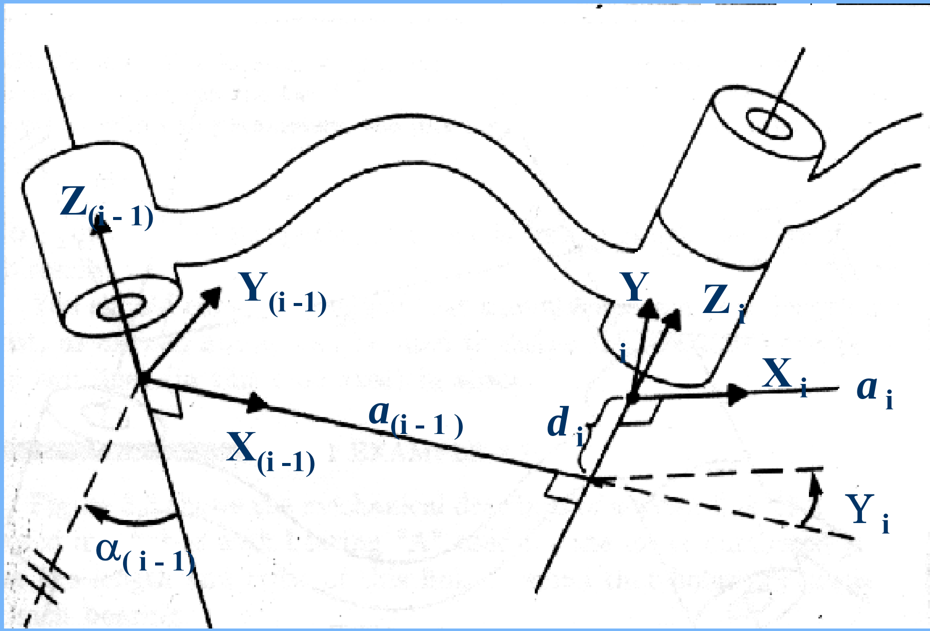
Definición: Cantidad de rotación en torno la perpendicular común de manera tal que los ejes de las articulaciones sean paralelos.

i.e. cuanto hay que rotar en torno al eje $X_{(i-1)}$ tal que $Z_{(i-1)}$ apunte en la misma dirección que Z_i. Rotación positiva siguiendo la regla de la mano derecha.

3) $d_{(i-1)}$

Definición: El desplazamiento a lo largo Del eje Z_i necesario para conectar la perpendicular común $a_{(i-1)}$ con la perpendicular común a_i .

i.e. desplazamiento a lo largo de Z_i para conectar los ejes $X_{(i-1)}$ y X_i.



4) Υ_i

Cantidad de rotación en torno al eje Z_i necesaria para alinear el eje $X_{(i-1)}$ con el eje X_i.

Robots articulados

La matriz homogénea Denavit-Hartenberg

$$\begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{(i-1)} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{(i-1)} & \cos\theta_i \cos\alpha_{(i-1)} & -\sin\alpha_{(i-1)} & -\sin\alpha_{(i-1)} d_i \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{(i-1)} & \cos\theta_i \sin\alpha_{(i-1)} & \cos\alpha_{(i-1)} & \cos\alpha_{(i-1)} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Robots articulados

