



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO

Clase 11

Fuerza Electromotriz y Energía

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



INDICE

- Fuerza electromotriz FEM
- Energía en términos de campo
- Fuerza eléctrica y energía



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



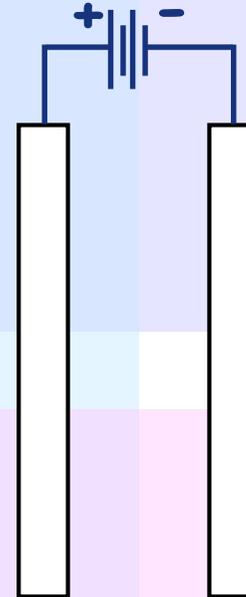
Fuerza electromotriz

¿Existen dispositivos capaces de mantener una diferencia de potencial entre dos conductores?

Si

Esto se logra mediante una fem o batería, la cual es un dispositivo que tiene la capacidad para mantener la diferencia de potencial constante entre sus bornes

$$V_{+Q} - V_{-Q} = \Delta V = V_0 \text{ [volts]}$$





Fuerza electromotriz

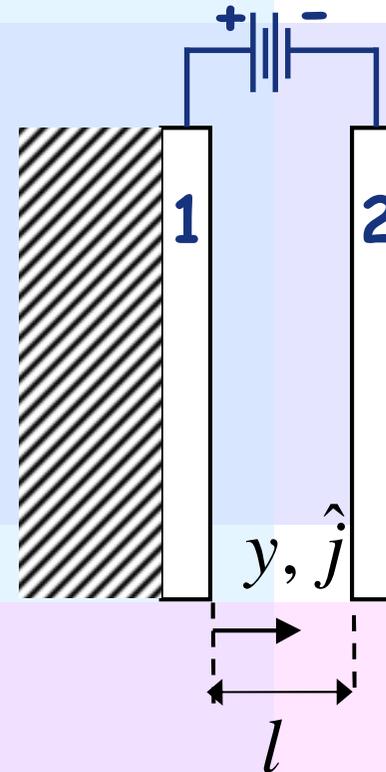
Volviendo al ejemplo tenemos

$$V_1 - V_2 = - \int_l^0 \vec{E}_{\text{int}} \cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = V_0 = -E_0 y \Big|_l^0 = El$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{l} \hat{j}$$

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \text{ [volts]}$$



Notar que el campo es función de la distancia de separación entre las placas



Fuerza electromotriz

Hagamos $l=x$ variable

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{V_0}{x} \hat{j}$$

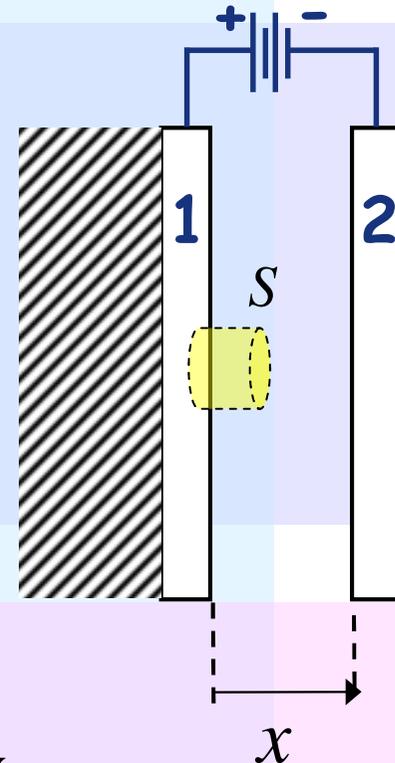
Usando la Ley de Gauss

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \quad y \quad Q_T = \sigma \Delta S$$

$$\oiint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_{tapa} \frac{V_0}{x} \hat{j} \cdot ds \hat{j} = \frac{V_0}{x} \Delta S$$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{x} \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0} \quad \therefore \sigma = \frac{\epsilon_0 V_0}{x}$$

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \text{ [volts]}$$



Notar que $\sigma = \sigma(x)$



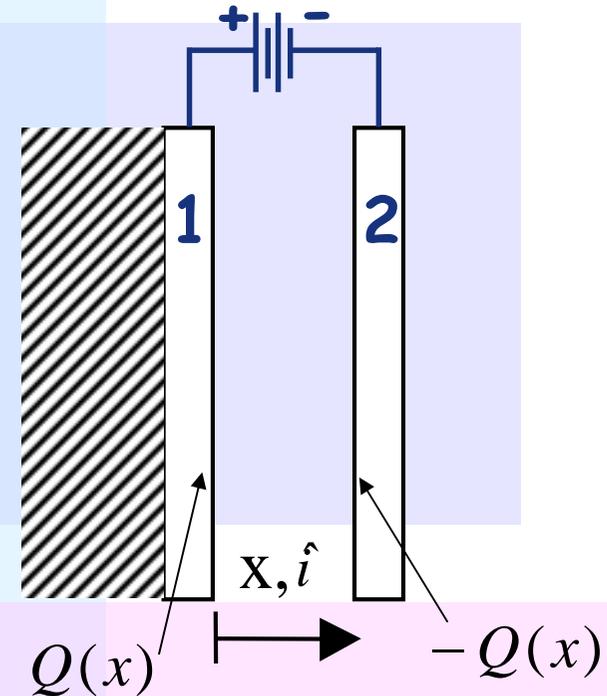
Fuerza electromotriz

$$\Delta V = V_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} x \Rightarrow \sigma(x) = \frac{\epsilon_0 V_0}{x}$$

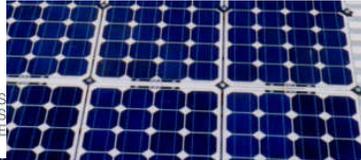
La carga en los conductores es

$$Q(x) = A \frac{\epsilon_0 V_0}{x}$$

$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \text{ [volts]}$$



Si x varia, entonces la densidad de carga varia para satisfacer la condición de diferencia de potencial constante. Esta tarea la realiza la batería o fem.



