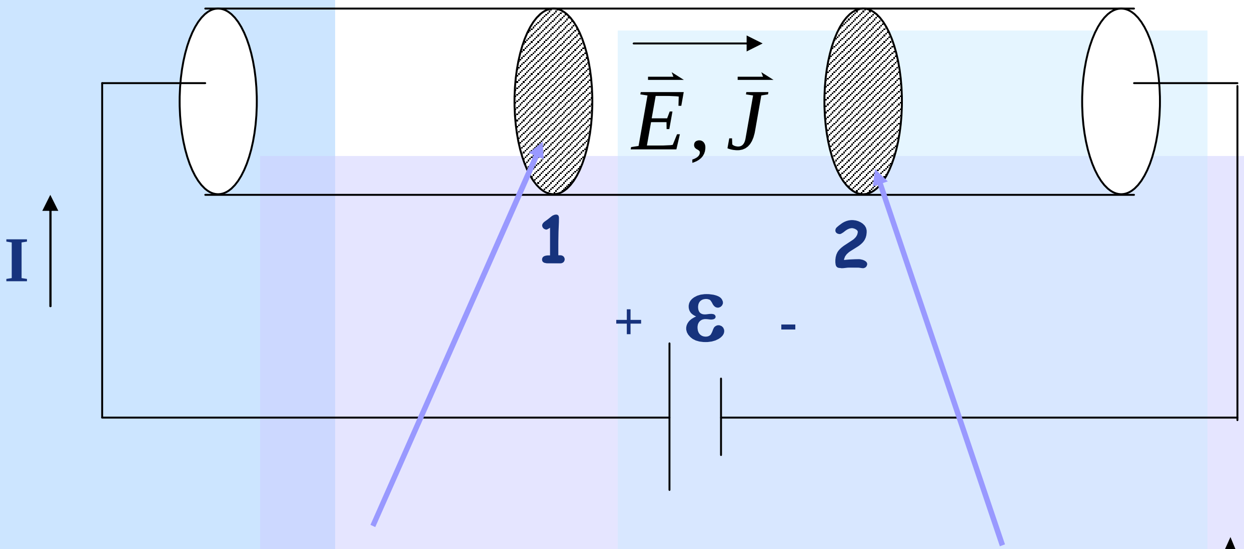
FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO
Clase 14
Corriente Eléctrica-III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

Efecto Joule



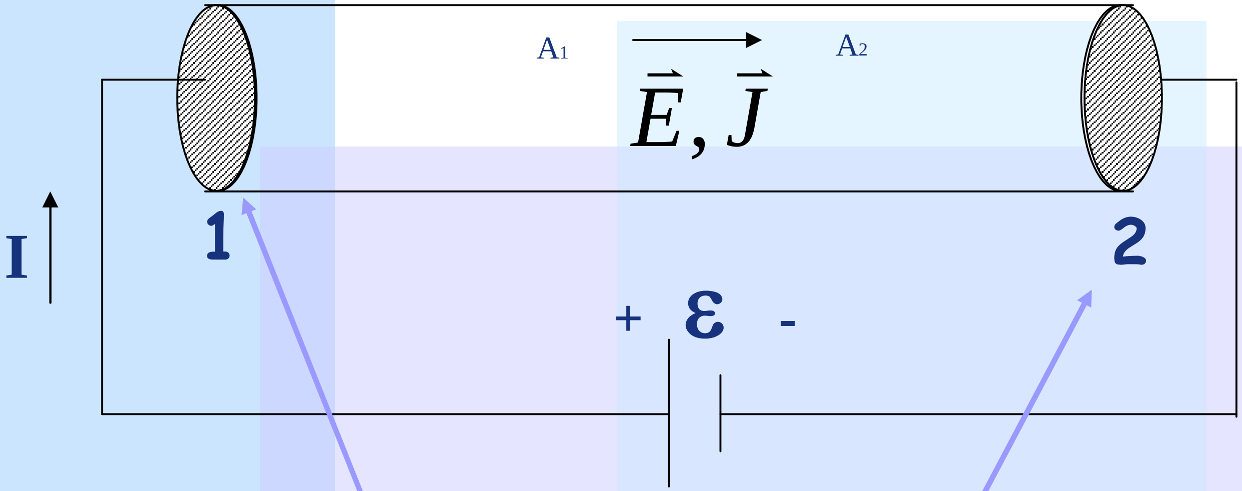
$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2$$

$$\Delta U = \Delta Q (V_1 - V_2)$$

Potencia es la derivada de la Energia

$$P = \frac{\Delta U}{\Delta t} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}(V_1 - V_2)$$

Efecto Joule

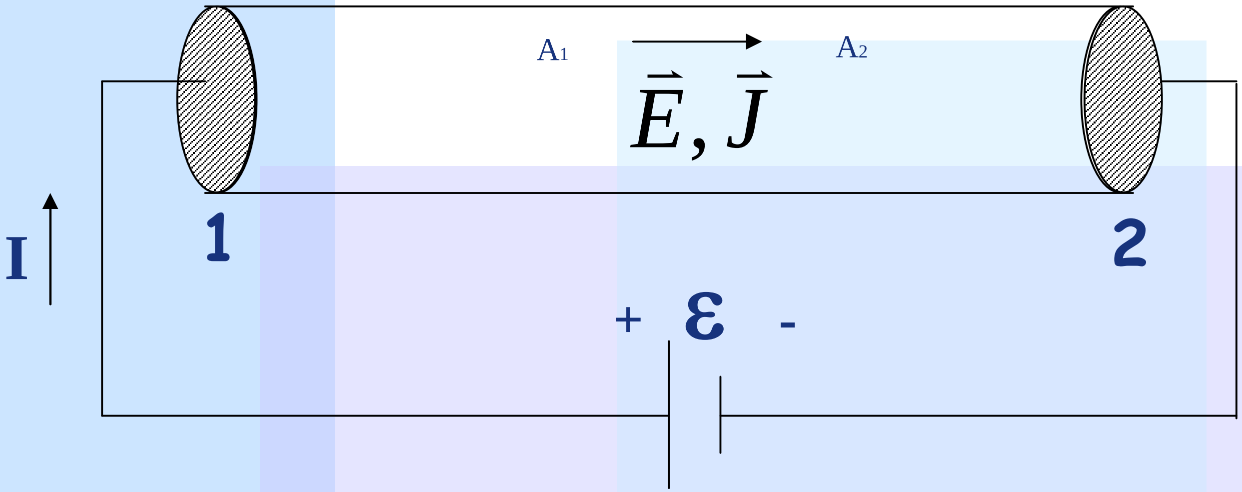


- Calor disipado
- Fem proporciona energía

Potencia es diferencia de potencial por corriente

$$\Rightarrow P = I\Delta V$$

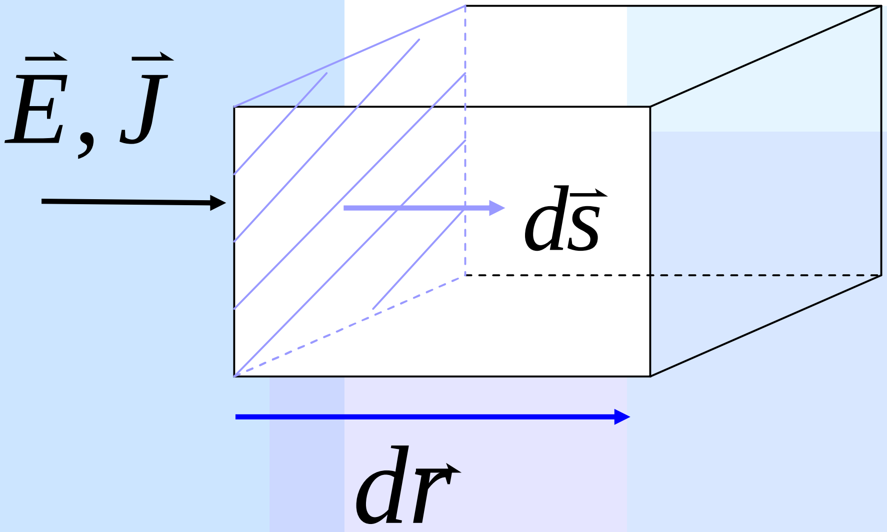
Efecto Joule



- Calor disipado
- Fem proporciona energía

$$\Delta V = RI \Rightarrow P = I \cdot R \cdot I = RI^2 \quad \text{ó} \quad P = \frac{\Delta V^2}{R}$$

Efecto Joule



$$dP = \Delta I \Delta V$$

$$dP = \overbrace{\left(\vec{J} \bullet d\vec{s}\right)}^{\Delta I} \times \overbrace{\left(\vec{E} \bullet d\vec{r}\right)}^{\Delta V}$$

$$d\vec{s} \cdot d\vec{r} = dv \quad \Rightarrow dP = \vec{J} \cdot \vec{E} \cdot dv$$