Ejemplo 3 ejes de rotación

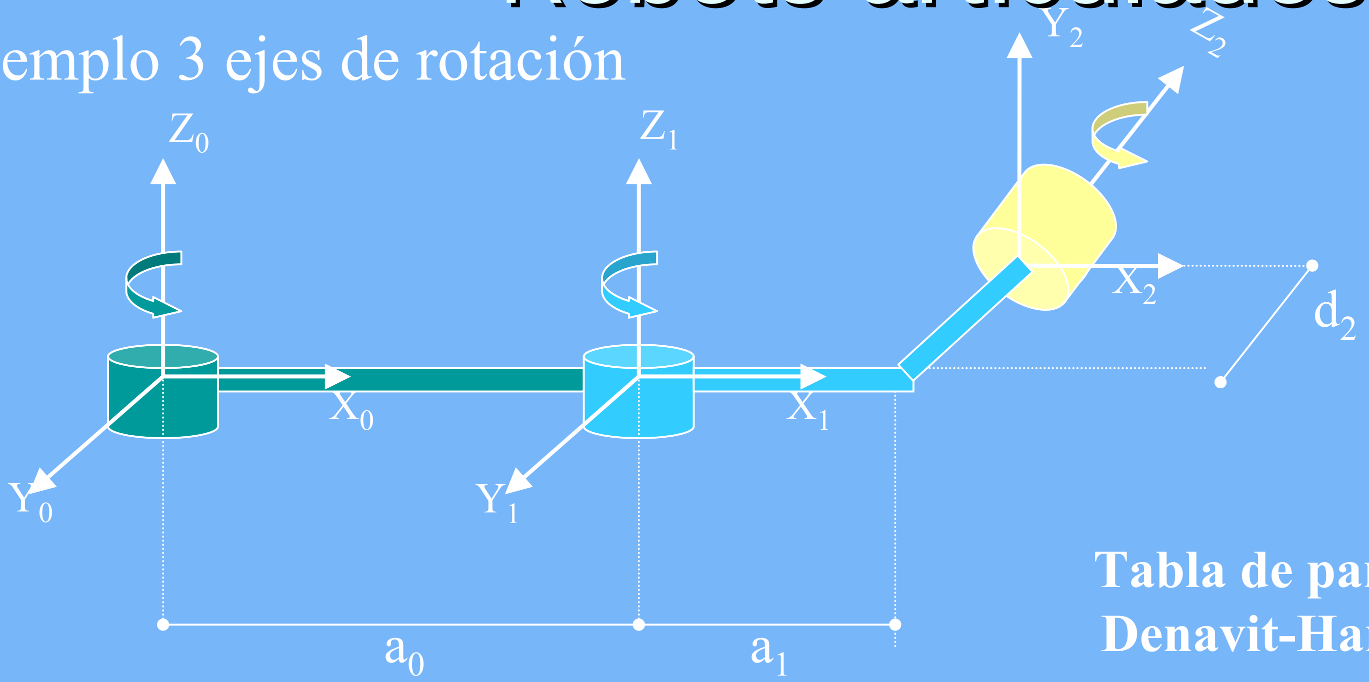


Tabla de parámetros Denavit-Hartenberg

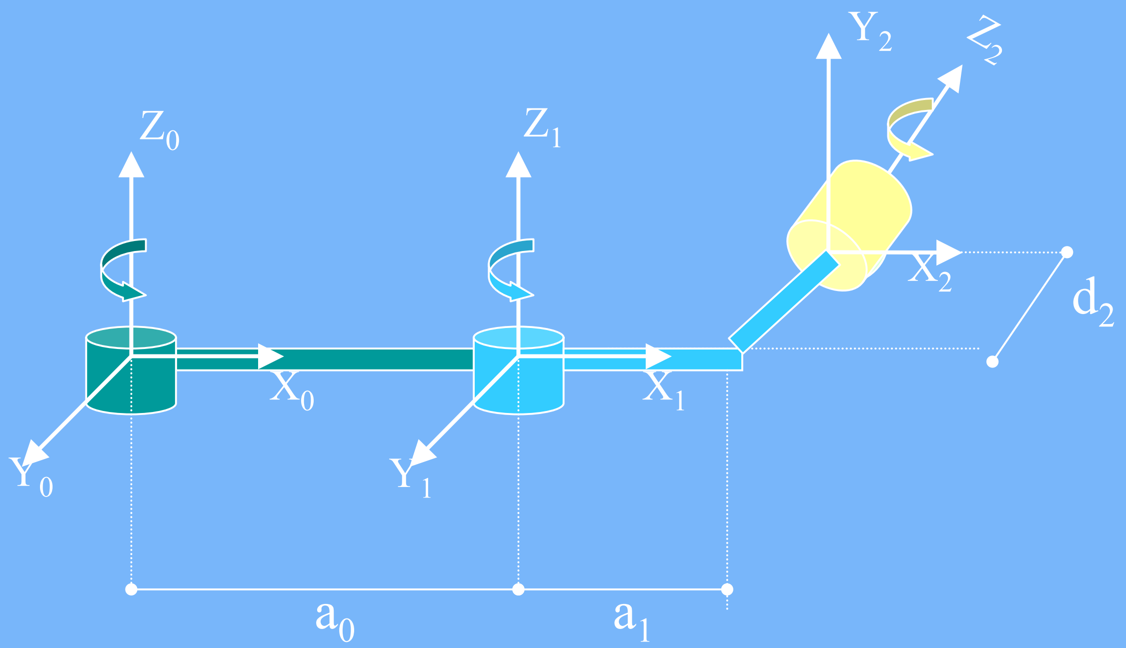
i	$\alpha_{(i-1)}$	$a_{(i-1)}$	d_i	θ_i
0	0	0	0	θ_0
1	0	a_0	0	θ_1
2	-90	a_1	d_2	θ_2

Notar que la tabla posee dos usos:

1) Describir el robot con sus variables y parámetros.