Fuerza electromotriz

Calculemos nuevamente la fuerza producida entre las placas

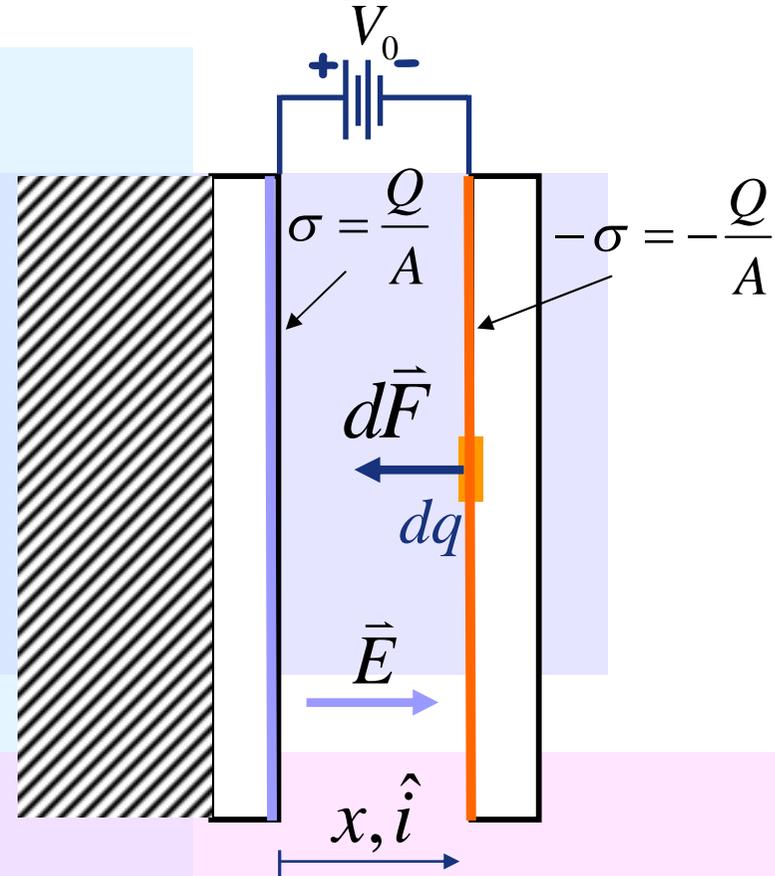
$$d\vec{F} = \vec{E}dq \quad \vec{E} = \frac{\sigma(x)}{2\epsilon_0} \hat{j}$$

$$\vec{F} = \iint_A d\vec{F} = \iint_A \vec{E}dq = \iint_A \vec{E}(-\sigma)ds$$

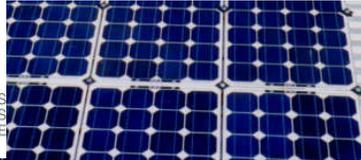
$$\vec{F} = -\iint_A \frac{V_0}{x} \hat{j} \sigma(x) dydz = -\frac{V_0 \sigma(x)}{x} A \hat{j}$$

$$\sigma(x) = \frac{\epsilon_0 V_0}{x}$$

$$\therefore \vec{F} = -\frac{\epsilon_0 A V_0^2}{x^2} \hat{j}$$



Fuerza es función de x



Fuerza electromotriz

Expresemos esto en términos de la carga

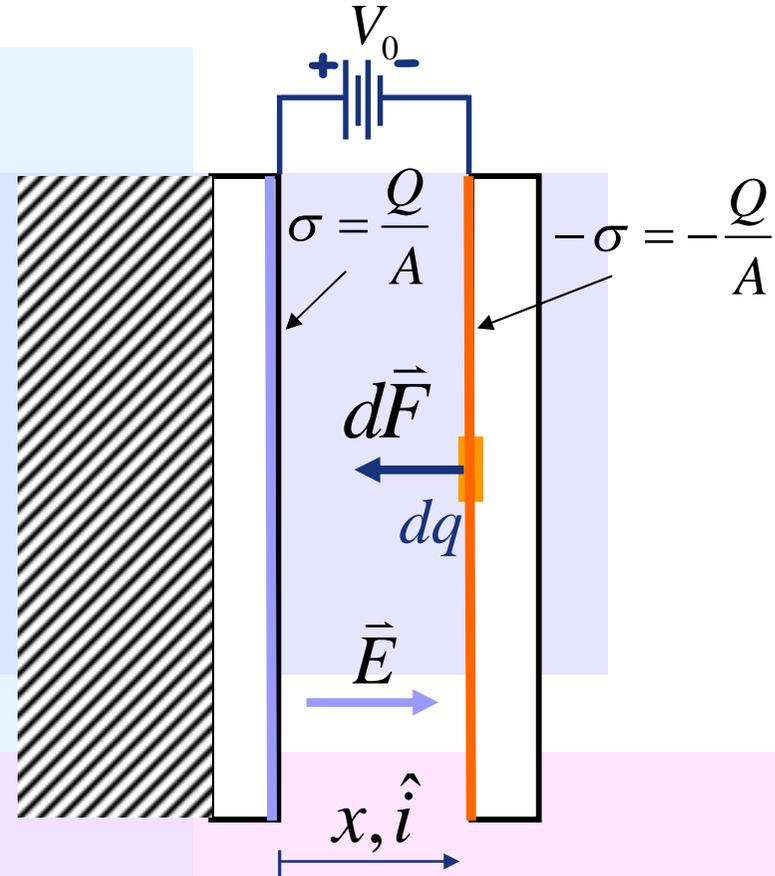
$$\vec{F} = -\frac{\epsilon_0 A V_0^2}{x^2} \hat{j} \quad \sigma(x) = \frac{\epsilon_0 V_0}{x}$$