Potencia disipada en volumen Ω

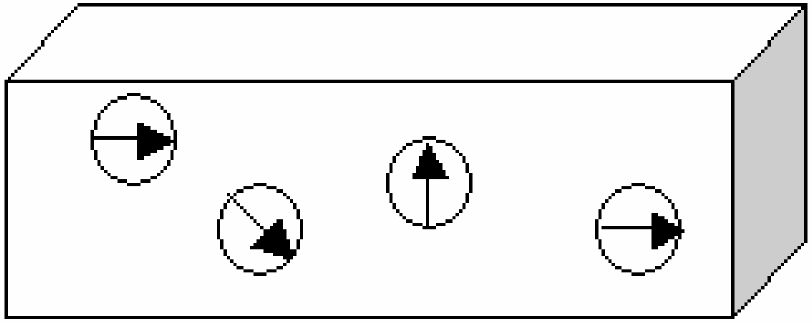
$$\therefore \qquad P = \iiint_{\Omega} \vec{J} \cdot \vec{E} \, dv$$

Resumen medios materiales

Dieléctricos

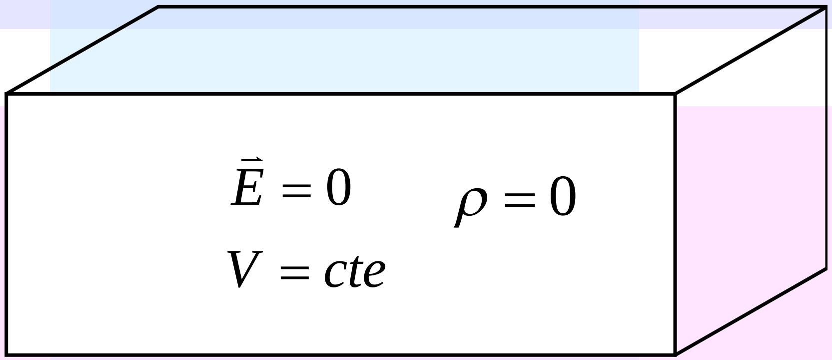
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$



Conductores

- Equilibrio electrostático



$$\vec{E} = 0 \qquad \rho = 0$$

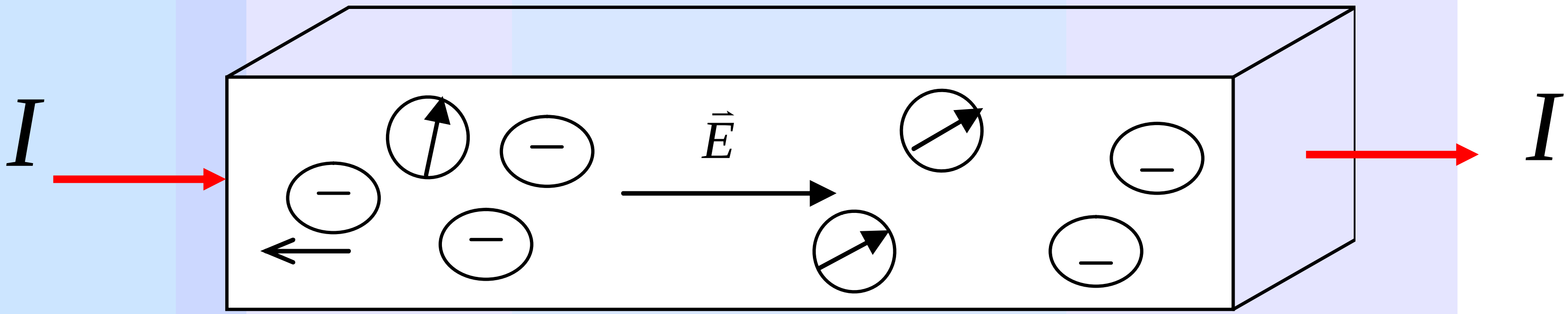
$$V = cte$$

Sólo hay carga superficial

Resumen medios materiales

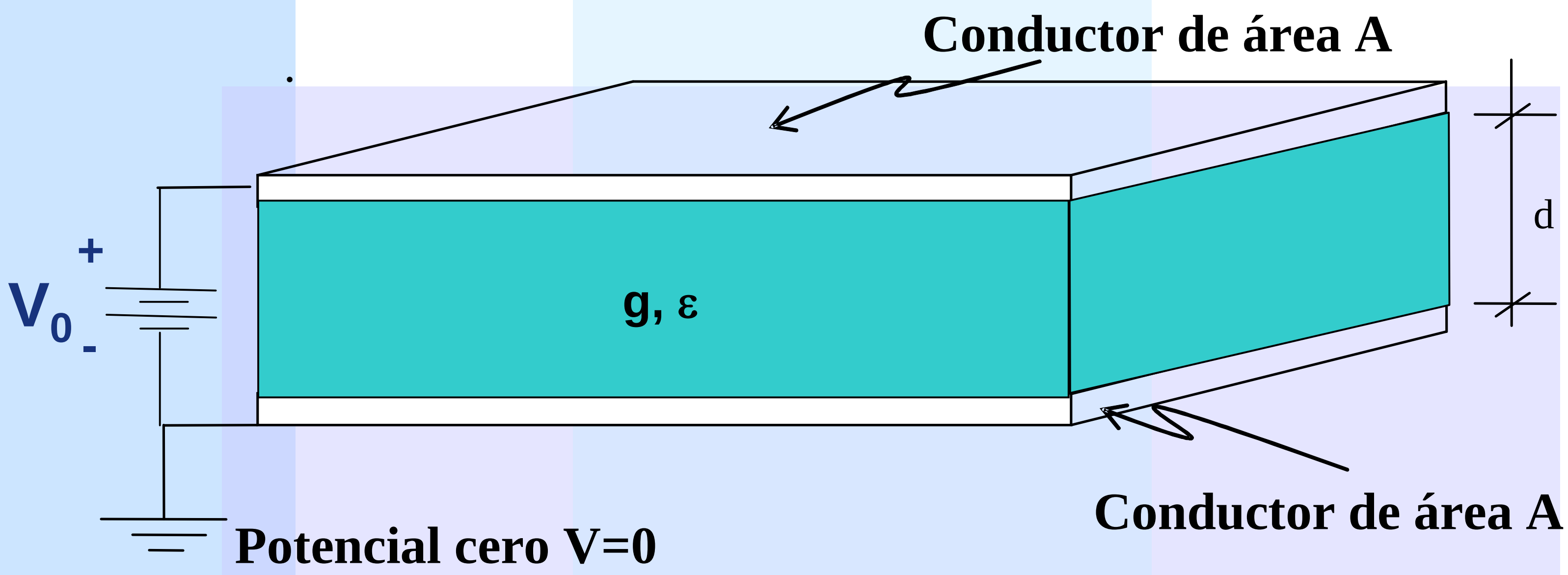
Conductores

- Equilibrio dinámico

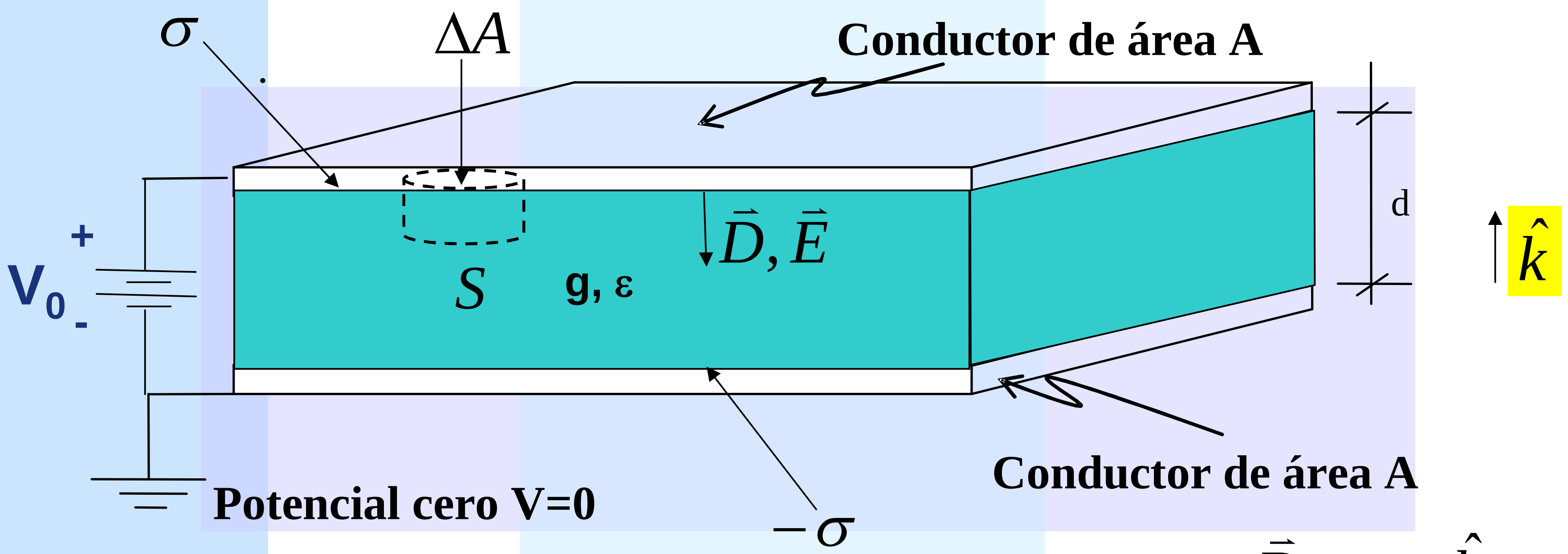


- Carga total por unidad de volumen es nula
- Puede haber dipolos y carga libre simultáneamente
- Material se caracteriza por g y ε

