



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO

Clase 18

Magnetostática-III

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile



fcfm

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE



INDICE

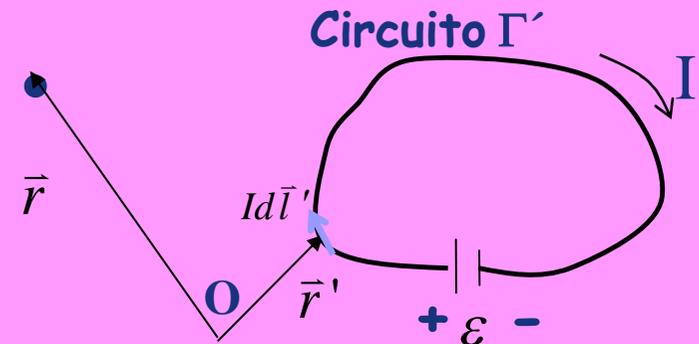
- Ley de Biot y Savarat
- Ley Circuital de Ampere
- 3a Ecuación de Maxwell
- 4ta Ecuación de Maxwell



Campo magnético

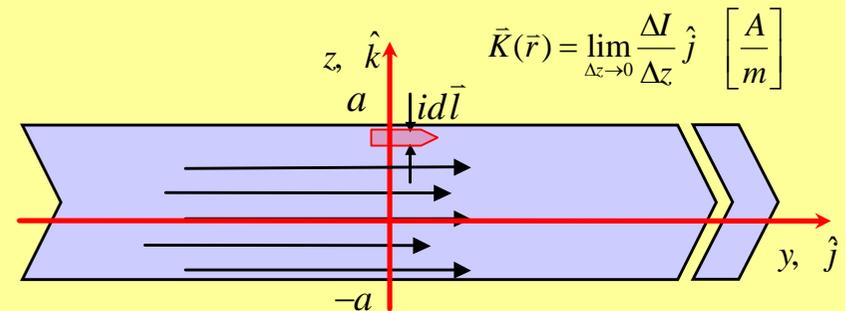
Campo producido por circuito Γ'

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$



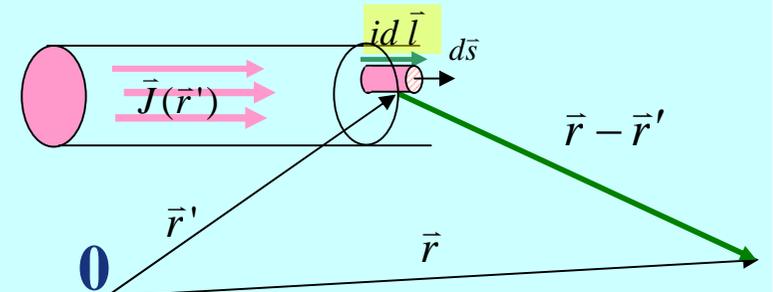
Campo producido por densidad de corriente superficial $\vec{K}(\vec{r})$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} ds'$$



Campo producido por densidad de corriente en volúmen $\vec{J}(\vec{r})$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3} dv'$$