$$\vec{F} = -\frac{A \epsilon_0 V_0}{x} \times \frac{A \epsilon_0 V_0}{x} \times \frac{1}{A \epsilon_0} \hat{j}$$

$$\vec{F} = -A \sigma(x) \times A \sigma(x) \times \frac{1}{A \epsilon_0} \hat{j}$$

$$\vec{F} = -\frac{Q^2(x)}{A \epsilon_0} \hat{j}$$

Fuerza es función de x



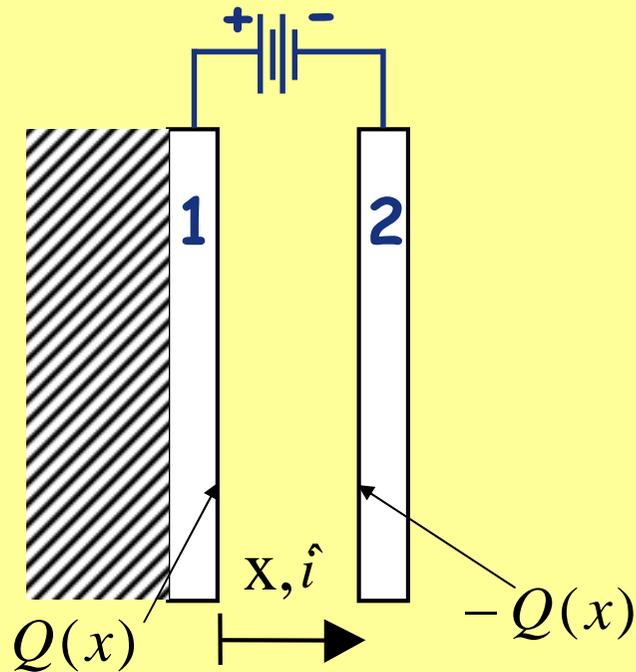


Fuerza electromotriz

Si hay fem

$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\epsilon_0 A} \hat{i} \quad \text{donde } Q(x) = A \frac{\epsilon_0 V_0}{x}$$

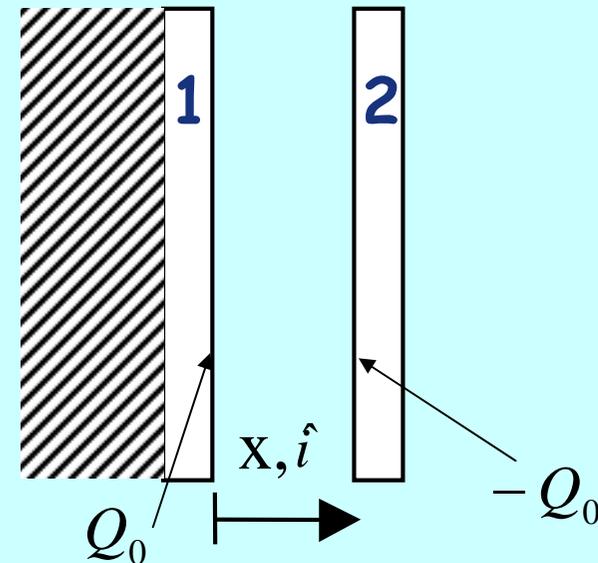
$$V_1 - V_2 = \Delta V = V_0 \quad \text{[volts]}$$

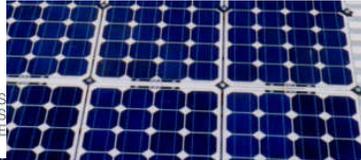


Si no hay fem

$$\vec{F} = -\frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 A} \hat{i}$$