Ejemplo


Conductor de área A
d
+
V_0
-
g, ε
Conductor de área A
Potencial cero V=0

Ejemplo

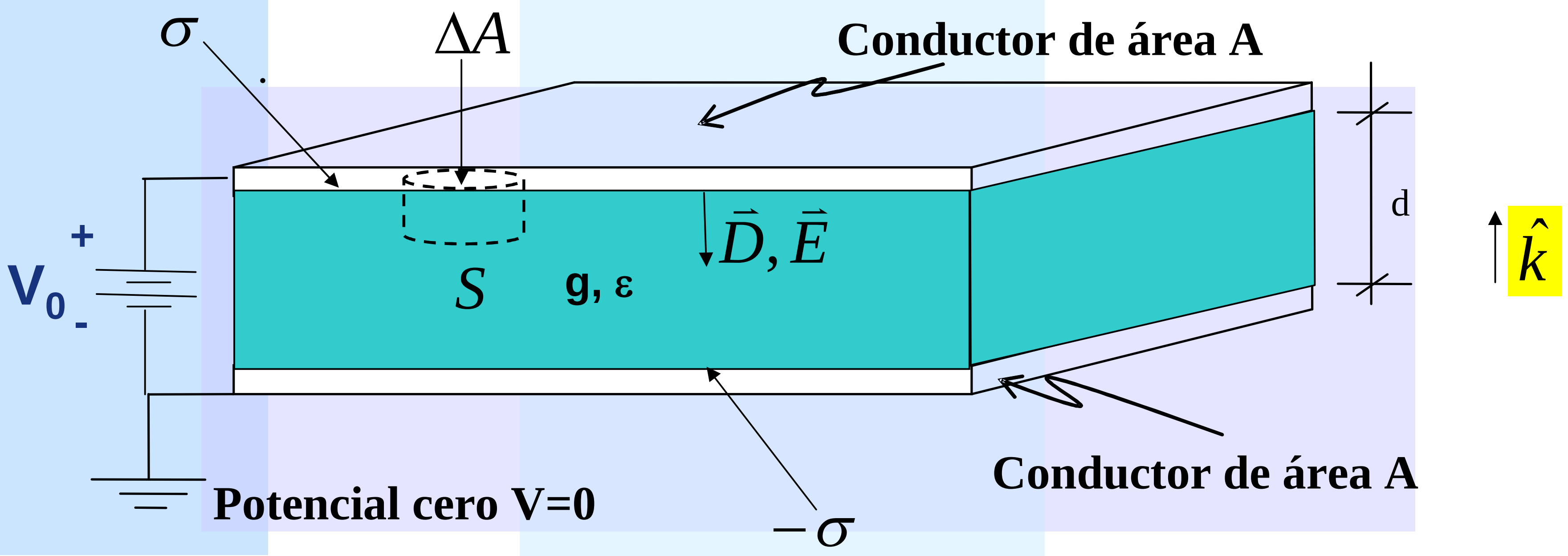


$$\vec{D} = -\sigma\,\hat{k}$$

$$\oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = Q_T \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} Q_T = \sigma \Delta A \\ \oiint_S \vec{D} \bullet d\vec{s} = D\Delta A \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$$

$$\vec{J} = -\frac{g\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$$

Ejemplo

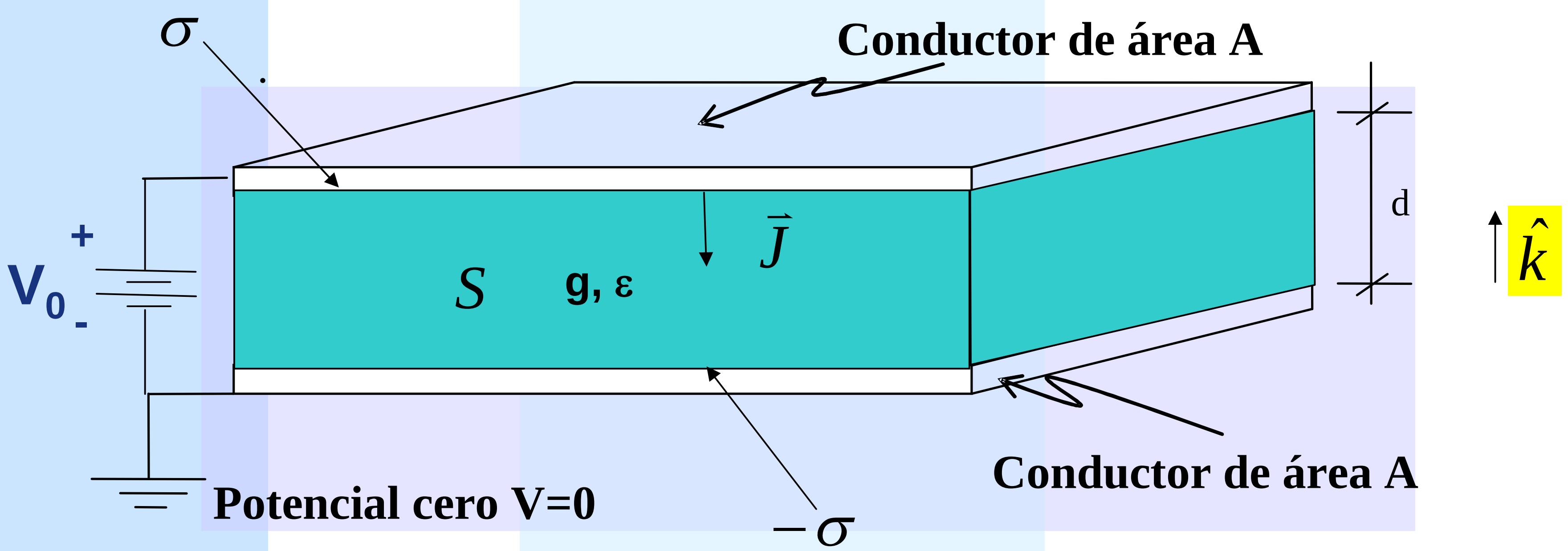


$$\Delta V = -\int \vec{E} \bullet dz\hat{k} \Rightarrow V_0 = \left\|\vec{E}\right\| d$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{V_0}{d} \Rightarrow \sigma = \frac{\varepsilon V_0}{d}$$

Ejemplo



$$\vec{J} = -\frac{g\sigma}{\varepsilon}\hat{k}$$

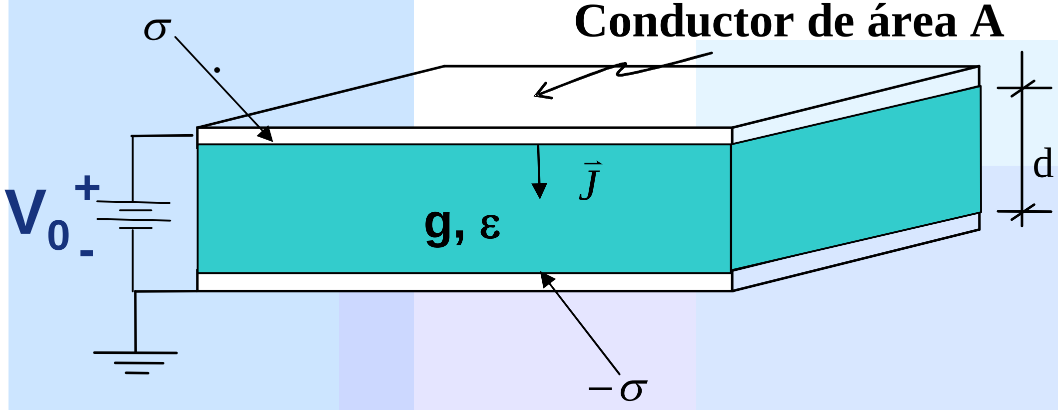
$$\sigma = \frac{\varepsilon V_0}{d}$$

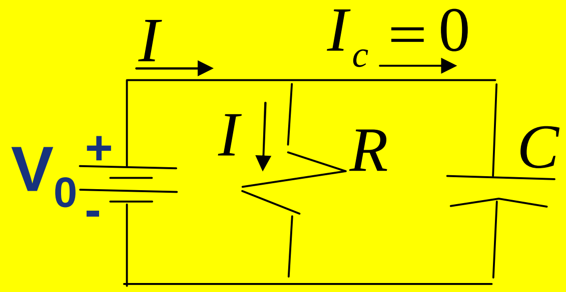
Corriente a través del medio material

$$I = \iint_A \vec{J} \bullet d\vec{s} = \iint_A -\frac{g\sigma}{\varepsilon}\hat{k} \bullet ds(-\hat{k}) \Rightarrow I = \frac{g\sigma}{\varepsilon}A$$