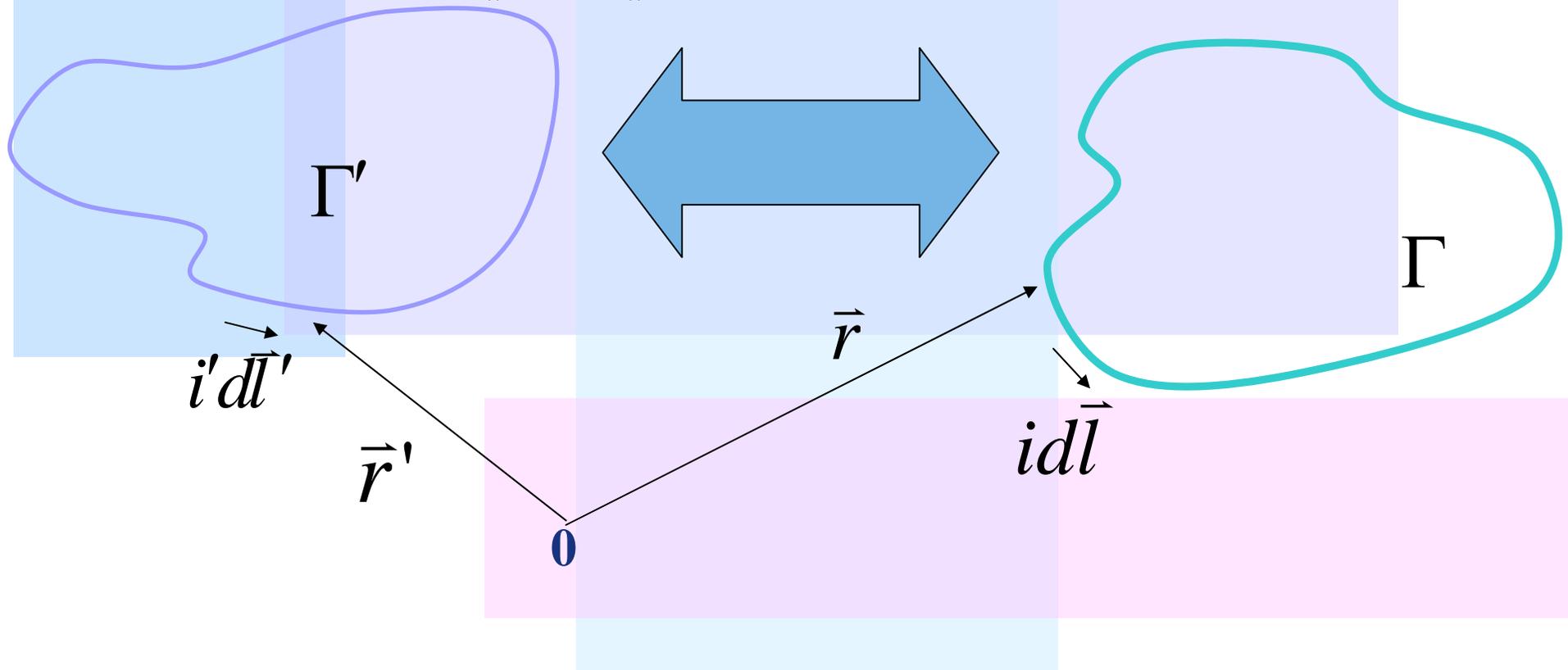




Ley de Biot y Savarat

$$d\vec{F} = \frac{Id\vec{l} \times \mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

$$\therefore d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$





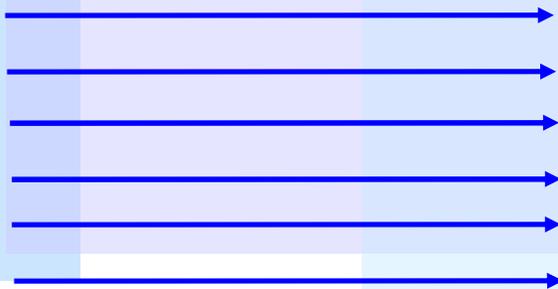
Ley de Biot y Savarat

Así, un circuito en presencia de un campo magnético experimenta una fuerza dada por la ecuación

$$d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$$\therefore \vec{F} = \oint_{\Gamma} d\vec{F} = \oint_{\Gamma} Id\vec{l} \times \vec{B}(\vec{r})$$