$$V_1 - V_2 = \Delta V = Ex = \frac{Q_0}{A\epsilon_0} x \quad \text{[volts]}$$



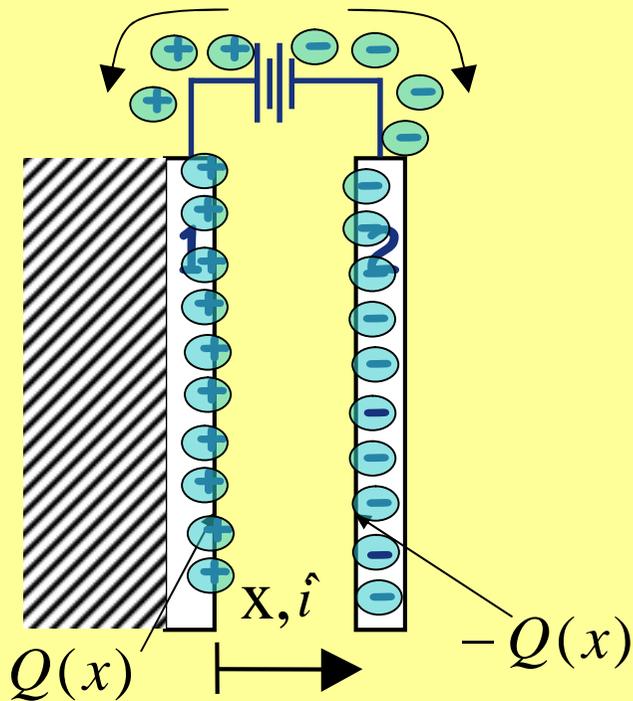


Fuerza electromotriz

Si hay fem

$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\epsilon_0 A} \hat{i} \quad \text{donde } Q(x) = A \frac{\epsilon_0 V_0}{x}$$

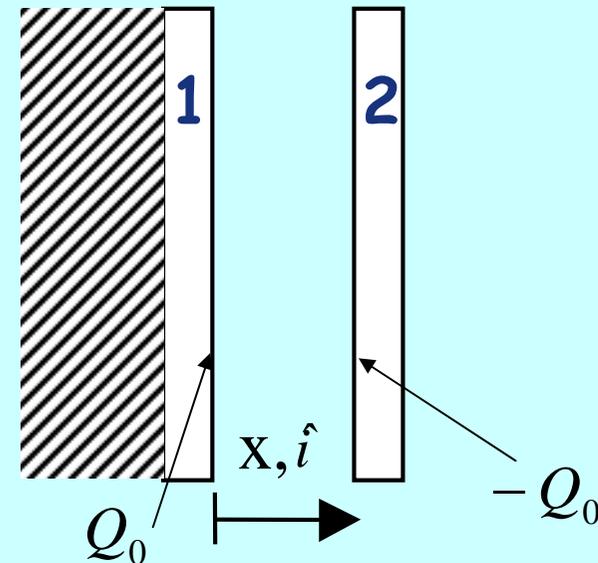
Trabajo realizado por fem

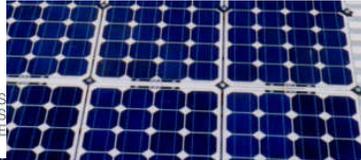


Si no hay fem

$$\vec{F} = -\frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 A} \hat{i}$$

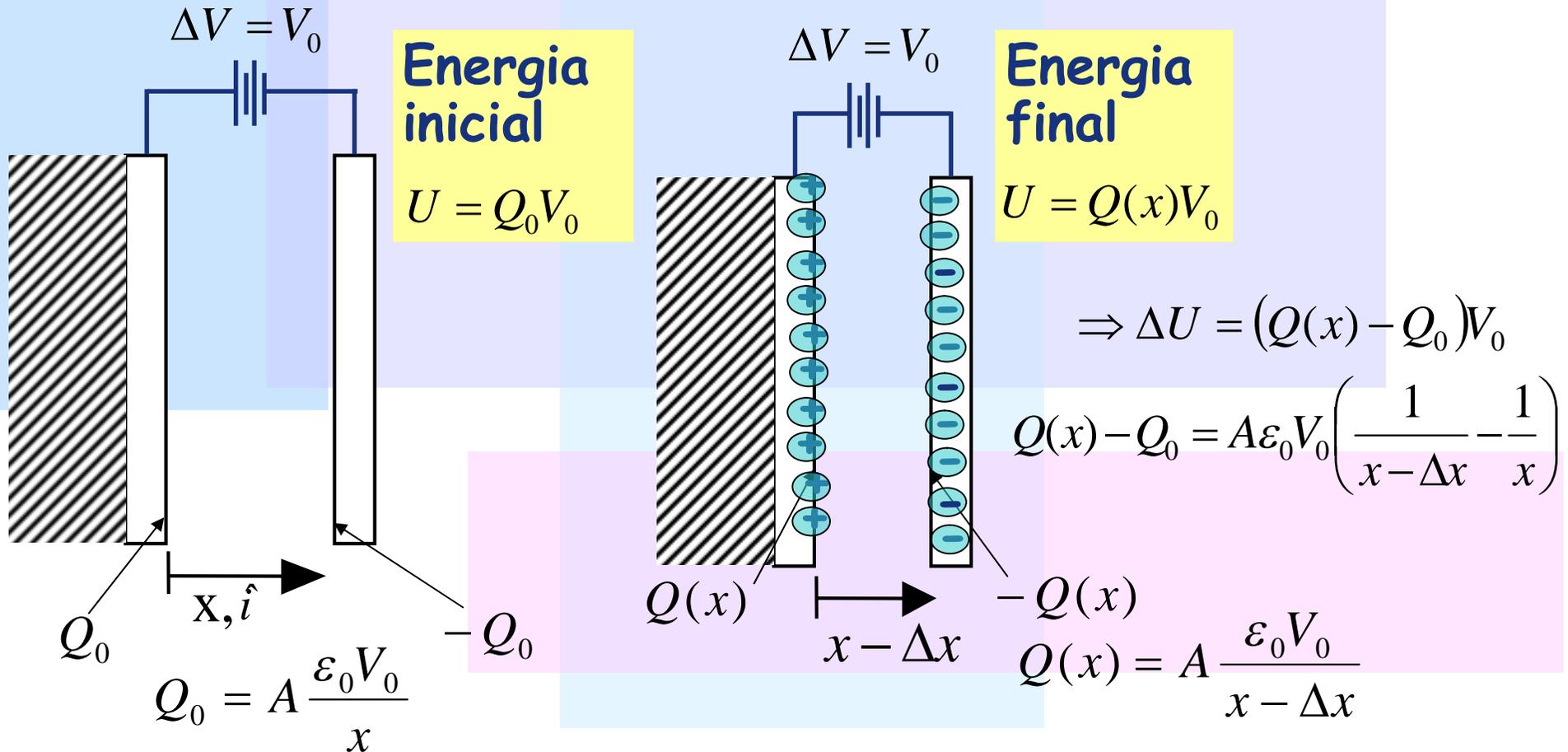
$$V_1 - V_2 = \Delta V = Ex = \frac{Q_0}{A\epsilon_0} x \quad \text{[volts]}$$