$$\therefore I = \frac{gAV_0}{d}$$

Ejemplo



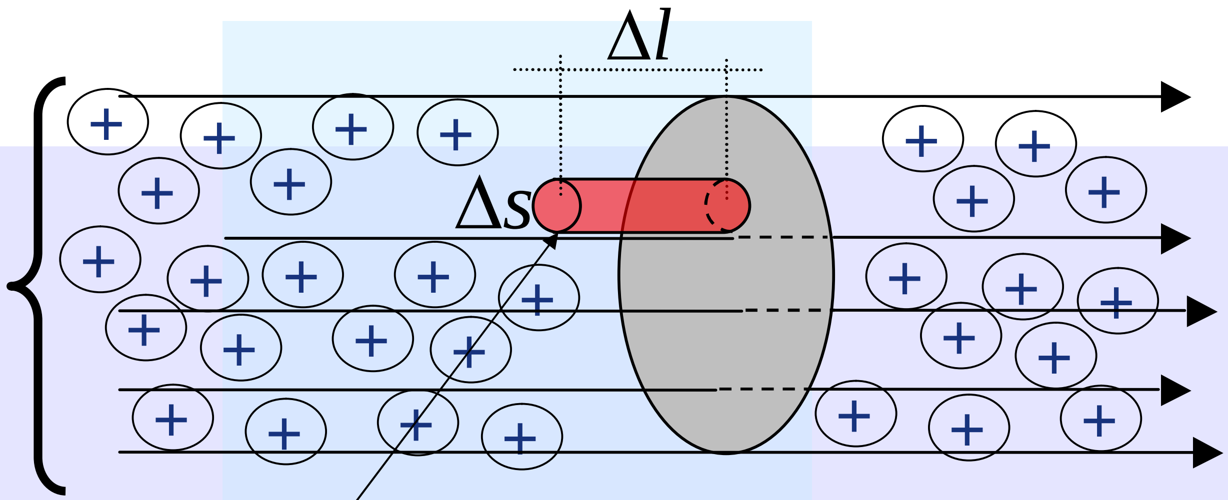


$$I = \frac{gAV_0}{d} \Rightarrow V_0 = \overbrace{\left(\frac{d}{gA}\right)}^{R} I$$

$$\sigma = \frac{\varepsilon V_0}{d} \Rightarrow Q = \frac{\varepsilon\, AV_0}{d} \Rightarrow Q = \underbrace{\left(\frac{\varepsilon\, A}{d}\right)}_{C} V_0$$

Corriente de Convección

Desplazamiento de partículas de masa m y carga q a velocidad u



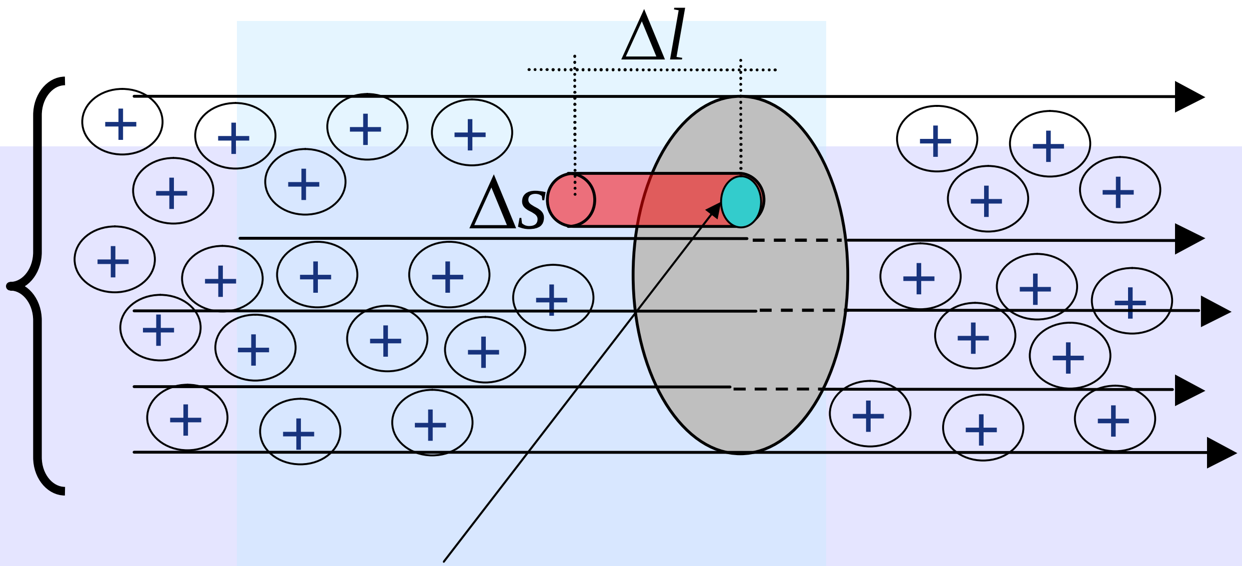
Volumen del cilindro $\Delta v = \Delta s \times \Delta l$

Sea n el número de cargas por unidad de volúmen, luego la **densidad de carga en el volumen** Δv ***es*** ρ_c *=n x q [C/m³]*

Carga total contenida en el volumen Δv ***es*** $\Delta q = \rho_c \Delta s \Delta l$

Corriente de Convección

Desplazamiento de partículas de masa m y carga q a velocidad u



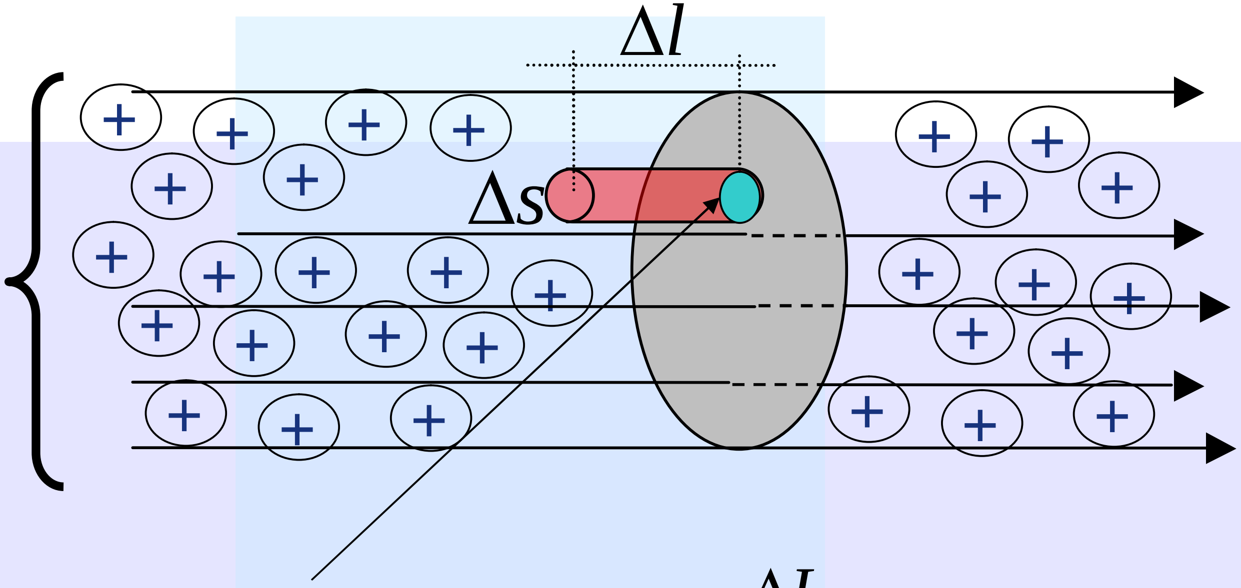
Cantidad de corriente que atraviesa trozo de área Δs es

$$\Delta I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\rho_c \Delta S \times \Delta l}{\Delta t} = \rho_c \Delta S \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

Luego la corriente por unidad de área Δs es $\frac{\Delta I}{\Delta s} = \rho_c \frac{\Delta l}{\Delta t} = \rho_c u$