2) Describir el estado del robot al asignar valores a las variables.

Robots articulados



i	$\alpha_{(i-1)}$	$a_{(i-1)}$	d_i	θ_i
0	0	0	0	θ_0
1	0	a_0	0	θ_1
2	-90	a_1	d_2	θ_2

$$\mathbf{V}^{X_0 Y_0 Z_0} = \mathbf{T}\begin{bmatrix} \mathbf{V}^{X_2} \\ \mathbf{V}^{Y_2} \\ \mathbf{V}^{Z_2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T} = ({}_0\mathbf{T})({}^0_1\mathbf{T})({}^1_2\mathbf{T})$$

Nota: T corresponde a la matriz D-H con *(i-1)* = 0 e *i* = 1.

Robots articulados

i	$\alpha_{(i-1)}$	$a_{(i-1)}$	d_i	θ_i
0	0	0	0	θ_0
1	0	a_0	0	θ_1
2	-90	a_1	d_2	θ_2

$$_0T = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & 0 & 0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es una rotación en torno al eje Z_0

$$^0_1T = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & a_0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Traslación en a_0 seguida de una rotación en torno al eje Z_1

$$^1_2T = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ -\sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esto es una traslación en a_1 y en d_2 seguida de una rotación en torno a los ejes X_2 y Z_2

$$T = ({}_0T)({}^0_1T)({}^1_2T)$$

Robots articulados

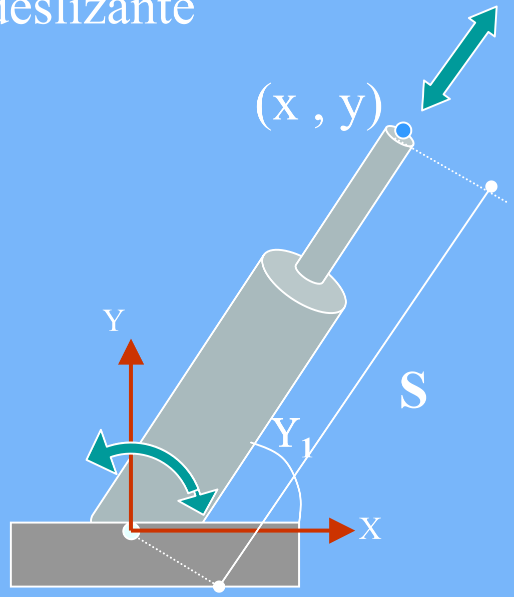
Cinemática Inversa

De la posición a los ángulos

Robots articulados

Un ejemplo sencillo

Combinación de un eje de rotula y uno deslizante



Encontrar Y:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Mas específicamente:

$$\theta = \arctan 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

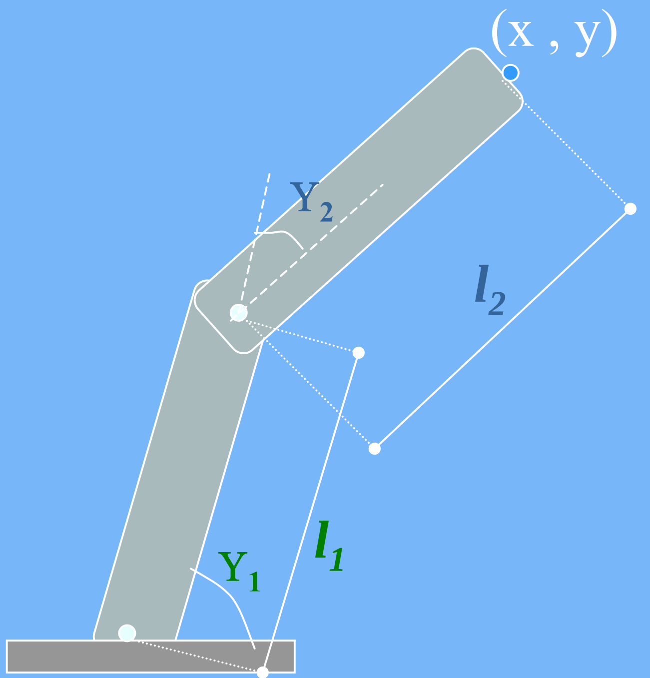
arctan2() sirve para especificar que se trata del primer cuadrante!!