Trabajo de la Fuerza electromotriz

$$\vec{F}(x) = -\frac{Q(x)^2}{\epsilon_0 A} \hat{i} \quad \text{donde} \quad Q(x) = A \frac{\epsilon_0 V_0}{x}$$





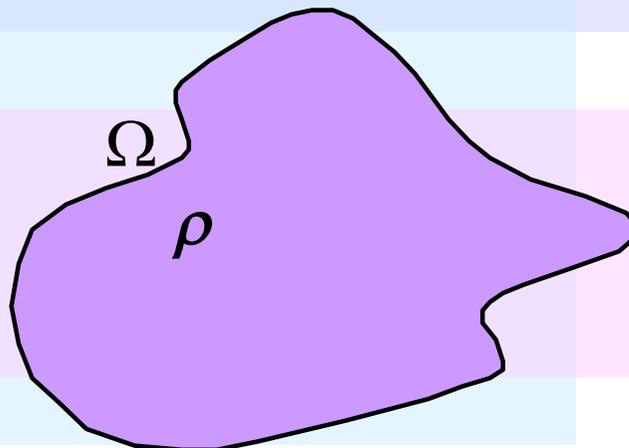
Energía en términos de Campos

Habíamos visto que en distribuciones de carga en volumen

$$W = U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) V(\vec{r}) dv$$

pero

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho(\vec{r}) \Rightarrow U = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} (\nabla \cdot \vec{D}) V dv$$





Energía en términos de Campos

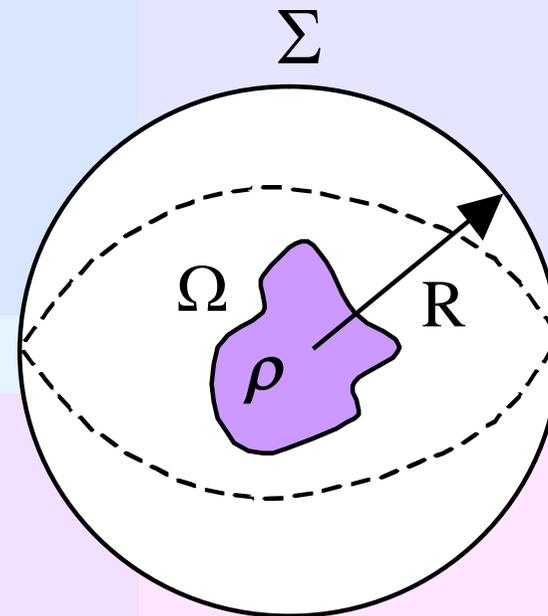
ρ será nulo en todo punto fuera del volumen Ω , luego podemos extender el espacio de integración a un espacio mayor, por ejemplo una esfera Σ de radio R

$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} (\nabla \cdot \vec{D}) V dv$$

y usando

$$\nabla \cdot f\vec{A} = \vec{A} \cdot \nabla f + f(\nabla \cdot \vec{A})$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \nabla \cdot [V\vec{D}] dv - \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$





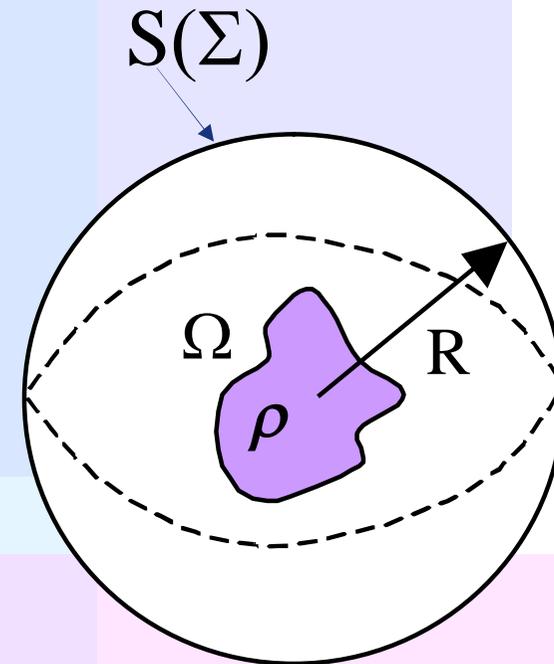
Energía en términos de Campos

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\iiint_{\Sigma} \nabla \cdot [V\vec{D}] dv = \oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} \oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \cdot d\vec{s} - \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$

pero $V \propto \frac{1}{r}$ **y** $\vec{D} \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow V\vec{D} \propto \frac{1}{r^3}$



si $R \rightarrow \infty$

$$\oiint_{S(\Sigma)} V\vec{D} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0 \Rightarrow U = -\frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$