Corriente de Convección

Desplazamiento de partículas de masa m y carga q a velocidad u

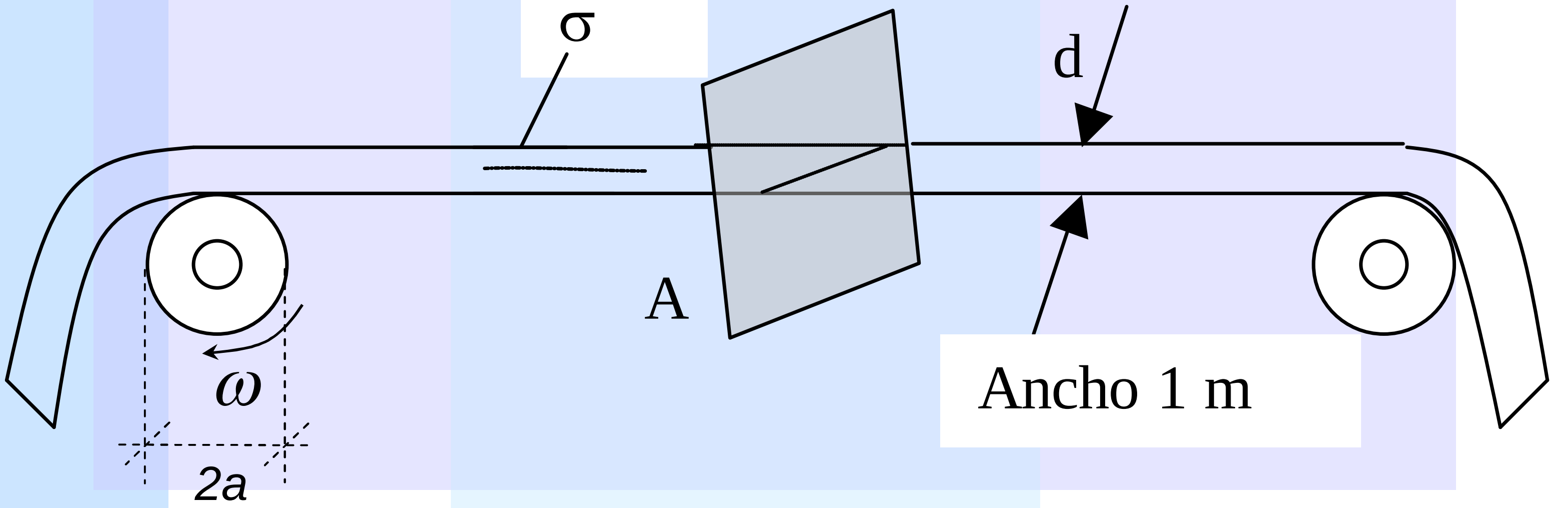


Luego la corriente por unidad de área Δs *es* $\dfrac{\Delta I}{\Delta s} = \rho_c u$

Luego el vector densidad de corriente *es* $\vec{J} = \rho_c \vec{u}$

Corriente de Convección

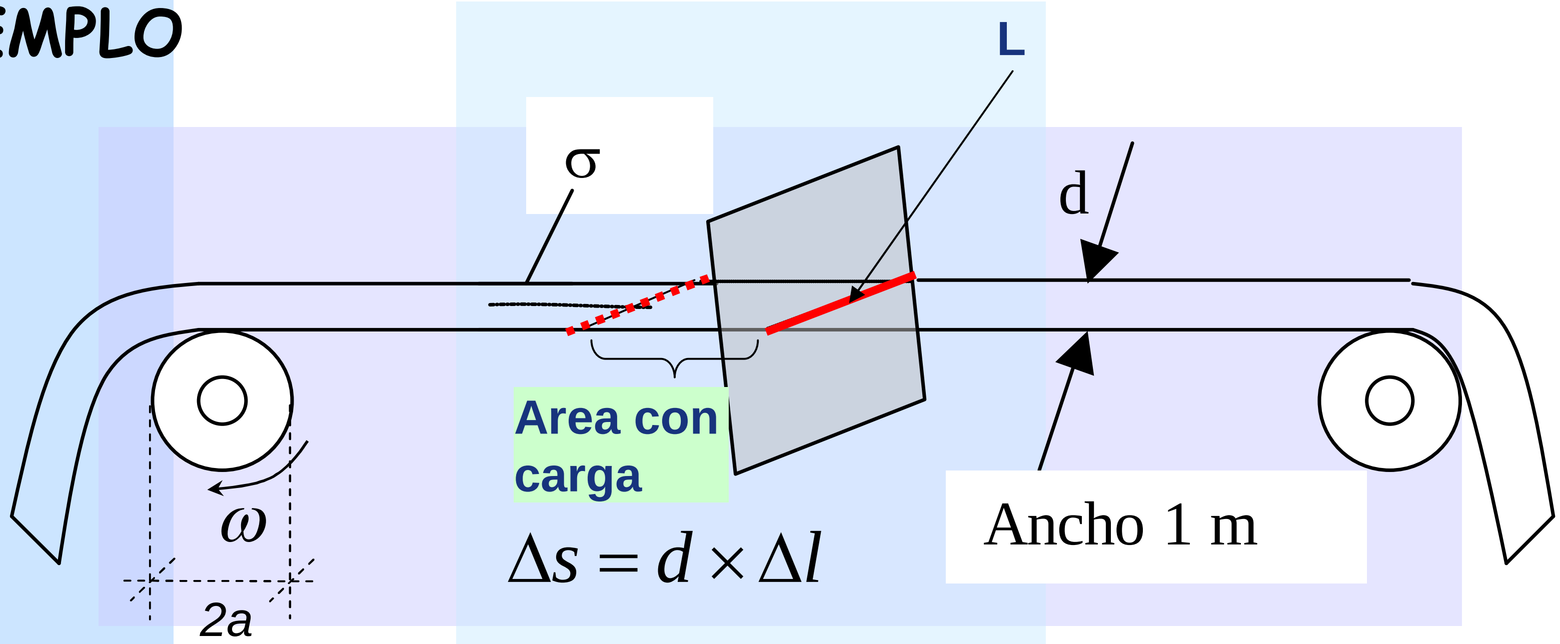
EJEMPLO



I=?

Corriente de Convección

EJEMPLO



$$\Delta s = d \times \Delta l$$

Carga total contenida en superficie Δs es $\Delta q = \sigma\, \Delta s = \sigma\, d \times \Delta l$

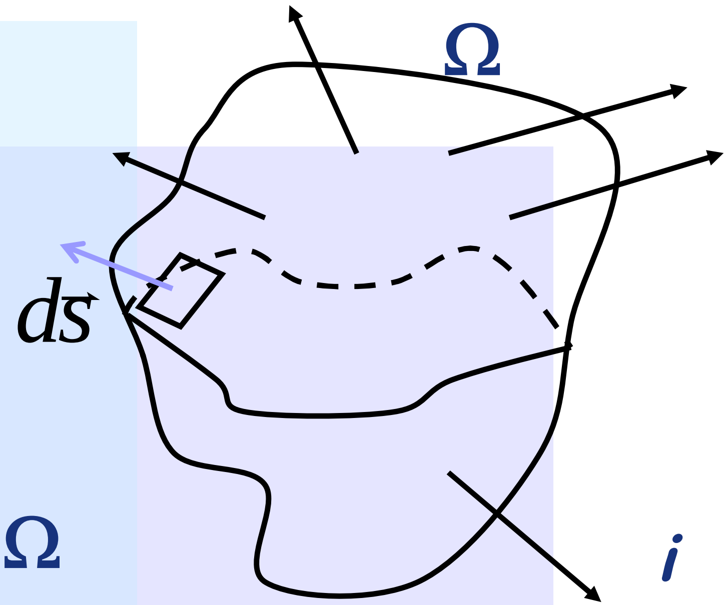
Cantidad de corriente que atraviesa línea L es $\Delta I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = \dfrac{\sigma\, d \times \Delta l}{\Delta t} = \sigma\, d\, \dfrac{\Delta l}{\Delta t}$

$\Delta I = \sigma\, d a \omega$ **Vector densidad de corriente superficial** $\vec{K} = \sigma\, a \omega\, \hat{i}$

Ecuación de Continuidad

Corriente saliendo de volumen Ω

$$I_{salida} = \oiint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S}$$



Q_{in}: carga contenida en el volumen Ω

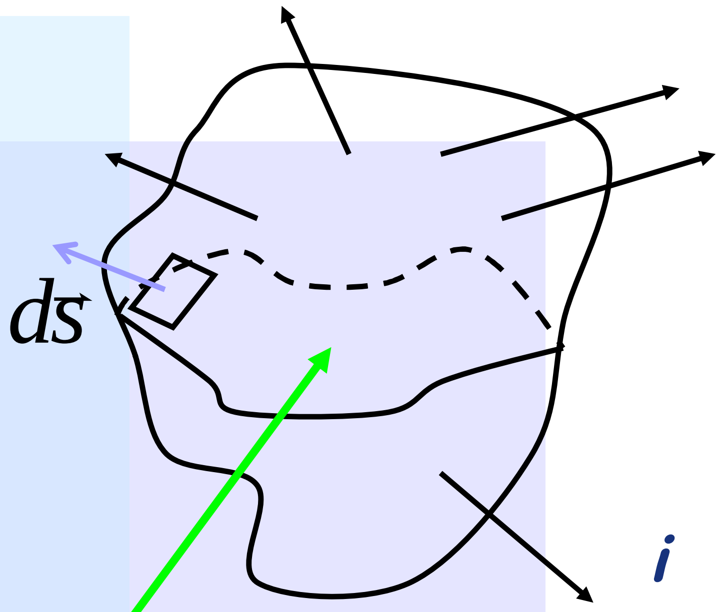
$$I_{salida} = -\frac{dQ_{in}}{dt}$$

Corriente que sale corresponde a la variación de carga encerrada en el volumen

Ecuación de Continuidad

$$Q_{in} = \iiint_{\Omega} \rho_{\Omega}(\vec{r})\,dV \quad (5.30)$$

$$I_{salida} = -\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega} \rho_{\Omega}(\vec{r})\,dV \quad (5.31)$$



volumen Ω es fijo (no depende de t)

$$\Rightarrow \quad I_{salida} = -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV$$

