FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO
Clase 5

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Campo Eléctrico Conservativo,
- Definición dipolo eléctrico,
- Dipolo de un conjunto de cargas,
- Dipolo de una distribución volumétrica de cargas

Campo Eléctrico Conservativo

Previa: Si $f(\vec{r})$ Es un campo escalar, entonces

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

luego, tomando el rotor de la ecuación

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad \nabla \times \vec{E} = 0$$

Campo Eléctrico Conservativo

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Integrando en S

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = 0$$

Aplicando el teorema de Stokes

$$\iint_S \nabla \times \vec{E} \bullet d\vec{s} = \oint_{C(S)} \vec{E} \bullet d\vec{l}$$

Donde C(S) es el contorno que limita a la superficie S

Campo Eléctrico Conservativo

Luego

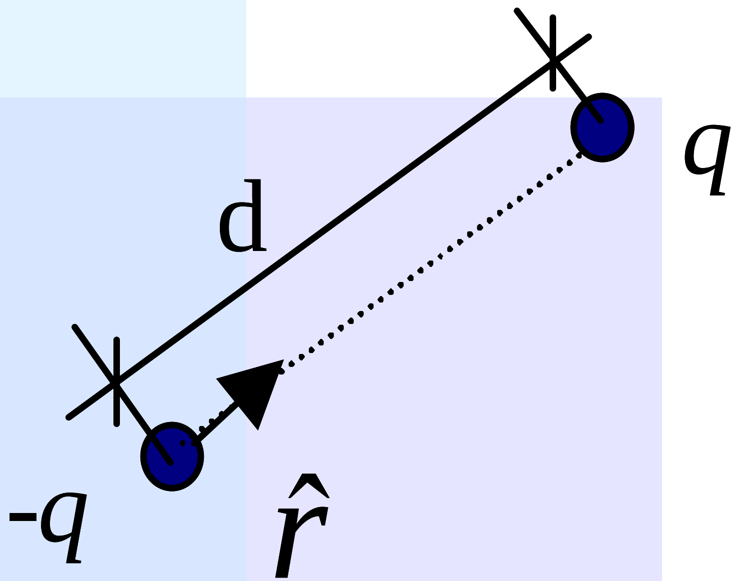
$$q \oint_{C(S)} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \oint_{C(S)} \vec{F} \bullet d\vec{l} = Wneto = 0$$

La fuerza proveniente de un campo electroestático es una fuerza conservativa.

Dipolo Eléctrico

Se define el dipolo eléctrico como

$$\vec{p} = qd\hat{r} \quad [C\bullet m]$$



Sistema de dos cargas de igual magnitud y signo contrario que se mantienen (mediante algún elemento o fuerza externa) a una distancia constante entre ellas

Potencial de Dipolo Eléctrico

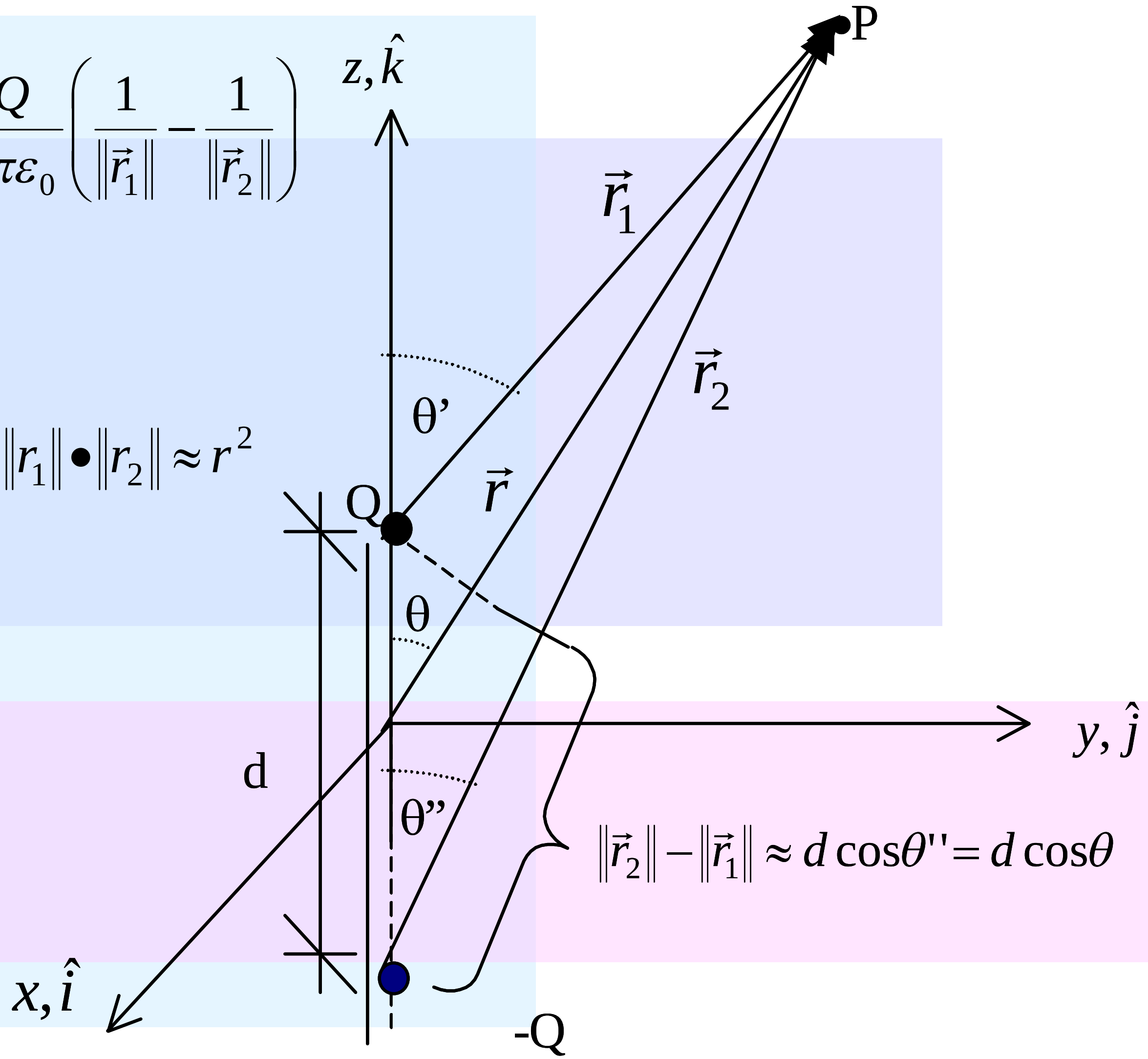
$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}_1\|} + \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r}_2\|} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\|\vec{r}_1\|} - \frac{1}{\|\vec{r}_2\|}\right)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\|\vec{r}_2\| - \|\vec{r}_1\|}{\|r_1\|\|r_2\|}$$

$$\|r_1\| \bullet \|r_2\| \approx (r-\Delta)(r+\Delta) = r^2 - \Delta^2 \Rightarrow \|r_1\| \bullet \|r_2\| \approx r^2$$

$$r_2 - r_1 = d\cos\theta$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{d\cos\theta}{r^2}\right] \quad (1.79)$$