Largo **S**:

$$S = \sqrt{(x^2 + y^2)}$$

Robots articulados

Cinemática inversa de un manipulador
de dos articulaciones de rótula

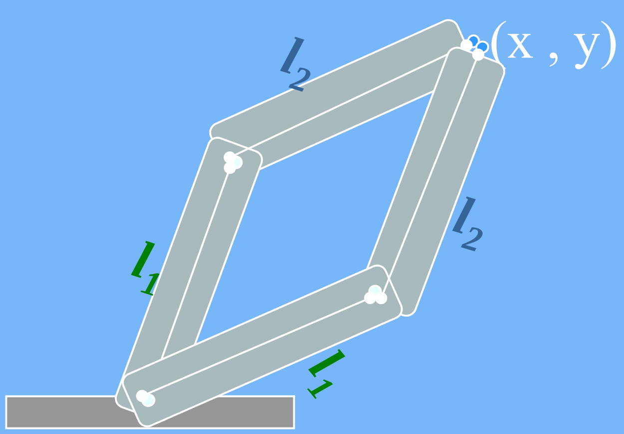


Dados: l_1, l_2, x , y

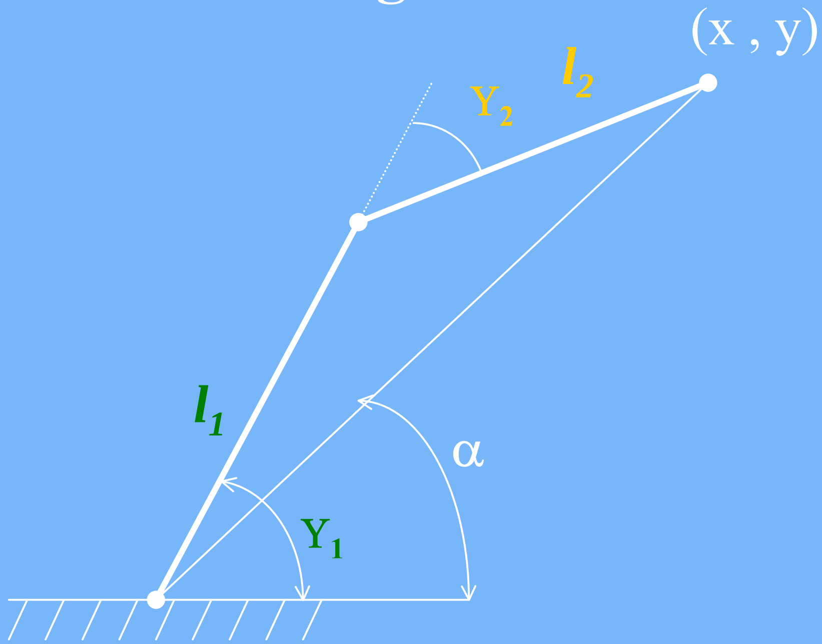
Encontrar: Y_1, Y_2

Redundante:

No existe solución única para este problema. Con los datos existen dos soluciones:



La solución geométrica



Con el teorema del coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$(x^2 + y^2) = l_1^{\,2} + l_2^{\,2} - 2 l_1 l_2 \cos(180 - \theta_2)$$

$$\cos(180 - \theta_2) = -\cos(\theta_2)$$

$$\cos(\theta_2) = \frac{x^2 + y^2 - l_1^{\,2} - l_2^{\,2}}{2 l_1 l_2}$$

$$\theta_2 = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^{\,2} - l_2^{\,2}}{2 l_1 l_2}\right)$$

Redundante, puesto que θ_2 puede estar en el primero o el cuarto cuadrante.

Regla de los senos:

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$\frac{\sin \bar{\theta}_1}{l_2} = \frac{\sin(180 - \theta_2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\sin(\theta_2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