$\vec{B}(\vec{r})$

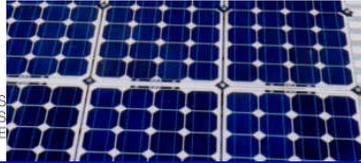


0

\vec{r}

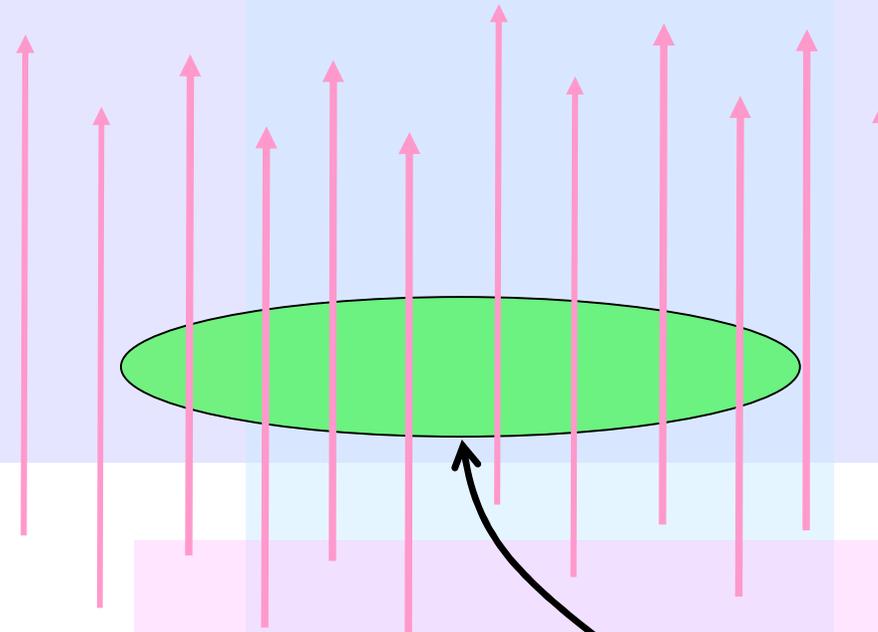
$id\vec{l}$

Γ



Ley Circuital de Ampere

Líneas de corriente

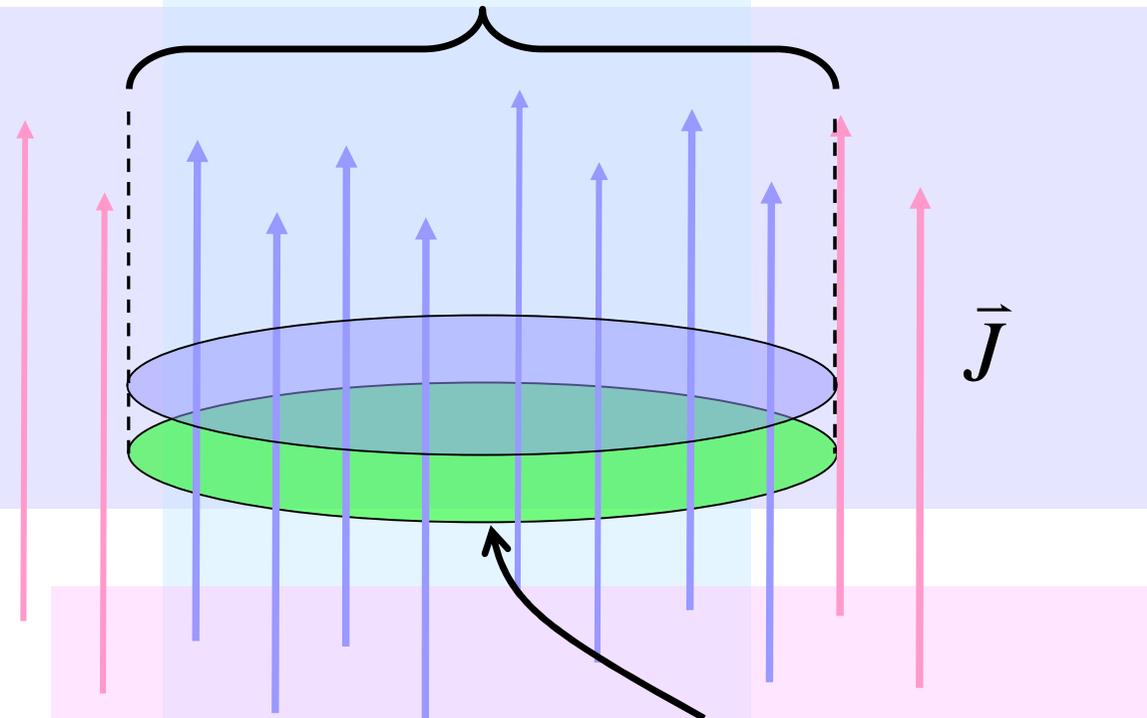


Plano S por donde atraviesan líneas de corriente

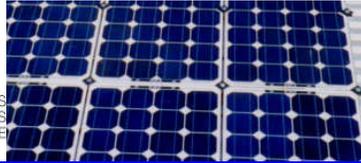


Ley Circuital de Ampere

Corriente que atraviesa por S

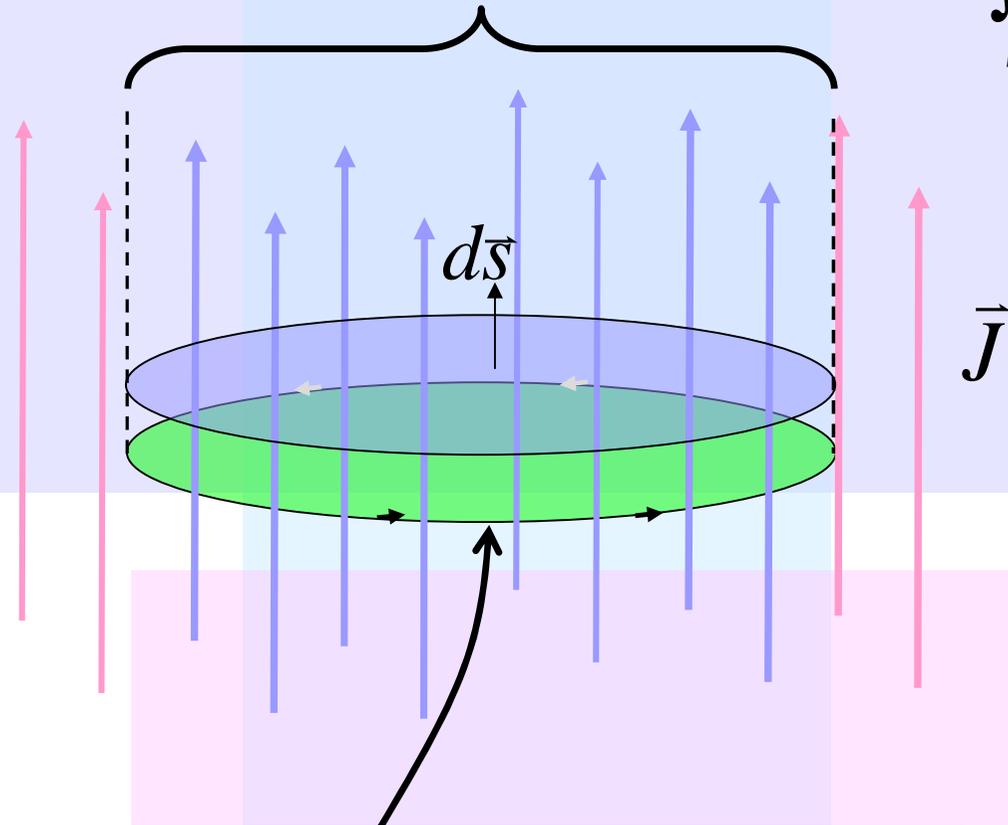


Plano S por donde atraviesan líneas de corriente



Ley Circuital de Ampere

Corriente enlazada por $\Gamma(s) = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$