Potencial de Dipolo Eléctrico

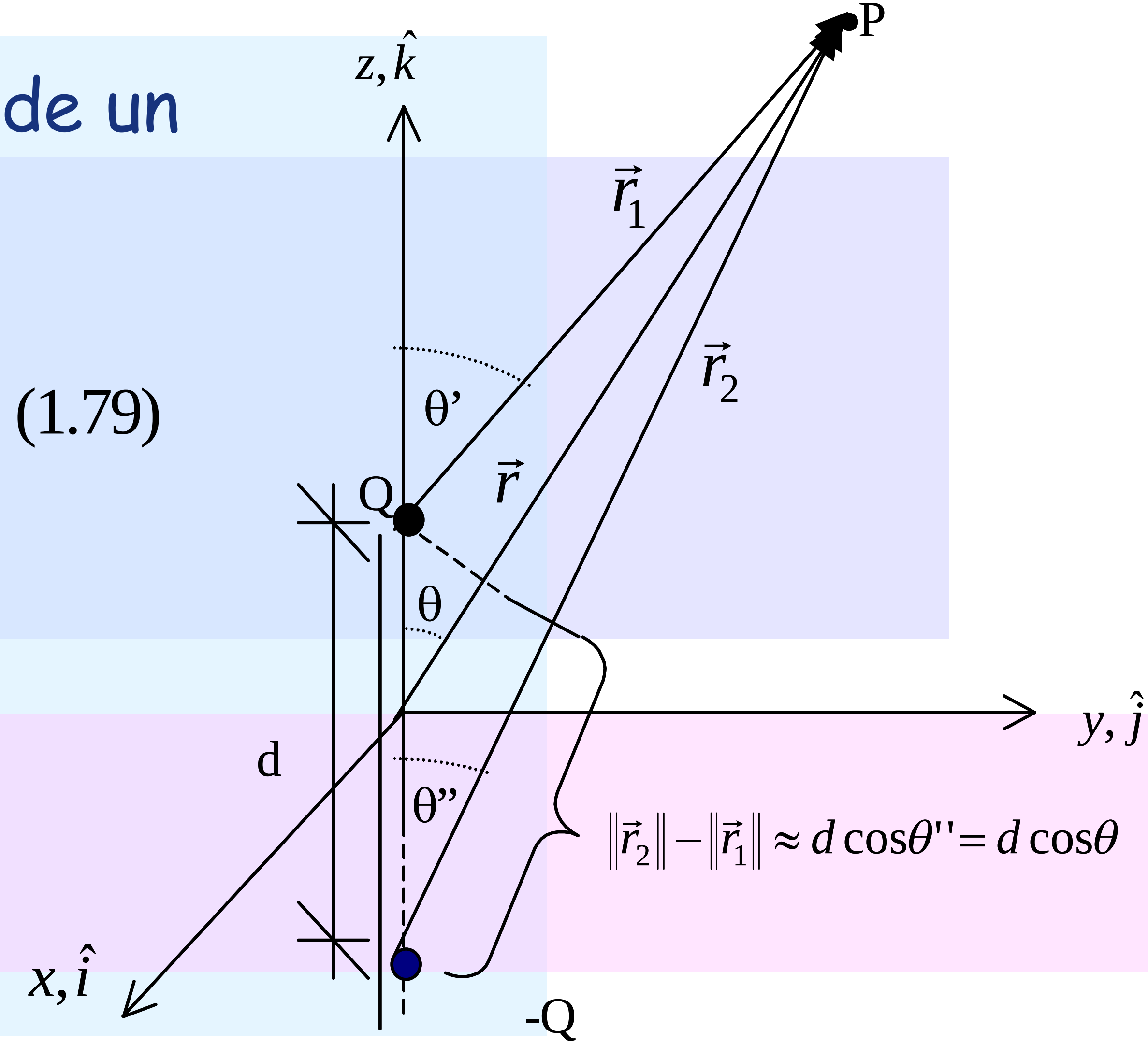
Potencial eléctrico de un dipolo

$$r_2 - r_1 = d\cos\theta$$

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{d\cos\theta}{r^2}\right] \qquad (1.79)$$

$$d\cos\theta = d\hat{k} \bullet \hat{r}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet \hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 \| \vec{r} \|^2}$$

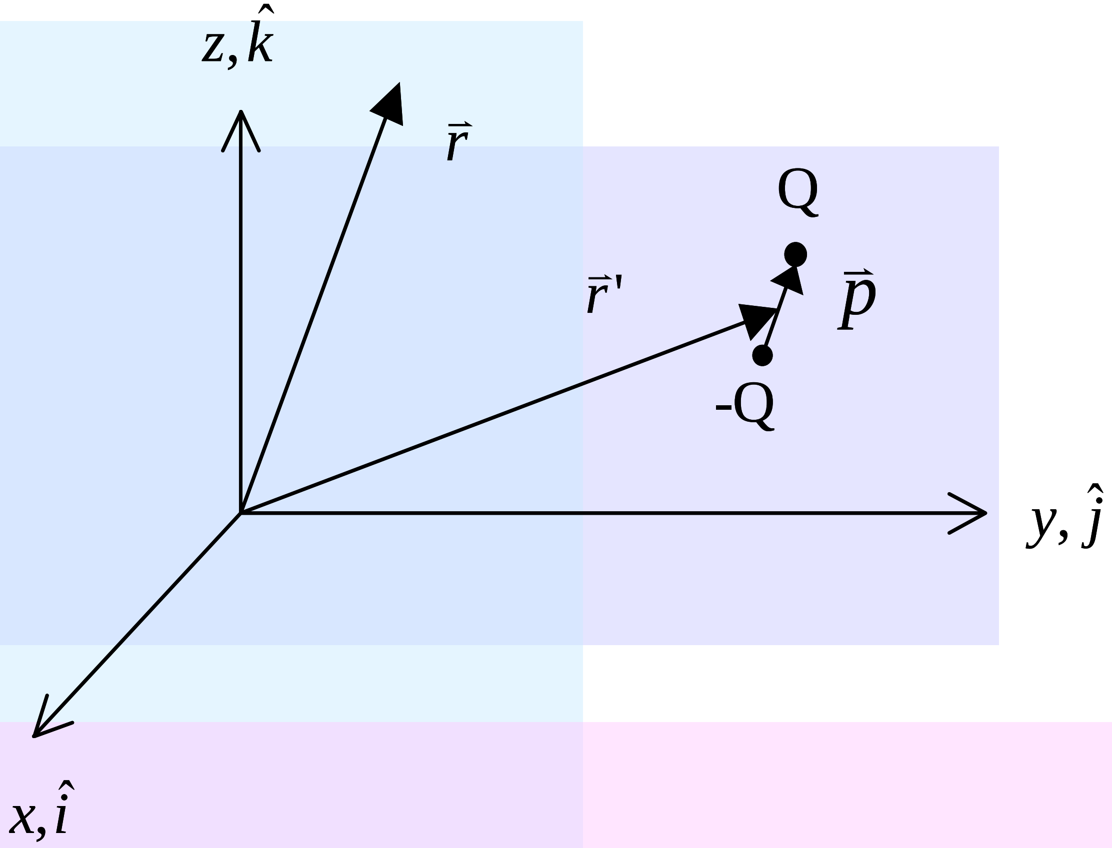


Potencial y Campo de Dipolo Eléctrico

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \bullet (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi\varepsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^3}$$