Energía en términos de Campos

$$\Rightarrow U = -\frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot (\nabla V) dv$$

Aplicando

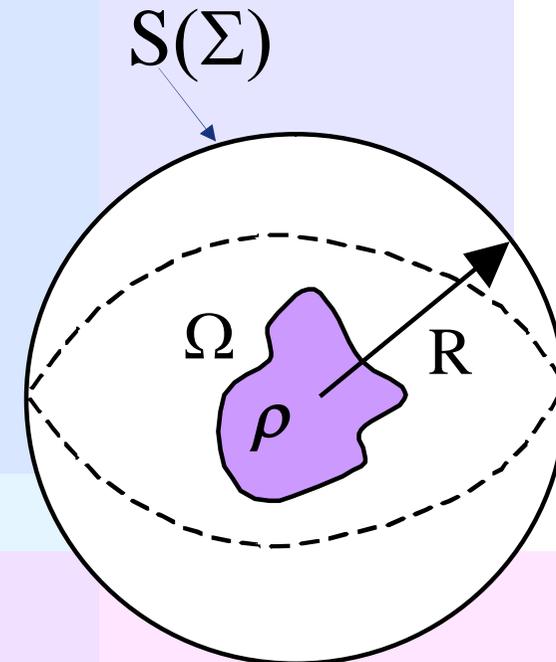
$$\nabla V = -\vec{E}$$

$$\therefore U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

Aquí Σ es todo el espacio

$$W_e = \frac{1}{2} \vec{D} \cdot \vec{E}$$

es la densidad de energía electrostática

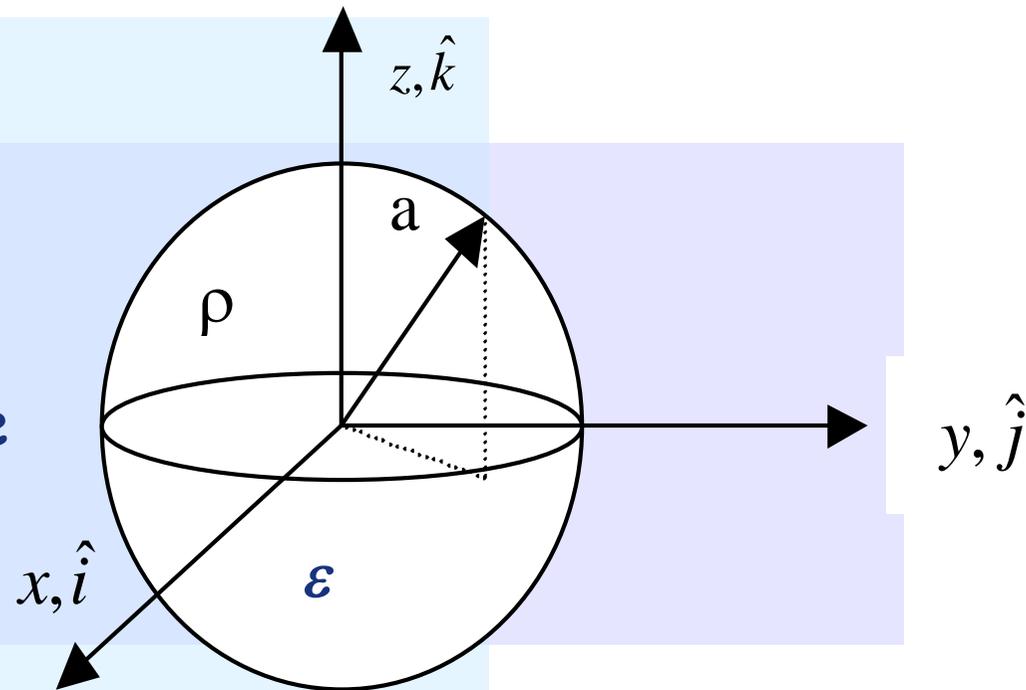


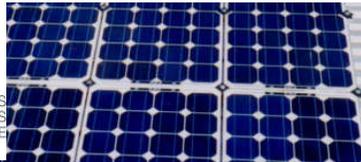


Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

Esfera dieléctrica
cargada con densidad ρ .

Si $\rho = \rho_0$ es constante se
pide calcular la energía
electrostática del
sistema





Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

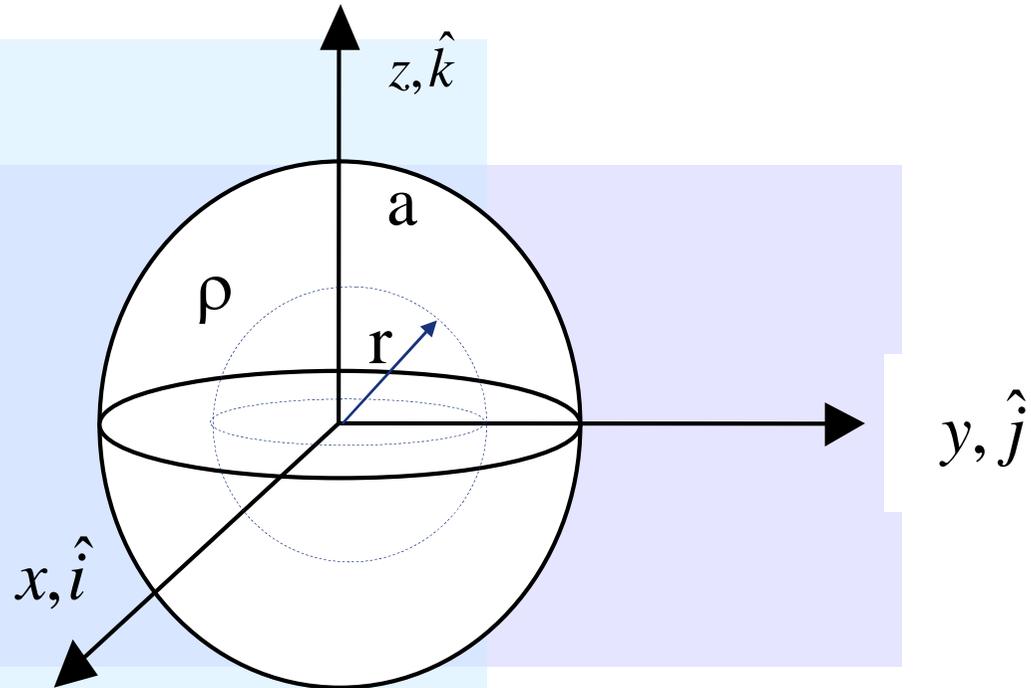
Ejemplo

Para $r < a$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0}{3} r \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon} = \frac{\rho_0}{3\epsilon} r \hat{r}$$





Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

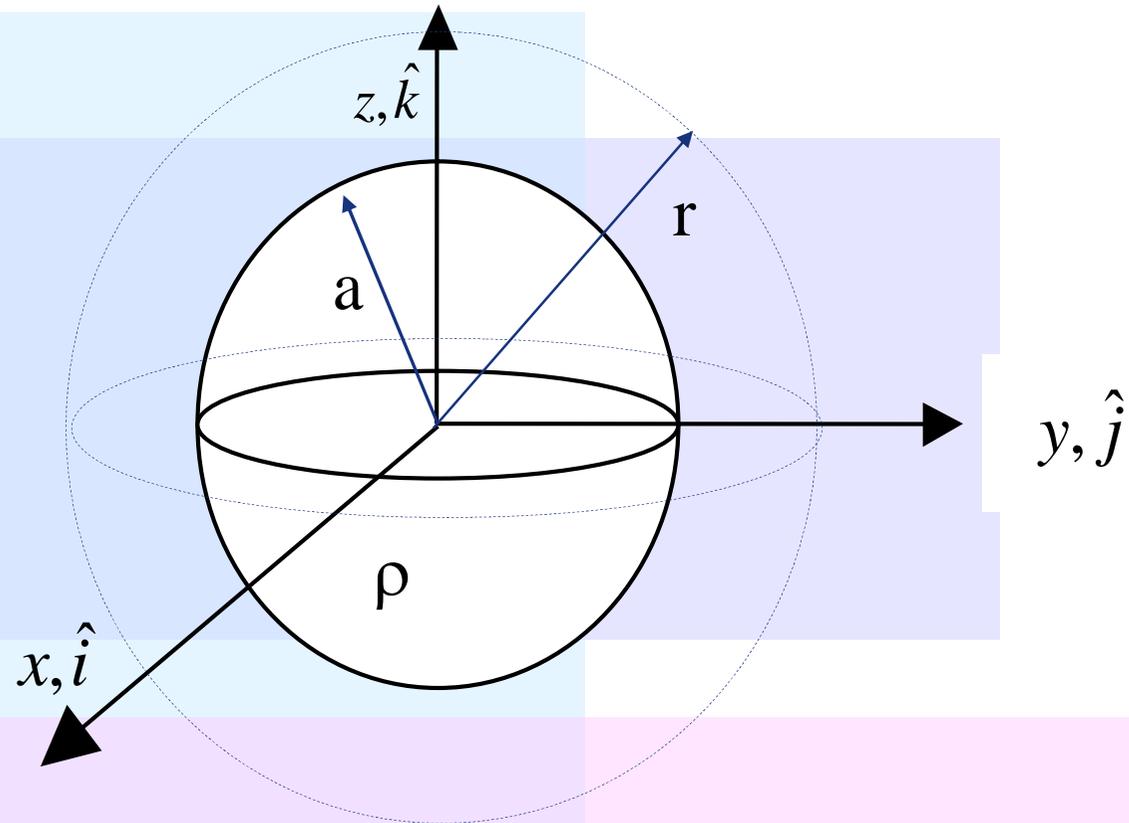
Ejemplo

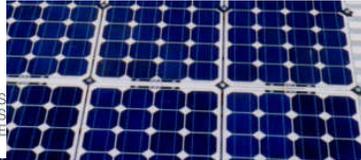
Para $r \geq a$

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{total}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \frac{\rho_0}{3} \frac{a^3}{r^2} \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho_0 a^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \hat{r}$$