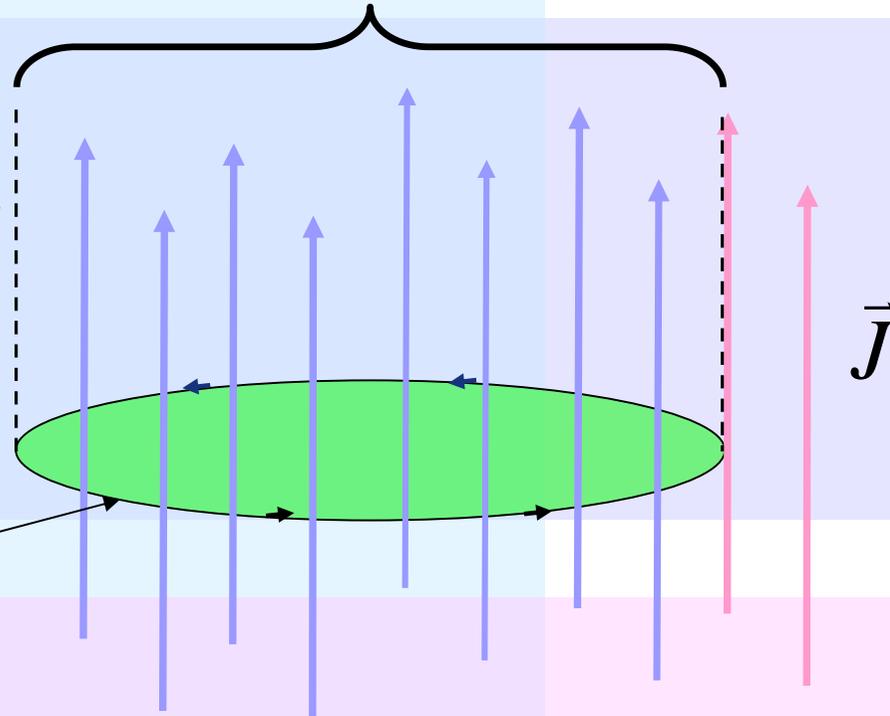
Trayectoria cerrada $\Gamma(S)$



Ley Circuital de Ampere

$I_{enlazada} =$ Corriente enlazada por $\Gamma(s)$

Trayectoria
cerrada $\Gamma(s)$



$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}$$

Ley Circuital de Ampere

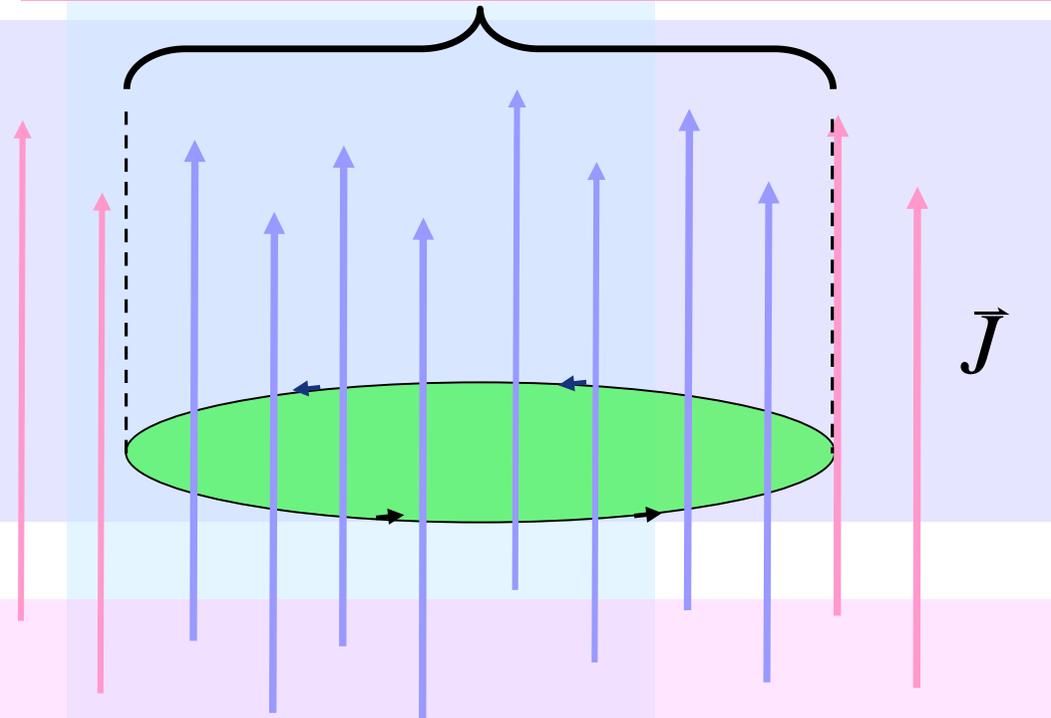


Ley Circuital de Ampere

$I_{enlazada} =$ Corriente enlazada por $\Gamma(s)$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