Campo eléctrico

$$\vec{E} = -\nabla V$$



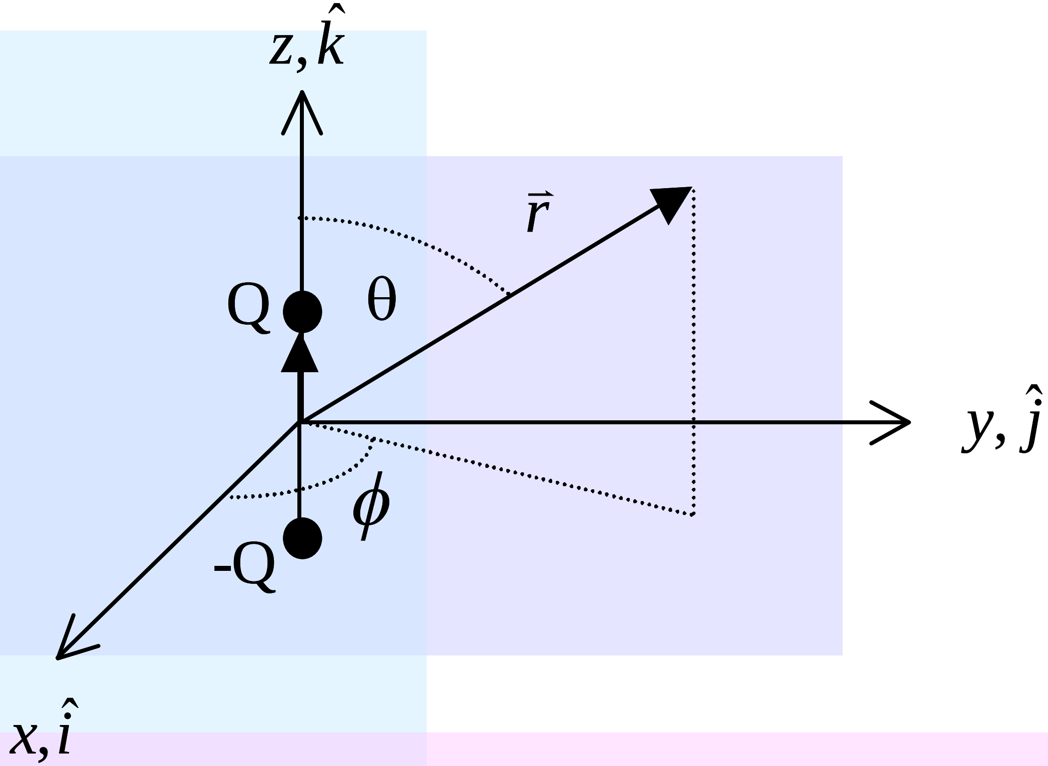
Ejemplo

$$\vec{r}\,'=0$$

$$\vec{p}=p\hat{k}$$

$$V(\vec{r})=\frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0\,\|\vec{r}\,\|^3}$$

$$V(\vec{r})=\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



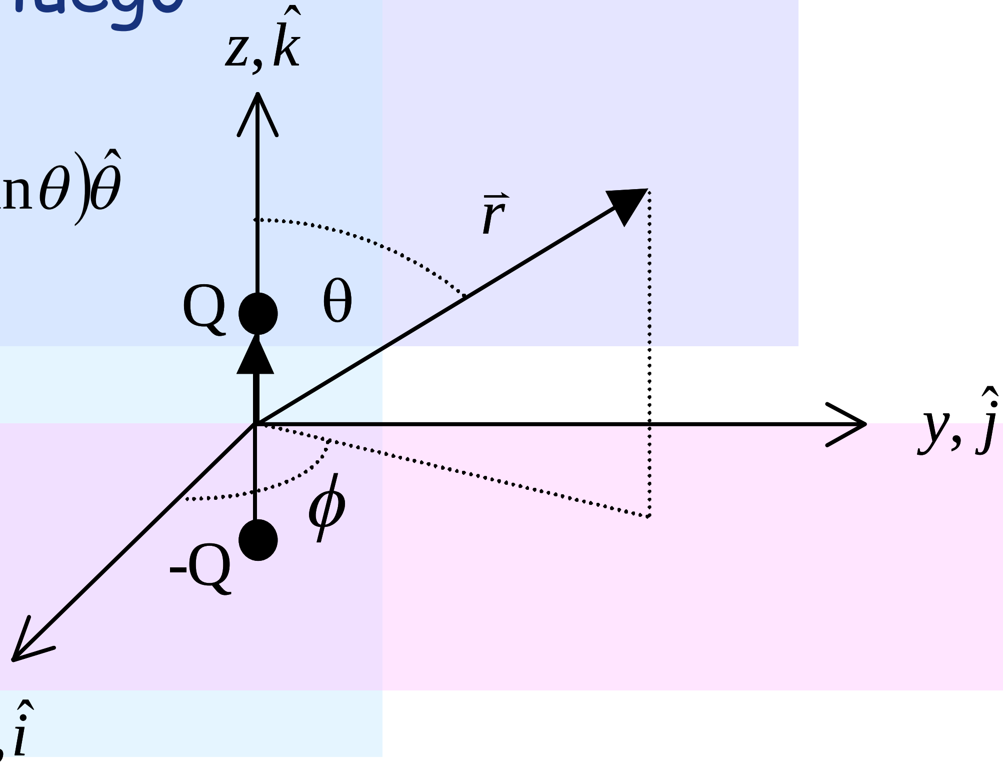
Ejemplo

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad \nabla V = \left[\frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial \phi}\hat{\phi}\right]$$

V solo depende de *r* y θ, luego

$$\nabla V = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0}\left(-2r^{-3}\right)\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(-\sin\theta\right)\hat{\theta}$$