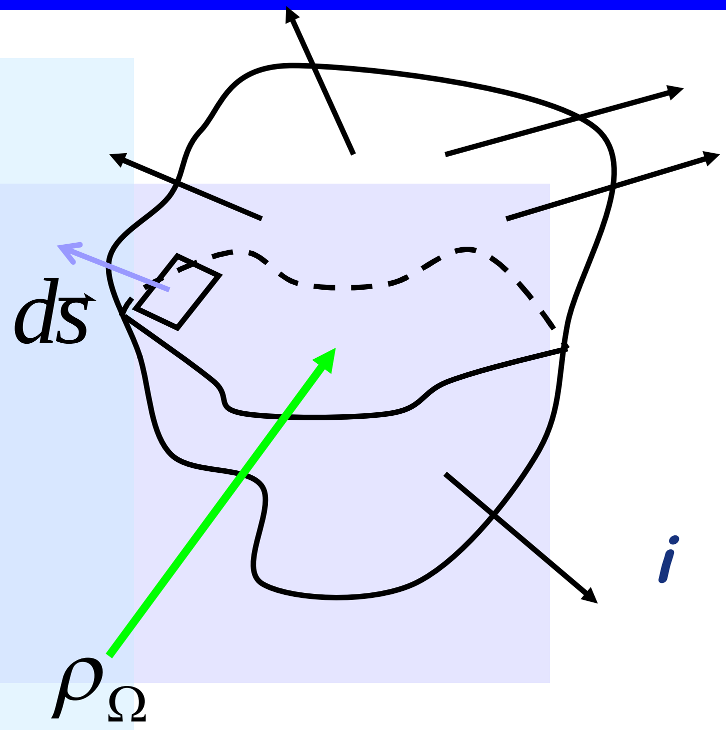
Ecuación de Continuidad

tenÃamos

$$-\frac{dQ_{in}}{dt} = I_{salida}$$

$$\Rightarrow -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV = \oint\!\!\oint_{S(\Omega)} \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

$$\Rightarrow -\iiint_{\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\Omega}(\vec{r})\right]dV = \iiint_{\Omega}\nabla\cdot\vec{J}dV$$

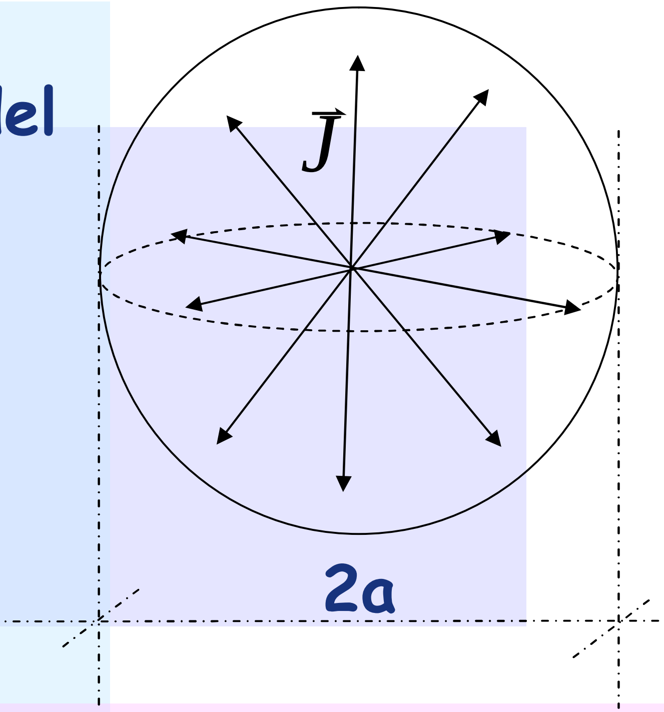


$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = 0$$

Ecuación de continuidad

Ejemplo

Calcular corriente total saliendo del círculo de radio a si $\vec{J} = J_0 \vec{r}$



$$I = \oiint_S J_0 a \hat{r} \bullet d\vec{s}$$

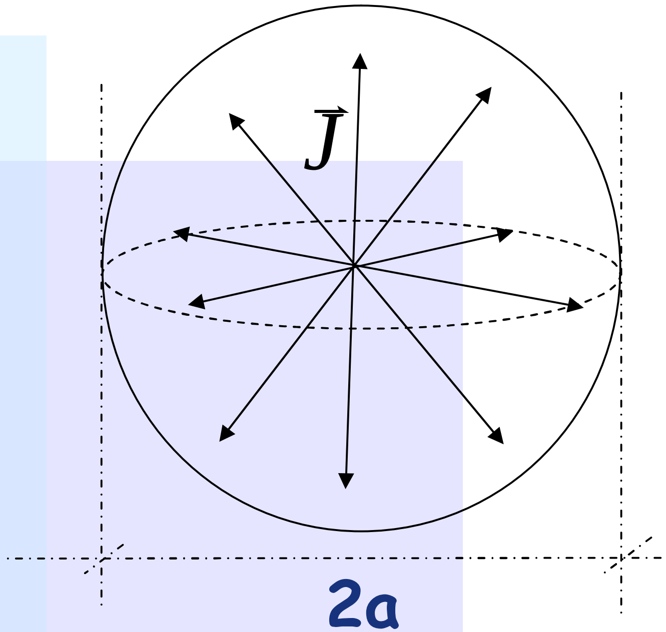
$$I = 4\pi\ a^2 J_0 a$$

$$I = 4\pi\ a^3 J_0$$

Ejemplo

Si se tiene una densidad de corriente

$$\vec{J} = J_0 \vec{r}$$



Calcular densidad de carga en volumen

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla \bullet \vec{J} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 J_0 r \hat{r}\right) = \frac{1}{r^2} J_0 3 r^2 = 3 J_0$$

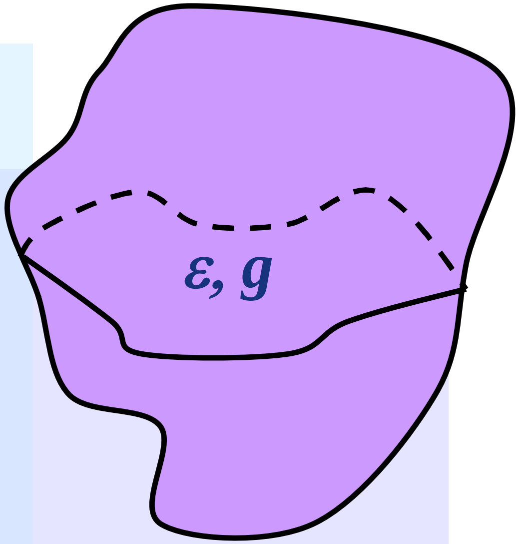
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}) = -3 J_0 \quad \Rightarrow \quad \rho(\vec{r}, t) = -3 J_0 t + \rho_0(\vec{r})$$

Ecuación de Continuidad en Medios materiales

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho(\vec{r}) = 0$$

$$\vec{J} = g\,\vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = g\nabla \cdot \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\,\vec{E} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \frac{g}{\varepsilon}\nabla \cdot \vec{D} = \frac{g}{\varepsilon}\rho(t)$$



volumen Ω

$$\frac{g}{\varepsilon}\rho(t) + \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \rho(t) = \rho_0 e^{-t/T_R}$$

$T_R = \varepsilon / g$ **Constante de relajación**

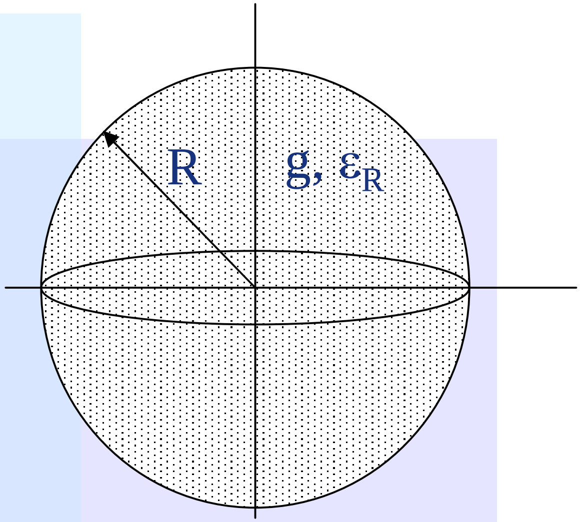
Ejemplo

$$\frac{g}{\varepsilon}\rho(t)+\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}=0$$

$$\Rightarrow \iiint_V\left(\frac{g}{\varepsilon}\rho(t)+\frac{\partial\rho(t)}{\partial t}\right)dV=0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{\varepsilon}\underbrace{\iiint_V \rho(t)dV}_{Q(t)}+\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\iiint_V \rho(t)dV}_{Q(t)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{g}{\varepsilon}Q(t)+\frac{\partial Q(t)}{\partial t}=0 \Rightarrow Q(t)=Q_0 e^{-t/T_R}$$