\vec{H} : Vector
Intensidad de
Campo Magnético



$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

Ley Circuital de Ampere



Unidades

	ϕ	\vec{B}
Sistema CGS	[líneas]	[líneas/cm ²]
Sistema MKS	[Wb] (Weber)	[Wb/m ²] = [Tesla]
Equivalencias	1 [Wb] = 10 ⁸ [líneas]	1 [Tesla] = 10 ⁴ [Gauss] = 10 [kGauss]



Ejemplo 1

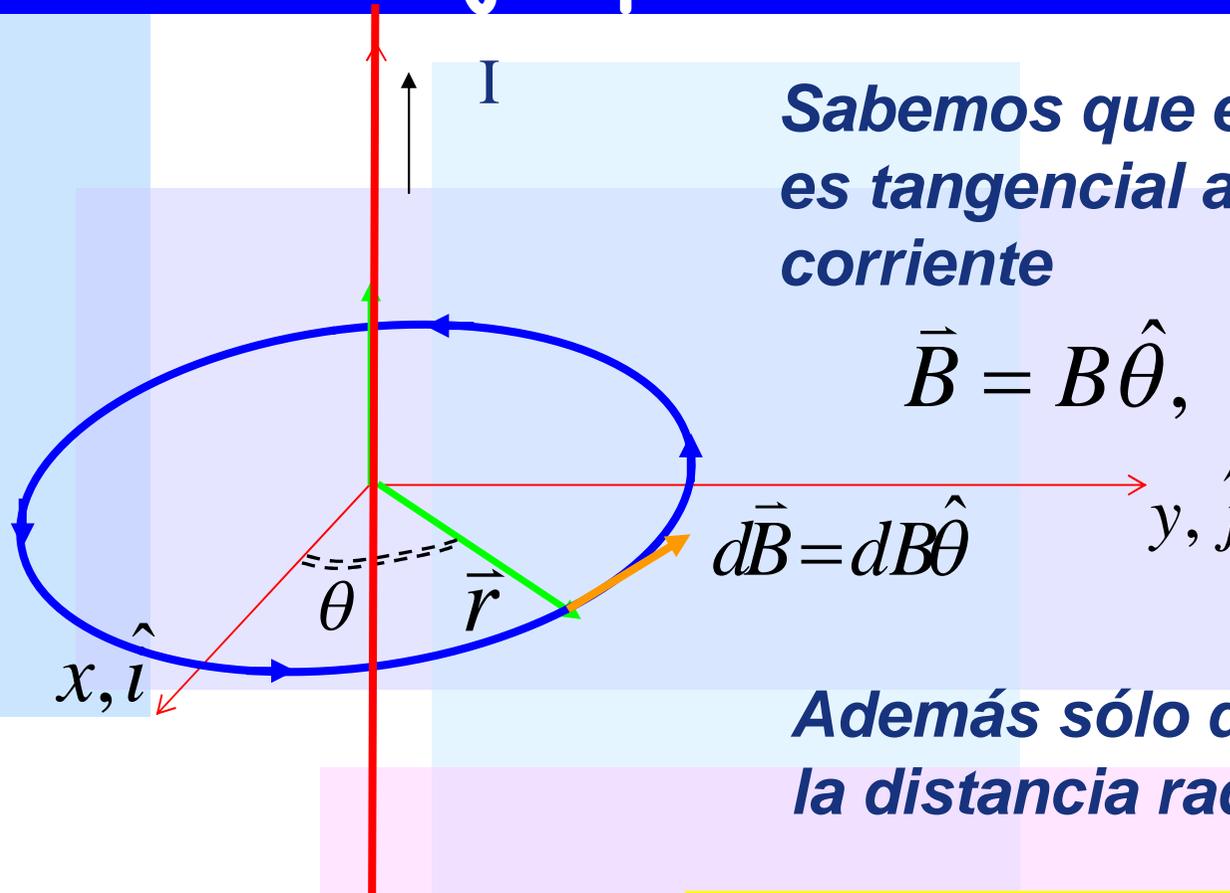
Calcular el campo magnético de una corriente unifilar infinita