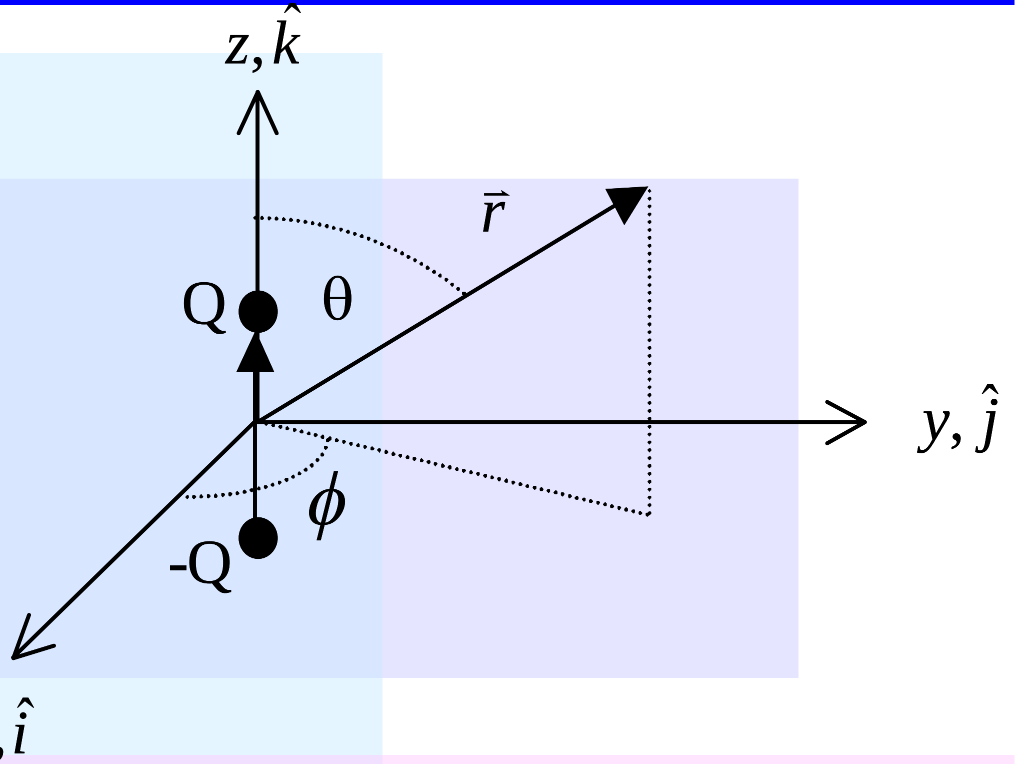
$$\therefore \quad \vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right)$$



Dipolo Eléctrico

$$V(\vec{r}) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\hat{r} + \frac{\sin\theta}{r^3}\hat{\theta}\right)$$

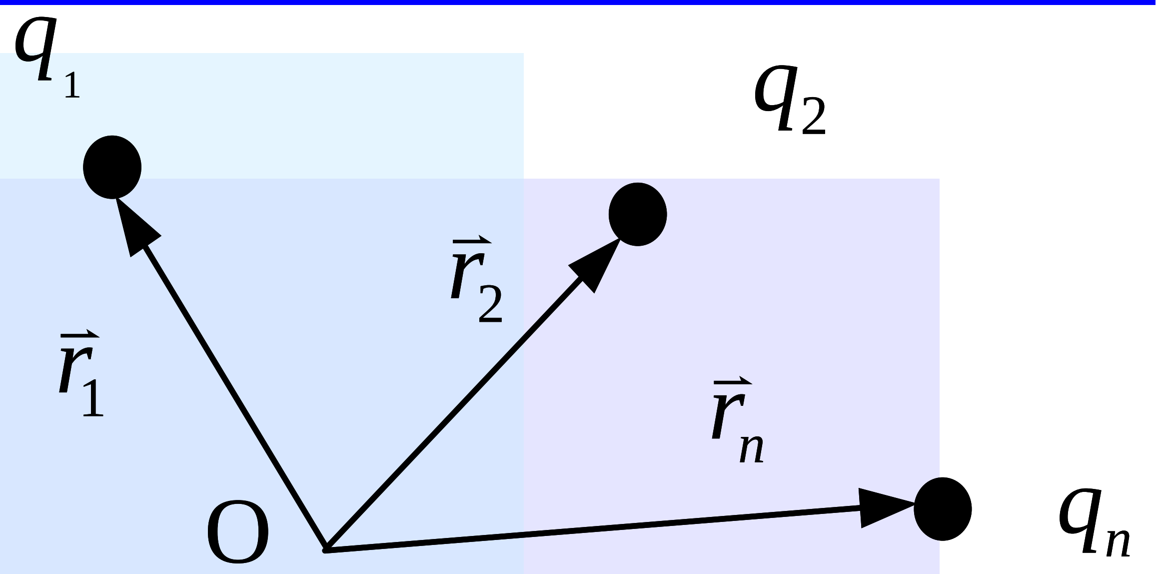


Para puntos muy alejados $\vec{E}(\vec{p}) \propto \frac{1}{r^3}, \quad V(\vec{p}) \propto \frac{1}{r^2}$