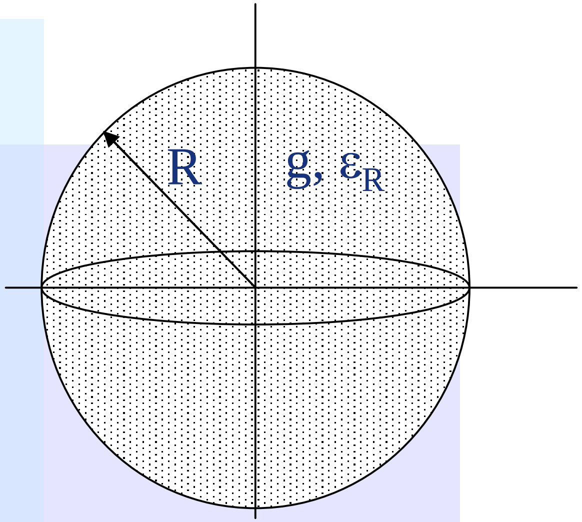
Q_0 inicial

Ecuación de Continuidad en Medios materiales

EJEMPLO

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/T_R}$$

	cobre	Cuarzo fusionado
T_R	$1.53\times10^{-19}\,seg$	51.2 días

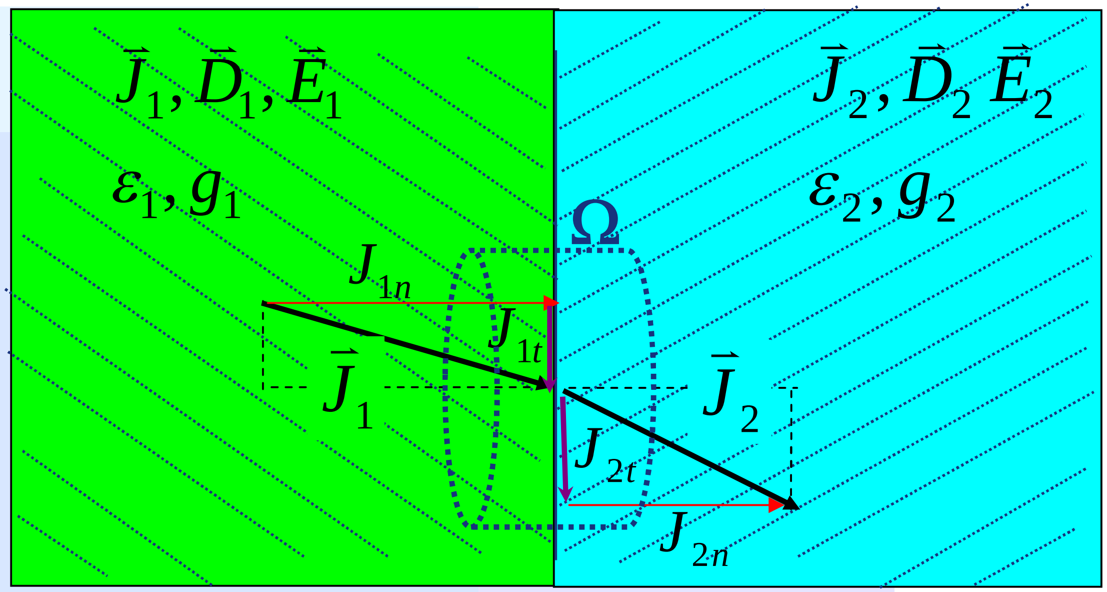


Q_0 inicial

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$E_{1t} = E_{2t} \Rightarrow \frac{J_{1t}}{g_1} = \frac{J_{2t}}{g_2}$$



$$\nabla \bullet \vec{D} = \rho$$

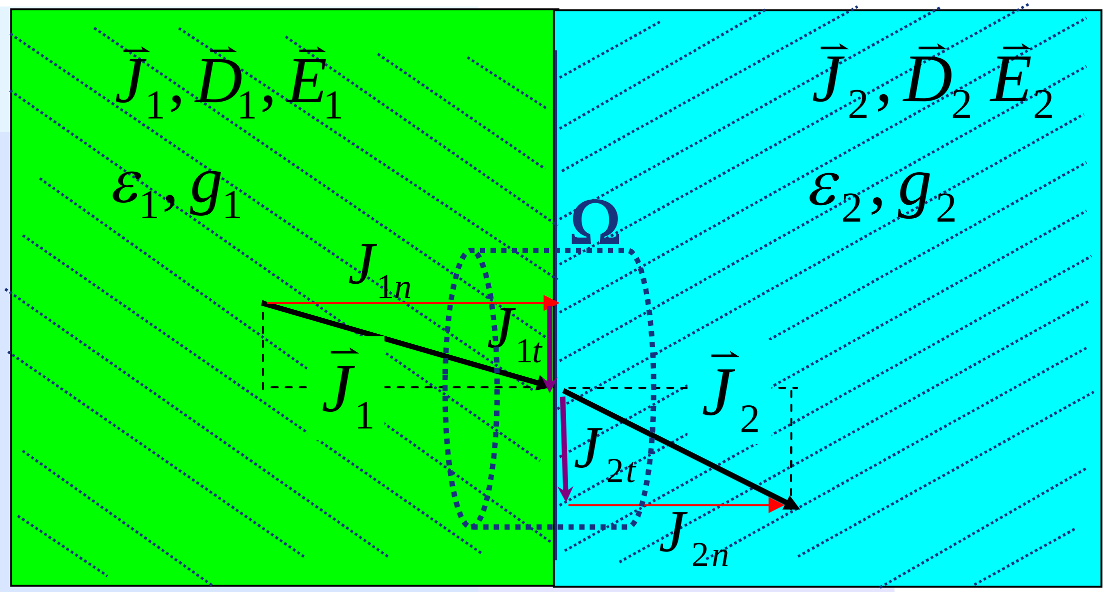
$$D_{1N} - D_{2N} = \sigma_{libre}$$

$$\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \sigma_l \Rightarrow \varepsilon_1 \frac{J_{1n}}{g_1} - \varepsilon_2 \frac{J_{2n}}{g_2} = \sigma_l$$

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\frac{J_{1t}}{g_1} = \frac{J_{2t}}{g_2}$$

$$\varepsilon_1 \frac{J_{1n}}{g_1} - \varepsilon_2 \frac{J_{2n}}{g_2} = \sigma_l$$



I. Situación Estacionaria $\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = 0$

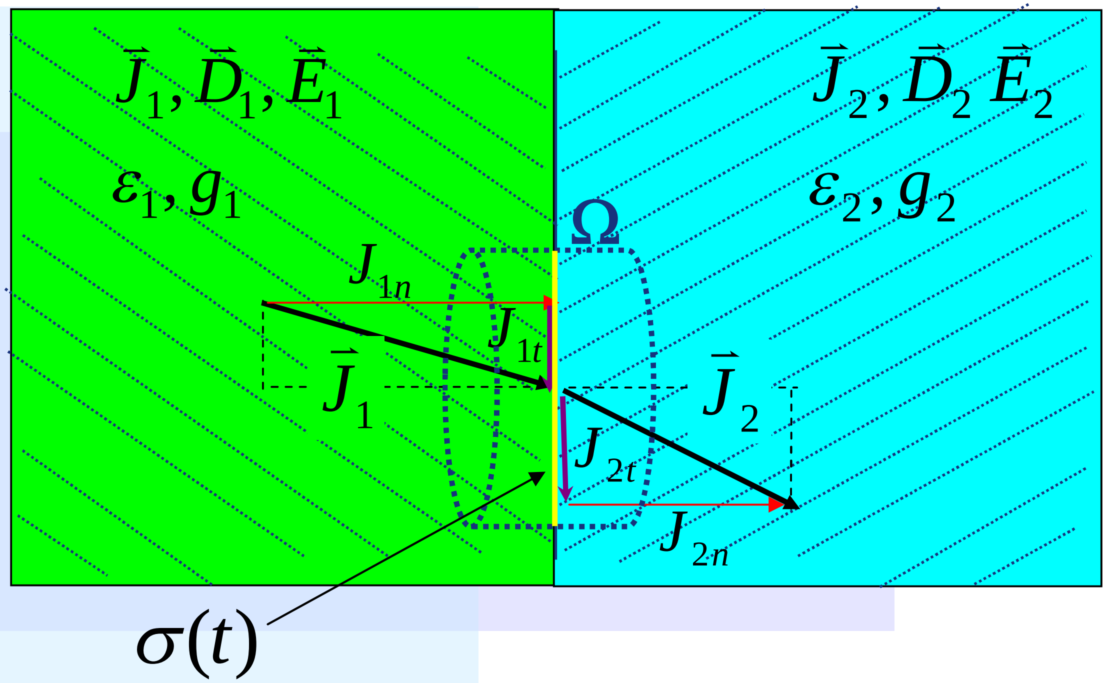
$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = 0 \qquad \oiint_{S(\Omega)} \vec{D} \bullet d\vec{s} = 0 \Rightarrow \quad J_{1n} = J_{2n}$$