$$\vec{B} = ?$$



Ejemplo 1



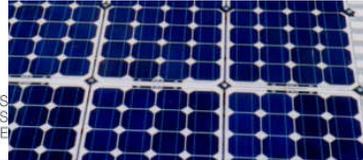
Sabemos que el campo es tangencial a la corriente

$$\vec{B} = B\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H\hat{\theta}$$

$$d\vec{B} = dB\hat{\theta} \quad y, \hat{j}$$

Además sólo depende de la distancia radial r

$$\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$



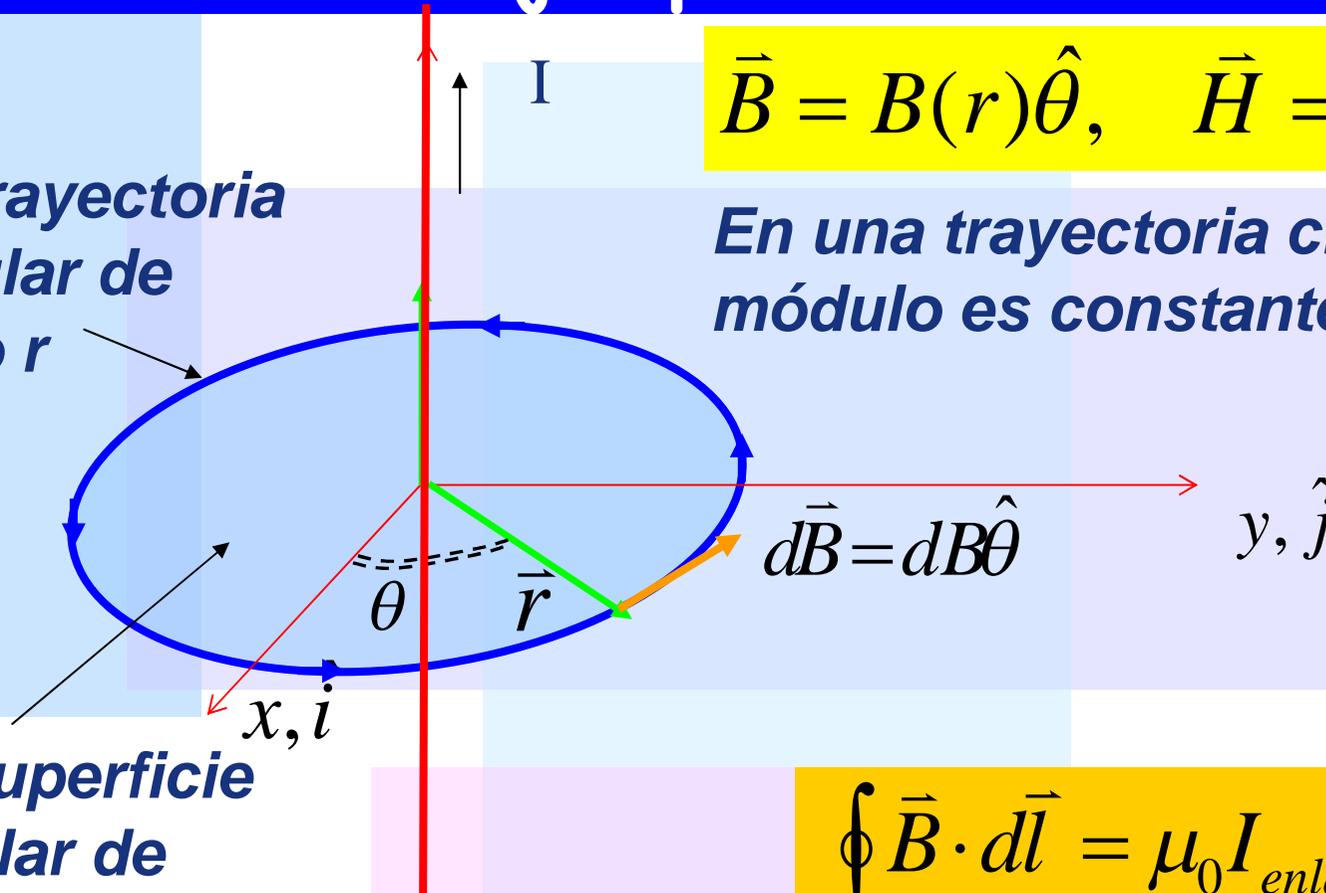
Ejemplo 1

$$\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$

En una trayectoria circular el módulo es constante