Dipolo de un Conjunto de Cargas

Condición

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 0$$



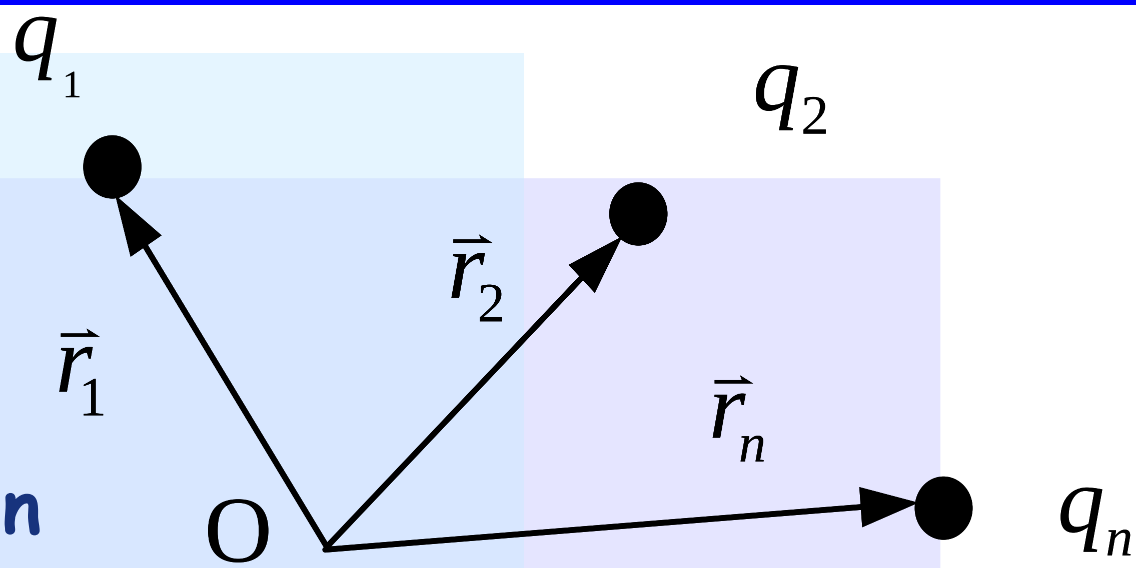
Momento Dipolar Eléctrico del conjunto

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n} q_k \vec{r}_k$$

Dipolo de un Conjunto de Cargas

Momento Dipolar Eléctrico

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n} q_k \vec{r}_k$$



Aplicando la condición

$$\sum_{k=1}^{n} q_k = 0 \Rightarrow q_1 = -\sum_{k=2}^{n} q_k$$

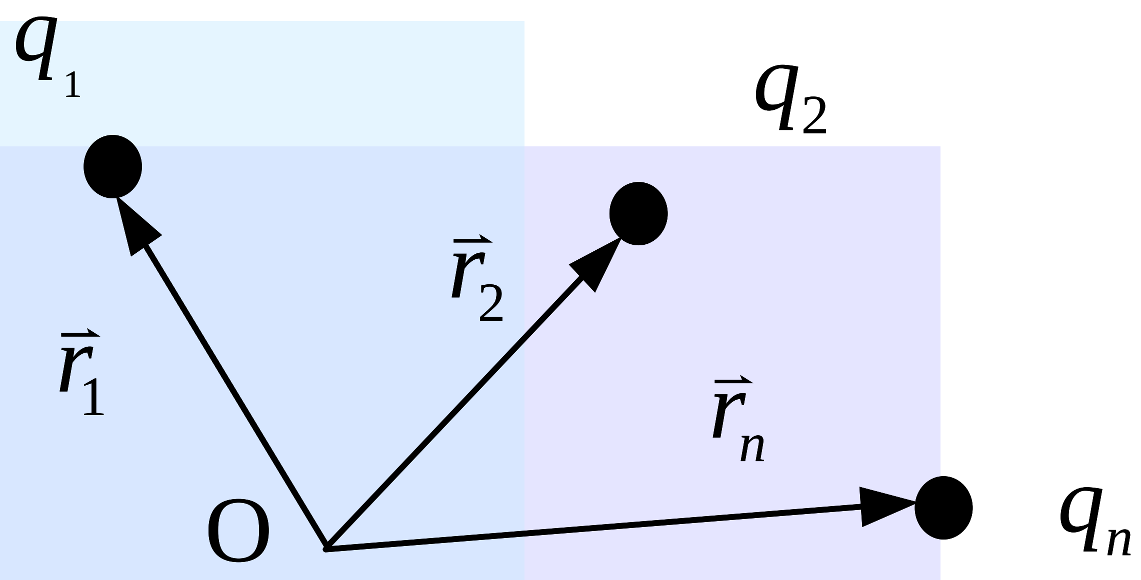
$$\vec{p} = q_1\vec{r}_1 + \sum_{k=2}^{n} q_k \vec{r}_k = \left(-\sum_{k=2}^{n} q_k\right)\vec{r}_1 + \sum_{k=2}^{n} q_k \vec{r}_k \Rightarrow \vec{p} = \sum_{k=2}^{n} q_k (\vec{r}_k - \vec{r}_1)$$

$\therefore \vec{p}$ **es independiente del origen**

Dipolo de un Conjunto de Cargas

Momento Dipolar Eléctrico

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n} q_k \vec{r}_k$$



Para n=2 se tiene

$$\vec{p} = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 \Rightarrow \quad q_1 = -q_2 = Q$$

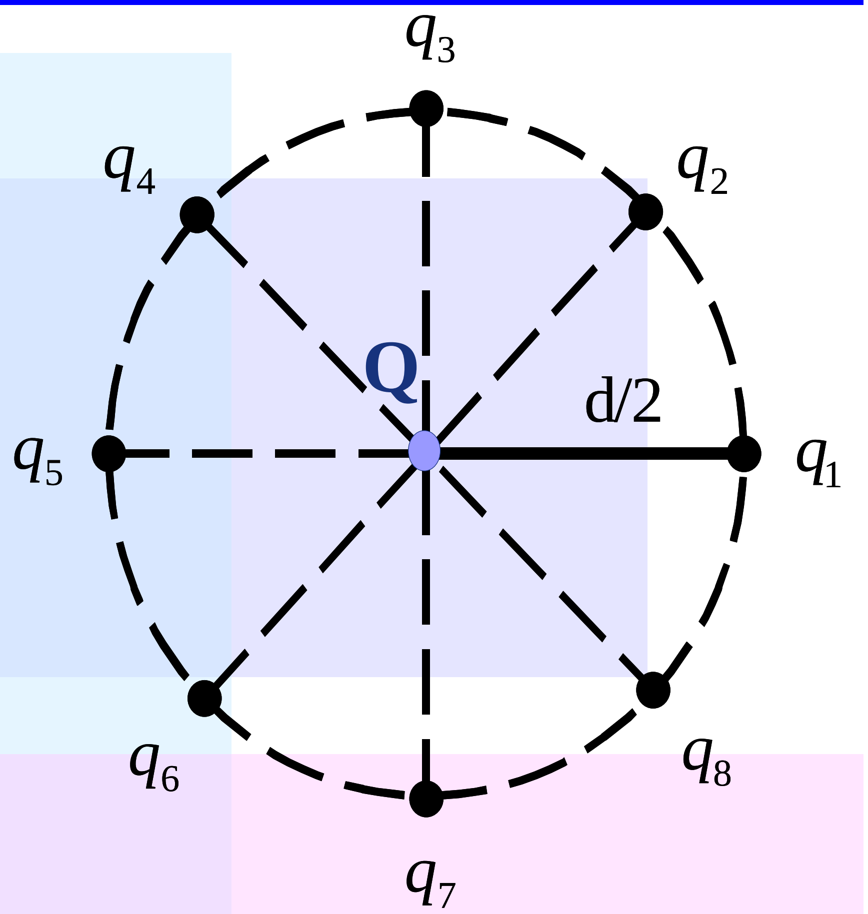
$$\Rightarrow \vec{p} = Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = Q\vec{d}$$

Definición de dipolo

Ejemplo

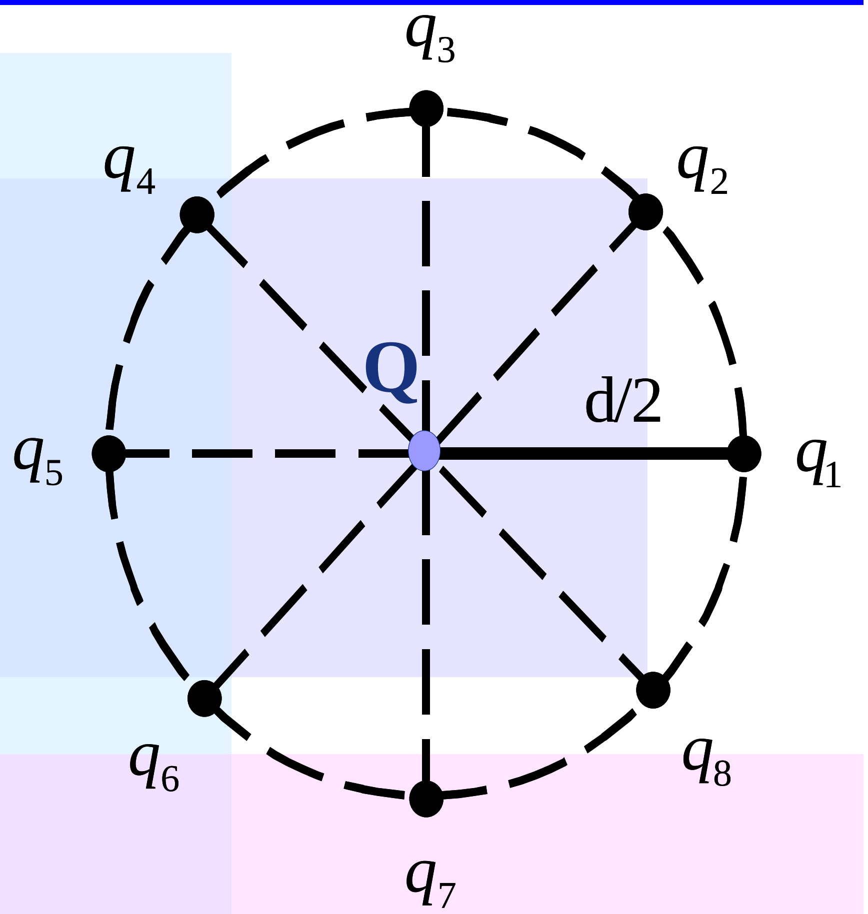
Calcular momento dipolar si:

$$Q = -\sum_{i=1}^{\infty} q_i$$



Ejemplo

$$Q = -\sum_{i=1}^{\infty} q_i$$



Sol^n

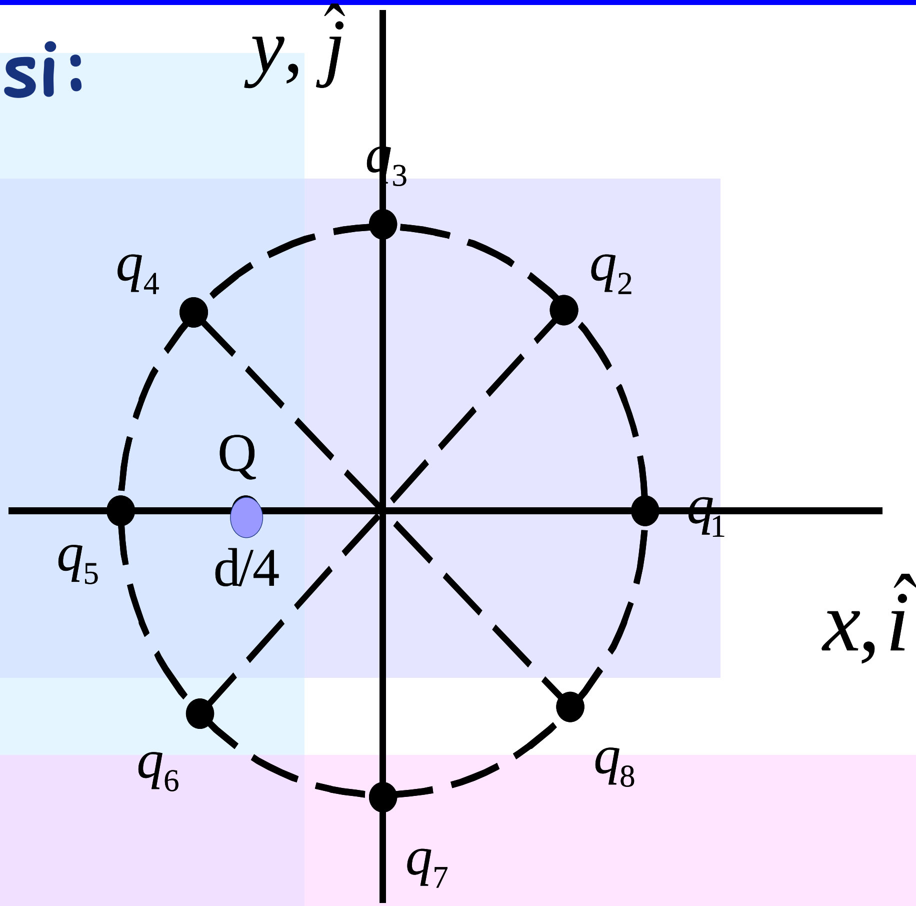
$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{8} q_i \times \vec{r}_i + Q \times 0 = 0$$

Ejemplo

Calcular momento dipolar si:

$$Q = -\sum_{i=1}^{\infty} q_i$$

y carga Q descentrada.



Ejemplo

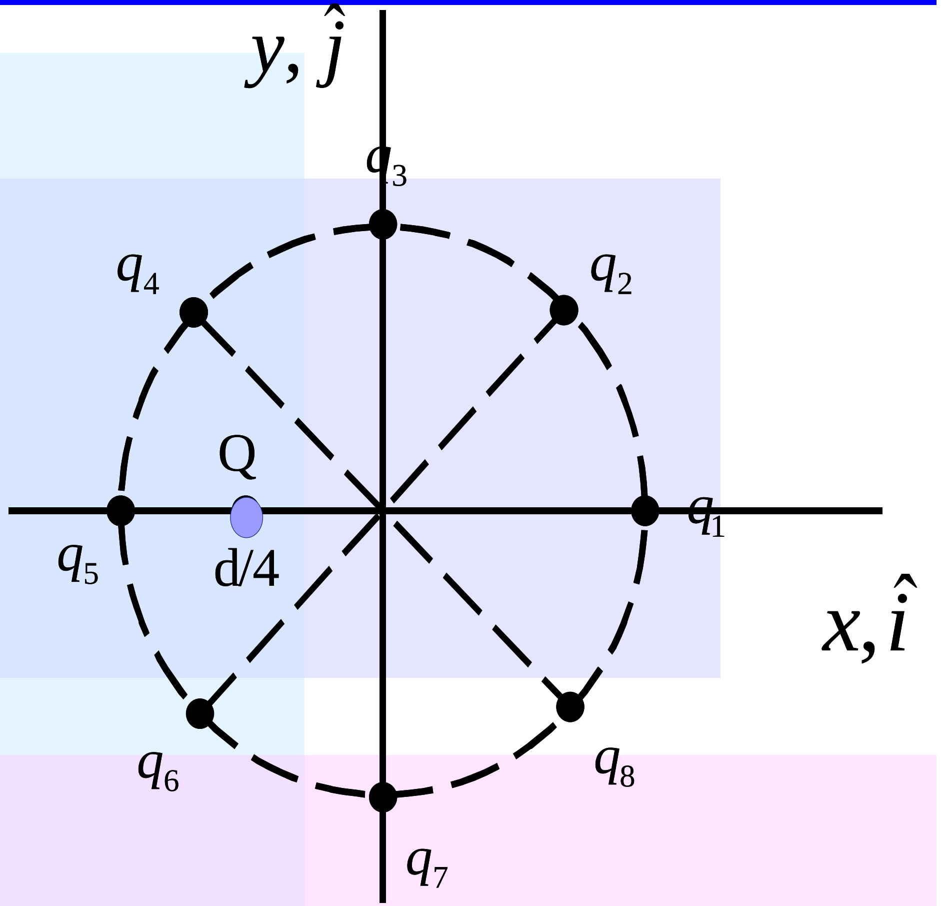
Carga descentrada.