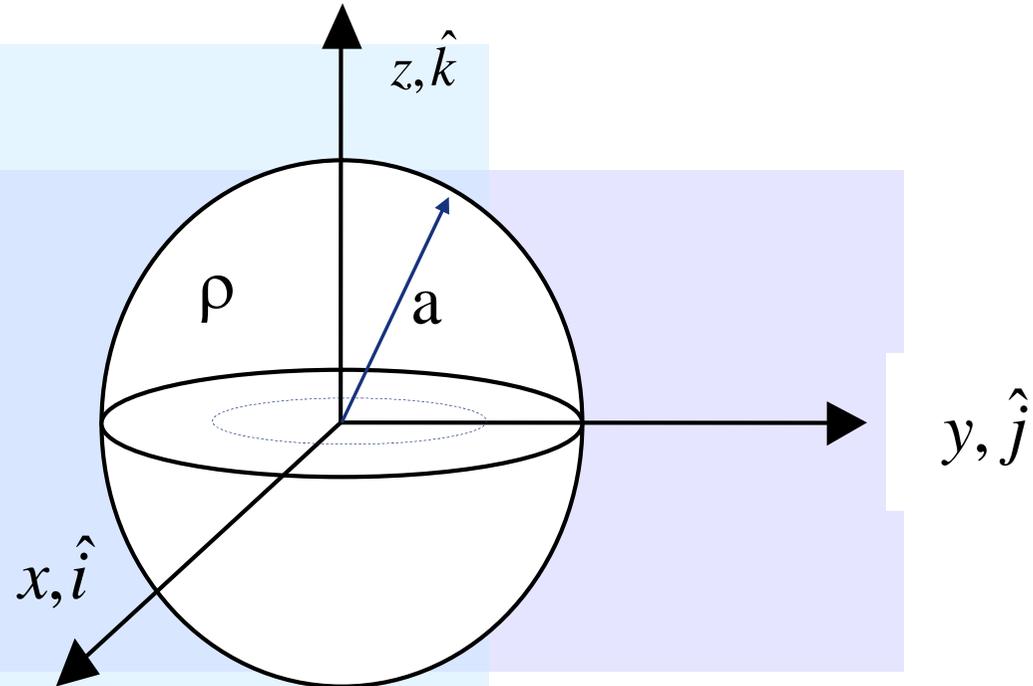


Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

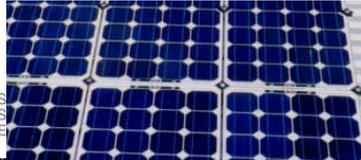
Ejemplo

Ahora aplicamos la fórmula

$$\therefore U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$



$$U = \frac{1}{2} \iiint_{\text{esfera}} \vec{D} \cdot \vec{E} dV + \frac{1}{2} \iiint_{\text{resto}} \vec{D} \cdot \vec{E} dV$$

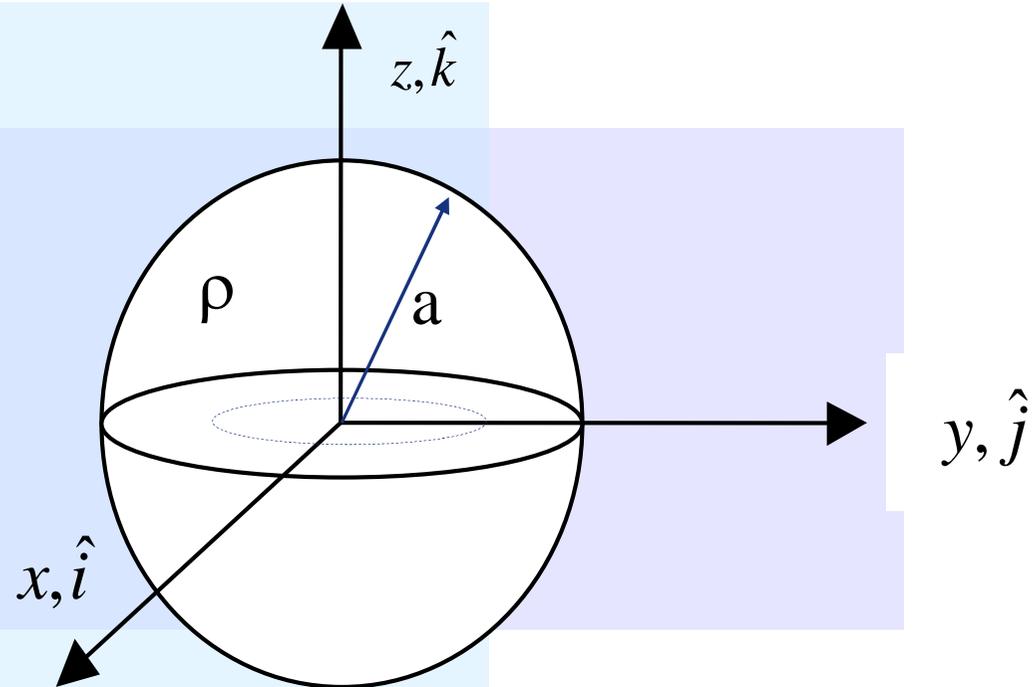


Ejemplo de Fuerza Eléctrica y Energía

Ejemplo

$$\therefore U = \frac{1}{2} \iiint_{\Sigma} \vec{D} \cdot \vec{E} dv$$

Obtenemos



$$\Rightarrow U = \frac{2\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon} + \frac{10\pi\rho_0^2 a^5}{45\epsilon_0} [J]$$