Γ : trayectoria circular de radio r

S : superficie circular de radio r



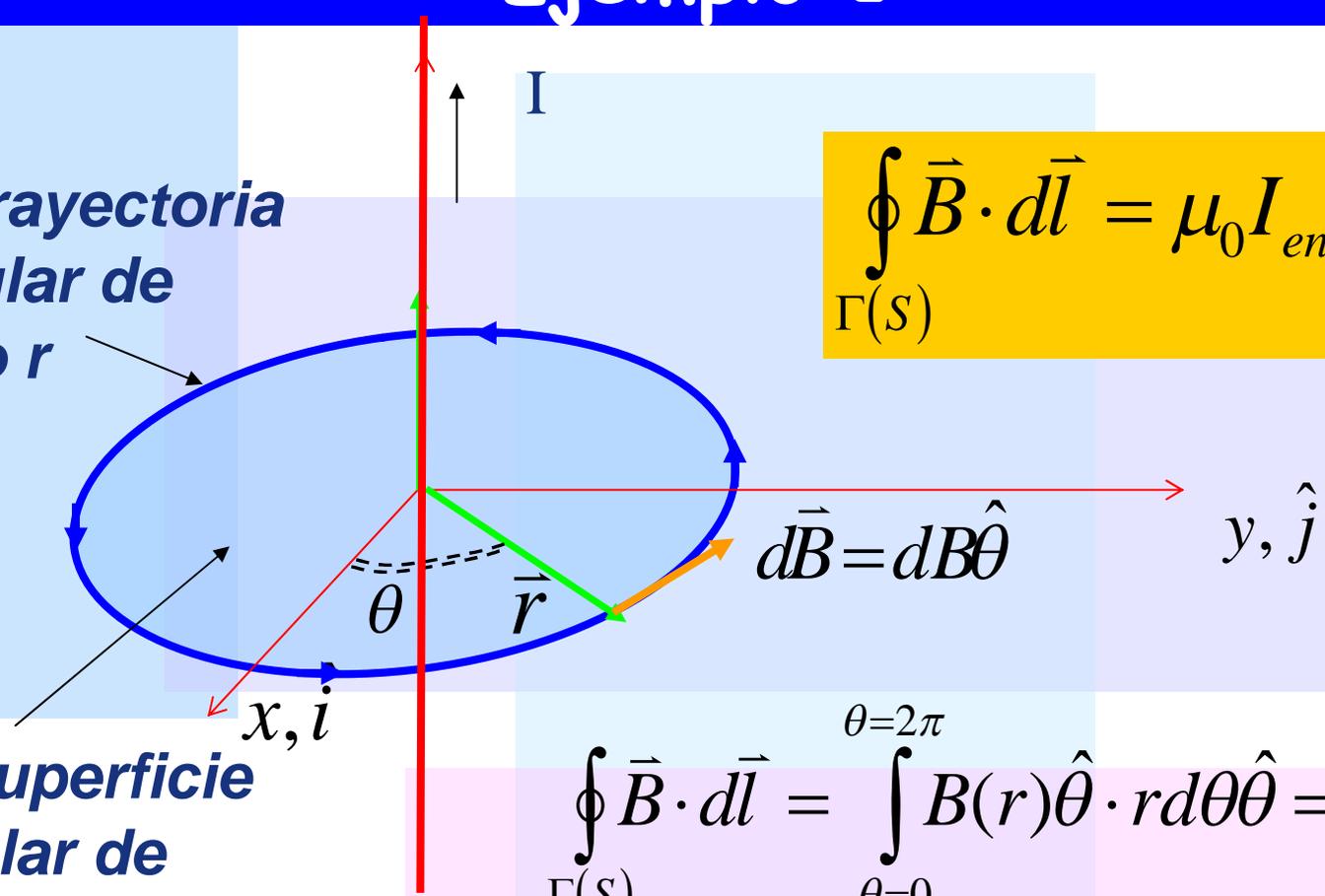
$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlazada}}(S)$$



Ejemplo 1

Γ : trayectoria circular de radio r

S : superficie circular de radio r



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}(S)$$

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} B(r) \hat{\theta} \cdot r d\theta \hat{\theta} = B(r) r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi B(r) r$$