$$Q = -\sum_{i=1}^{\infty} q_i$$

Sol^n

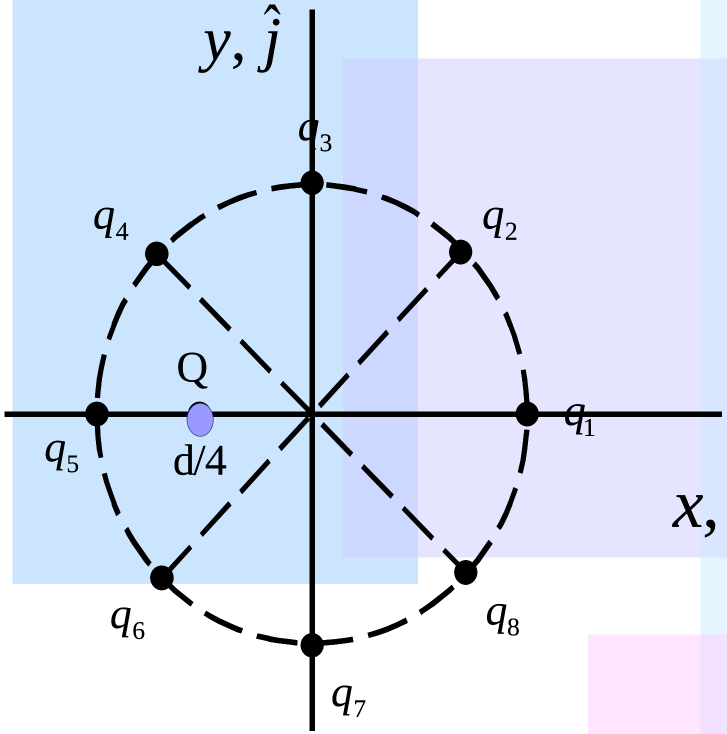
$$\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i + Q\left(-\frac{d}{4}\right)\hat{i}$$

$$\vec{p} = -Q\,\frac{d}{4}\,\hat{i}$$

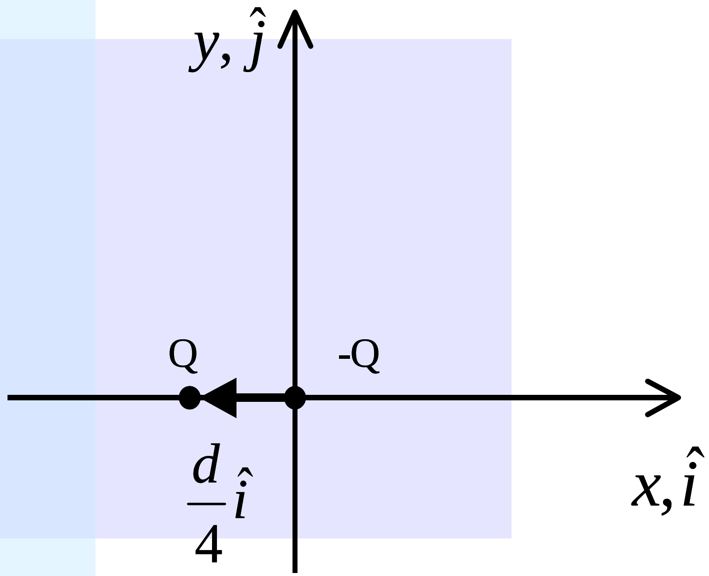


Ejemplo

Desde cerca



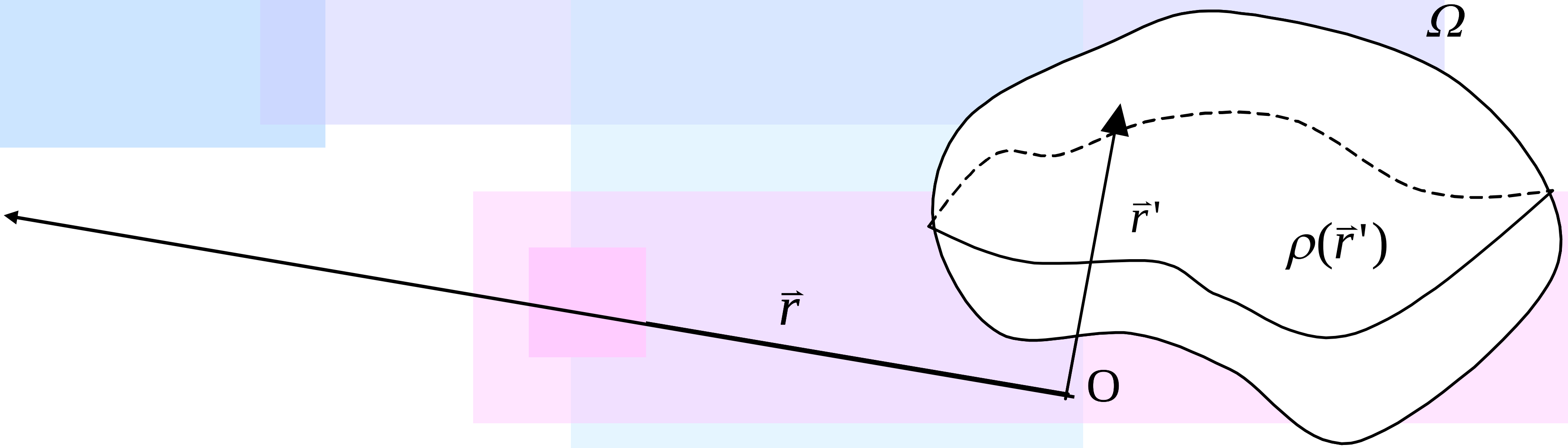
Desde lejos



$$\vec{p} = -Q\,\frac{d}{4}\,\hat{i}$$

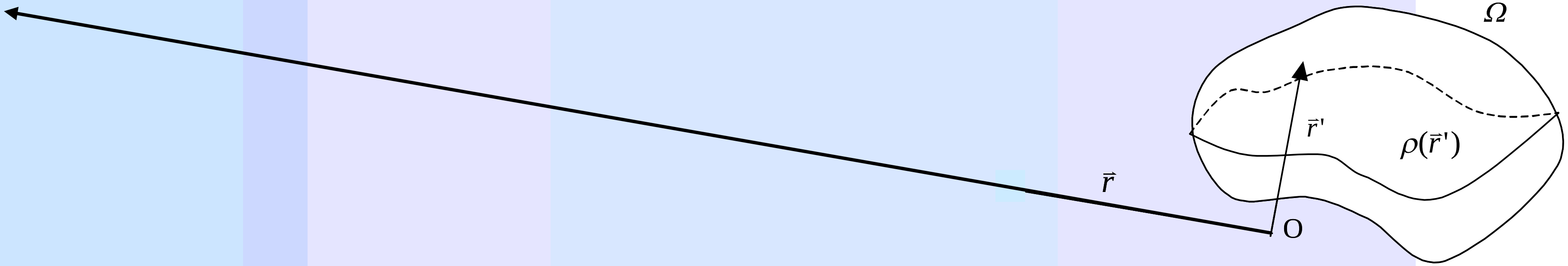
Momento dipolar de distribución volumétrica

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n} q_k \vec{r}_k \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \iiint \vec{r}\,' dq' = \iiint_{\Omega} \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')\, dv'$$