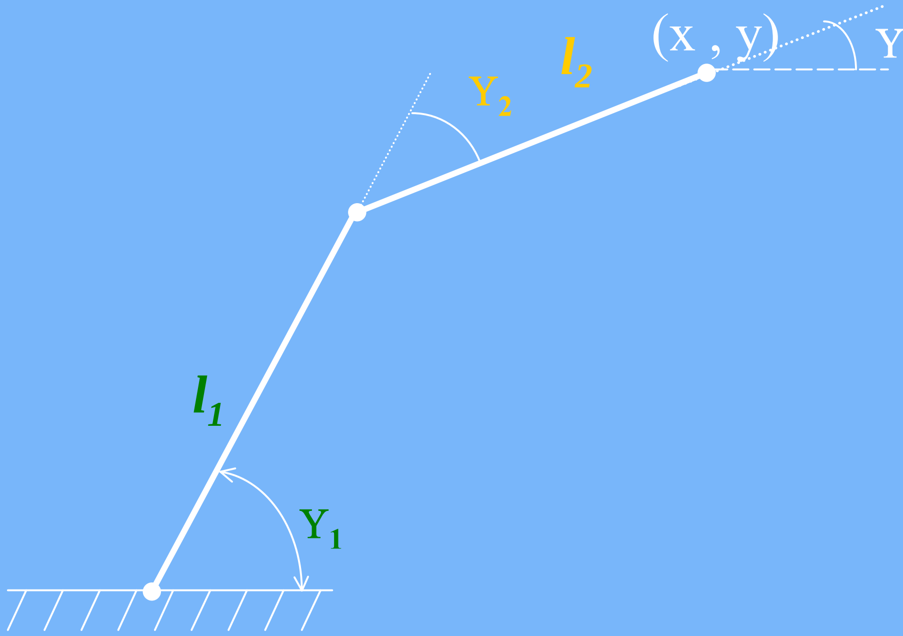
$$\theta_1 = \bar{\theta}_1 + \alpha$$

$$\alpha = \arctan 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Redundante, puesto que θ_1 posee dos valores posibles

$$\theta_1 = \arcsin\left(\frac{l_2 \sin(\theta_2)}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) + \arctan 2\left(\frac{y}{x}\right)$$

Solución algebraica



$$c_1 = \cos\theta_1$$

$$c_{1+2} = \cos(\theta_2 + \theta_1)$$

$$(1)\quad x = l_1 c_1 + l_2 c_{1+2}$$

$$(2)\quad y = l_1 s_1 + l_2 \sin_{1+2}$$

$$(3)\quad \theta = \theta_1 + \theta_2$$

$$(1)^2 + (2)^2 = x^2 + y^2 =$$

$$= \left(l_1^2 c_1^2 + l_2^2 (c_{1+2})^2 + 2 l_1 l_2 c_1 (c_{1+2})\right) + \left(l_1^2 s_1^2 + l_2^2 (\sin_{1+2})^2 + 2 l_1 l_2 s_1 (\sin_{1+2})\right)$$

$$= l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \left(c_1 (c_{1+2}) + s_1 (\sin_{1+2})\right)$$

$$= l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2 \boxed{c_2}$$

Único desconocido

$$\therefore \theta_2 = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}\right)$$

Note:

$$\cos(a \pm b) = (\cos a)(\cos b) \mp (\sin a)(\sin b)$$

$$\sin(a \pm b) = (\cos a)(\sin b) \pm (\cos b)(\sin a)$$

Robots articulados

$$
\begin{aligned}
x &= l_1\, c_1 + l_2\, c_{1+2} \\
&= l_1\, c_1 + l_2\, c_1 c_2 - l_2 s_1 s_2 \\
&= c_1 (l_1 + l_2\, c_2) - s_1 (l_2 s_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= l_1\, s_1 + l_2\, \sin_{1+2} \\
&= l_1\, s_1 + l_2\, s_1 c_2 + l_2\, s_2 c_1 \\
&= c_1 (l_2\, s_2) + s_1 (l_1 + l_2\, c_2)
\end{aligned}
$$

Ya conocemos θ_2. Hay que resolver para θ_1. Ahora tenemos dos ecuaciones y dos incognitas ($\sin \theta_1$ and $\cos \theta_1$)

$$
c_1 = \frac{x + s_1 (l_2 s_2)}{(l_1 + l_2\, c_2)}
$$

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{x + s_1 (l_2 s_2)}{(l_1 + l_2\, c_2)} (l_2\, s_2) + s_1 (l_1 + l_2\, c_2) \\
&= \frac{1}{(l_1 + l_2\, c_2)} \Big(x\, l_2 s_2 + s_1 (l_1^2 + l_2^2 + 2 l_1 l_2\, c_2) \Big)
\end{aligned}
$$

Substituyendo por c_1 y simplificando varias veces

Notar que esto viene del teo. Del coseno y puede reemplazarse por $x^2 + y^2$

$$
s_1 = \frac{y (l_1 + l_2\, c_2) - x\, l_2 s_2}{x^2 + y^2}
$$

$$
\theta_1 = \arcsin \left(\frac{y (l_1 + l_2\, c_2) - x\, l_2 s_2}{x^2 + y^2} \right)
$$