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

II. Situación transitoria

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} \neq 0$$

$$\iint_{S(\Omega)} \vec{J} \cdot d\vec{S} = J_{2n}\Delta S - J_{1n}\Delta S$$



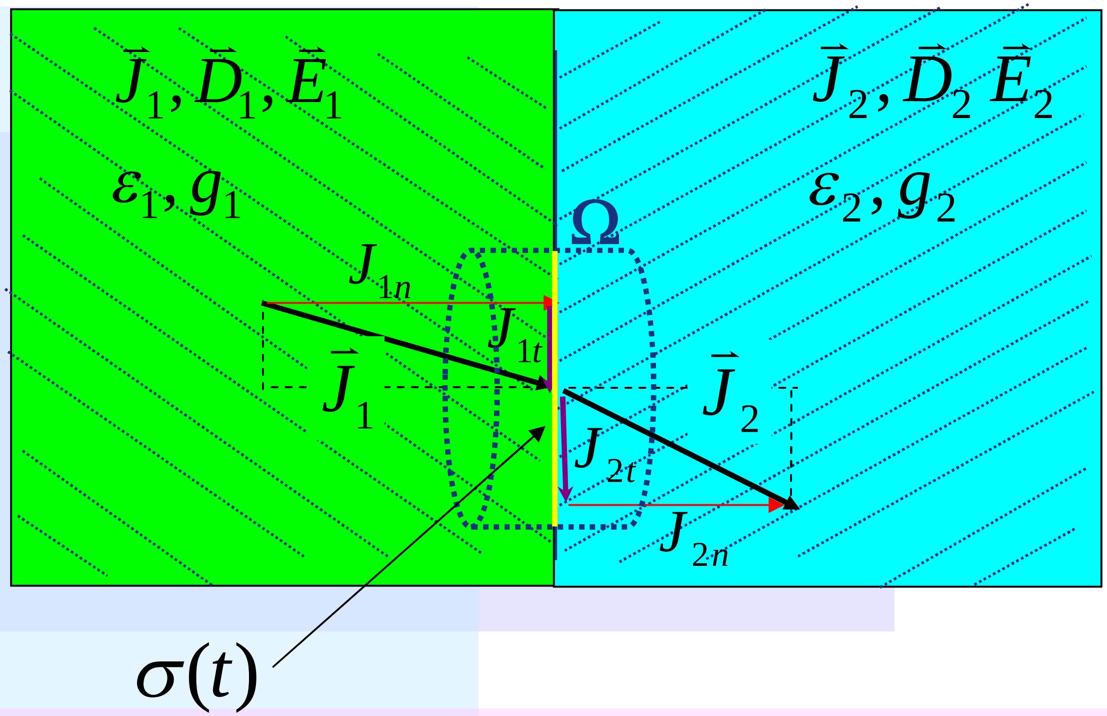
Haciendo tender la altura del cilindro a cero $\frac{\partial Q}{\partial t}$ se acumula sólo en la superficie que limita los medios

Condiciones de Borde para $\vec{J}$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma \cdot \Delta S)$$

$$\Rightarrow J_{2n}\Delta S - J_{1n}\Delta S + \frac{\partial \sigma}{\partial t}\Delta S = 0$$

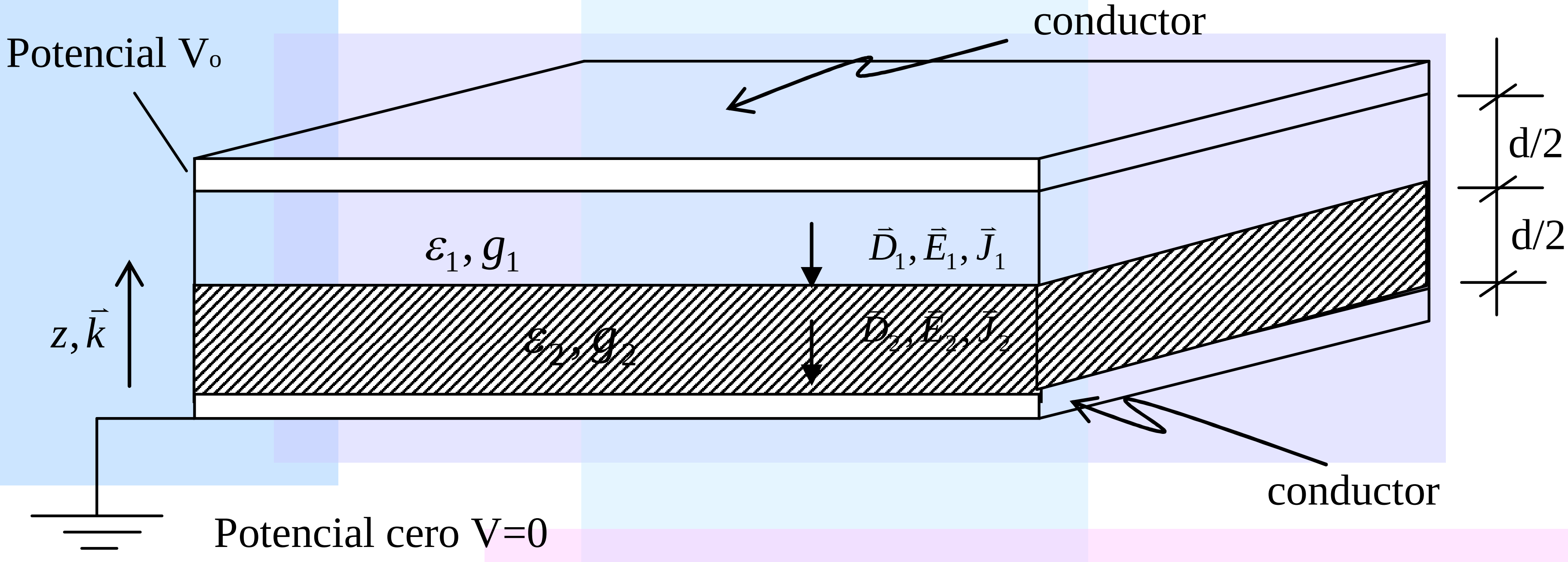
$$\Rightarrow J_{2n} - J_{1n} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$



$$\therefore \quad J_{2n} - J_{1n} = \frac{\partial \sigma(t)}{\partial t}$$

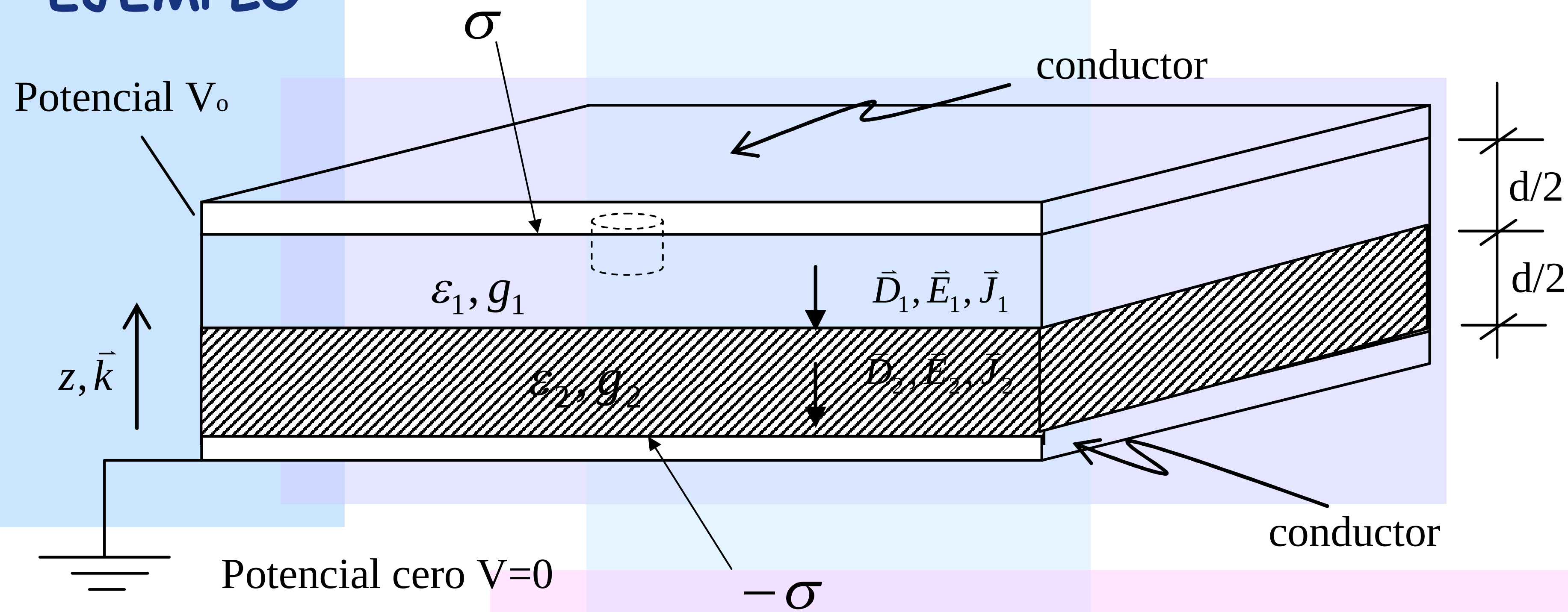
Condiciones de Borde para $\vec{J}$

EJEMPLO



Condiciones de Borde para $\vec{J}$

EJEMPLO



$$J_{1n} = J_{2n} \Rightarrow \frac{E_1}{g_1} = \frac{E_2}{g_2}$$

y

$$\Delta V = -\int \vec{E} \bullet dz\hat{k} \Rightarrow V_0 = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2}$$