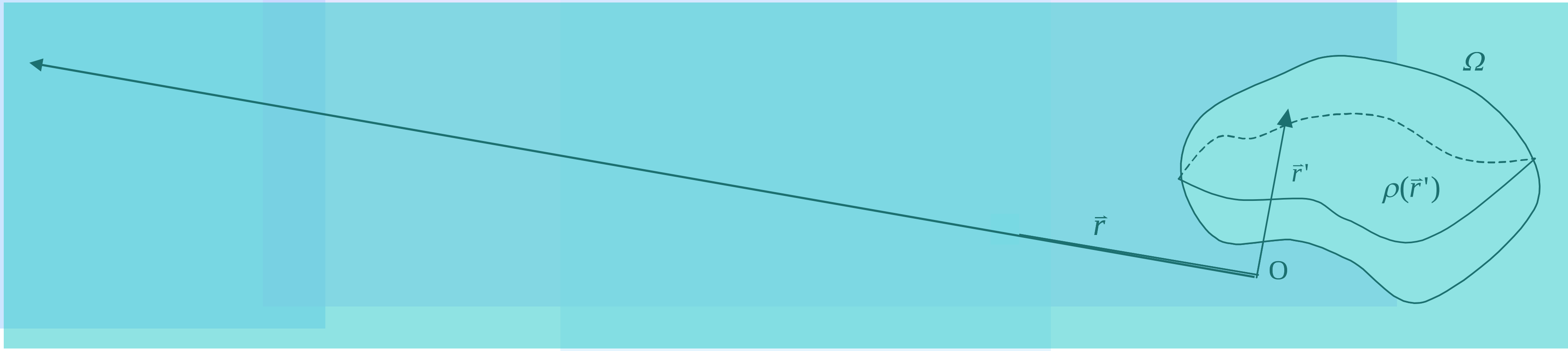
Momento dipolar de distribución volumétrica

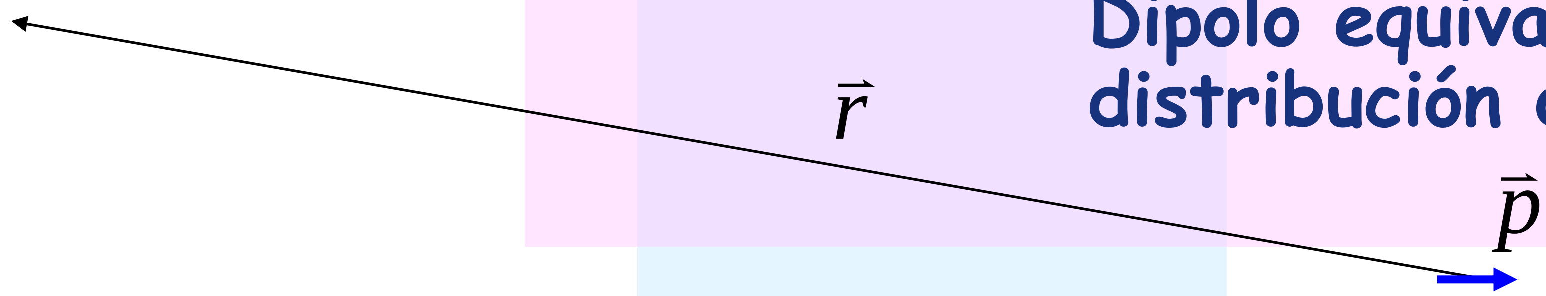
$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n} q_k \vec{r}_k \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \iiint \vec{r}'\,dq' = \iiint_{\Omega} \vec{r}'\rho(\vec{r}')\,dv'$$



Momento dipolar de distribución volumétrica

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n} q_k \vec{r}_k \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \iiint \vec{r}'\,dq' = \iiint_{\Omega} \vec{r}'\rho(\vec{r}')\,dv'$$





Dipolo equivalente de distribución de carga

Potencial a grandes distancias

La expresión del potencial de una densidad de carga es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')dv}{\| \vec{r} - \vec{r}\,' \|}$$

Si $\|\vec{r}\| \gg \|\vec{r}\,'\| \Rightarrow \dfrac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} = \dfrac{1}{\|\vec{r}\|} + \dfrac{\vec{r} \bullet \vec{r}\,'}{\|\vec{r}\|^3} + TOS$

Potencial a grandes distancias

$$\Rightarrow V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\|\vec{r}\|}dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\vec{r}\bullet\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\|^3}\rho(\vec{r}\,')dv' + TOS$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\|\vec{r}\|}\iiint \rho(\vec{r}\,')dv' + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}\bullet}{\|\vec{r}\|^3}\underbrace{\iiint \vec{r}\,'\rho(\vec{r}\,')dv'}_{\vec{p}} + TO$$

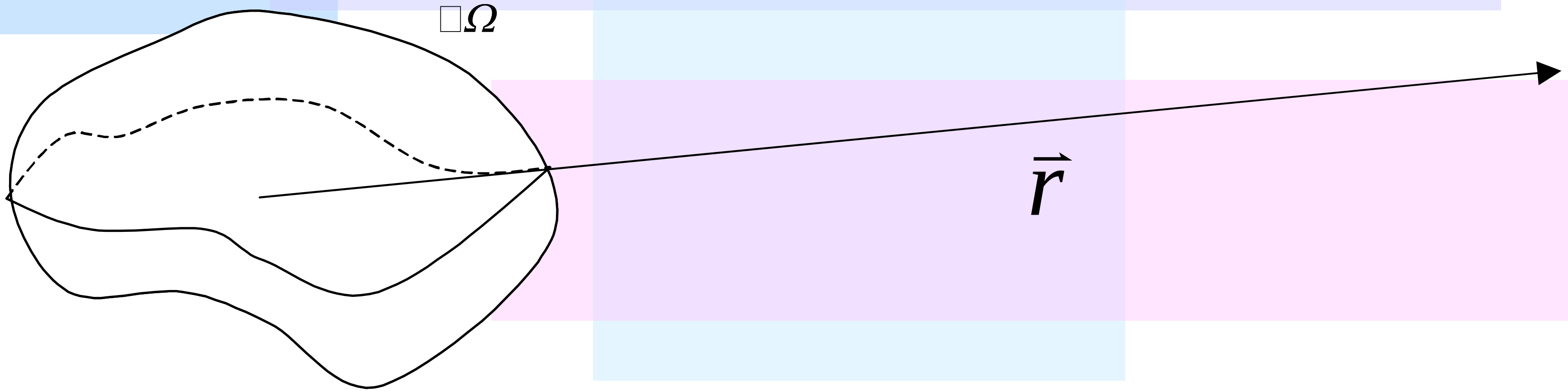
$$\therefore V(\vec{r}) = \frac{Q_{Total}}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r}\bullet\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^3} + TOS$$

$$\therefore V(\vec{r}) \approx \frac{Q_{Total}}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r}\bullet\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^3}$$

Potencial a grandes distancias

Luego para grandes distancias el efecto de una distribución de carga puede asimilarse a una carga concentrada Q_{Total} mas un dipolo $\vec{p}$:

$$V(\vec{r}) \approx \frac{Q_{Total}}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\vec{r}\right\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 \left\|\vec{r}\right\|^3}$$



A Grandes Distancias

Configuración	**Potencial Eléctrico**	**Campo Eléctrico**
Una carga q•	$\propto 1/r$	$\propto 1/r^2$
Dos cargas Dipolo q• -q•	$\propto 1/r^2$	$\propto 1/r^3$
Cuatro cargas Dos dipolos q• -q• -q• q•	$\propto 1/r^3$	$\propto 1/r^4$