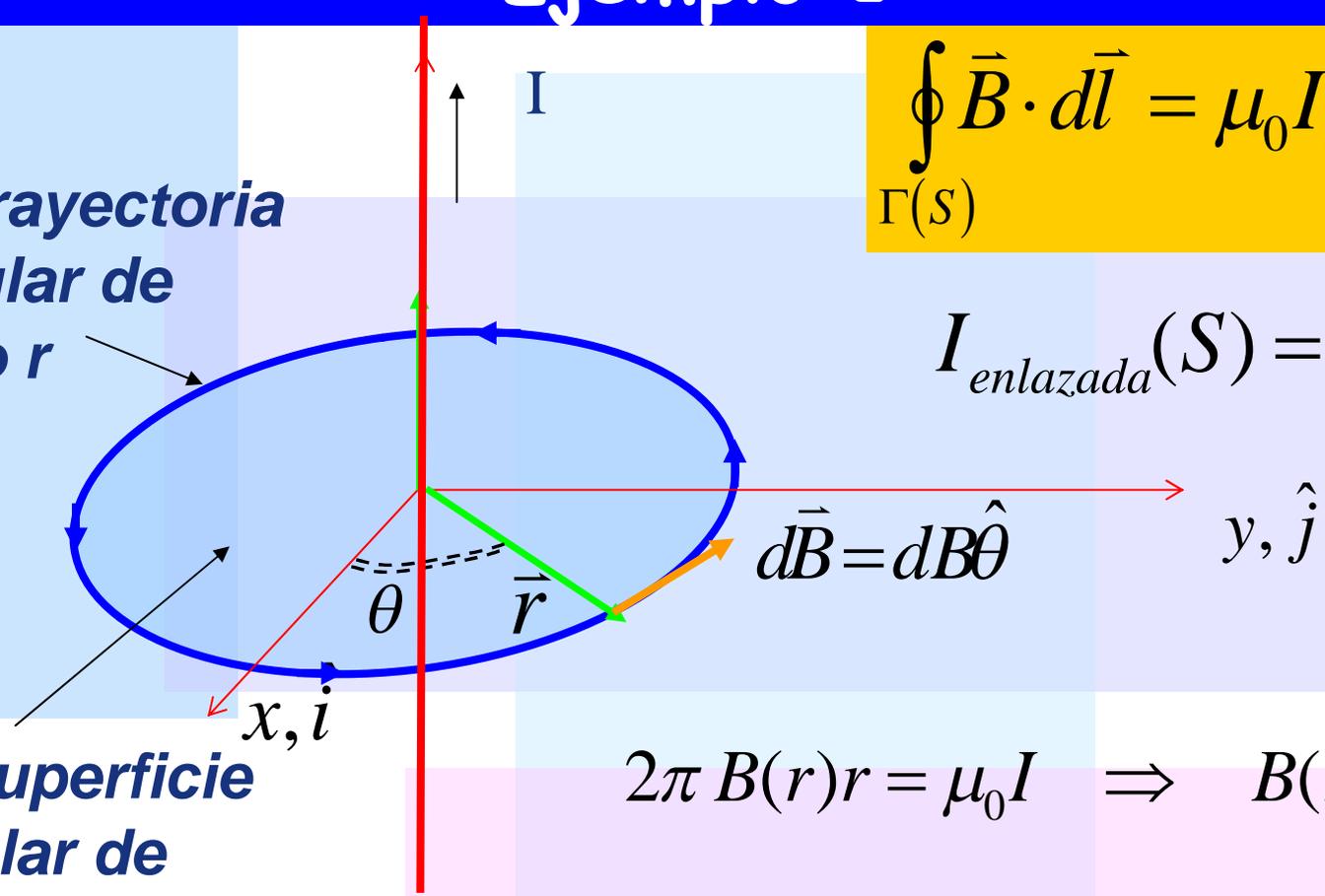


Ejemplo 1

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enlazada}(S)$$

Γ : trayectoria circular de radio r

$$I_{enlazada}(S) = I$$



S : superficie circular de radio r

$$2\pi B(r)r = \mu_0 I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

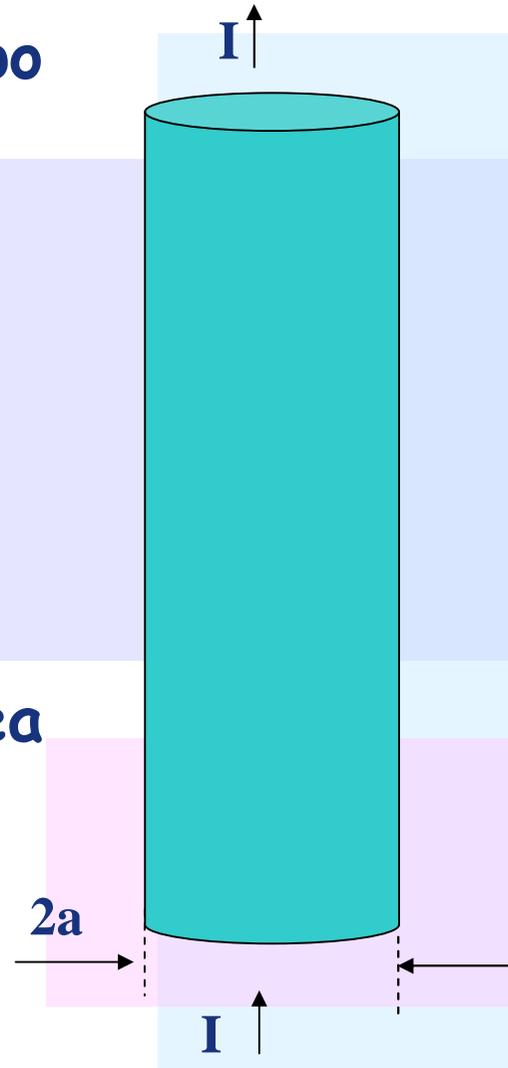
$$\therefore \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\theta}$$



Ejemplo 2

Calcular el campo magnético al interior de un cilindro macizo de corriente infinito.

Suponga que la corriente se distribuye en forma homogénea

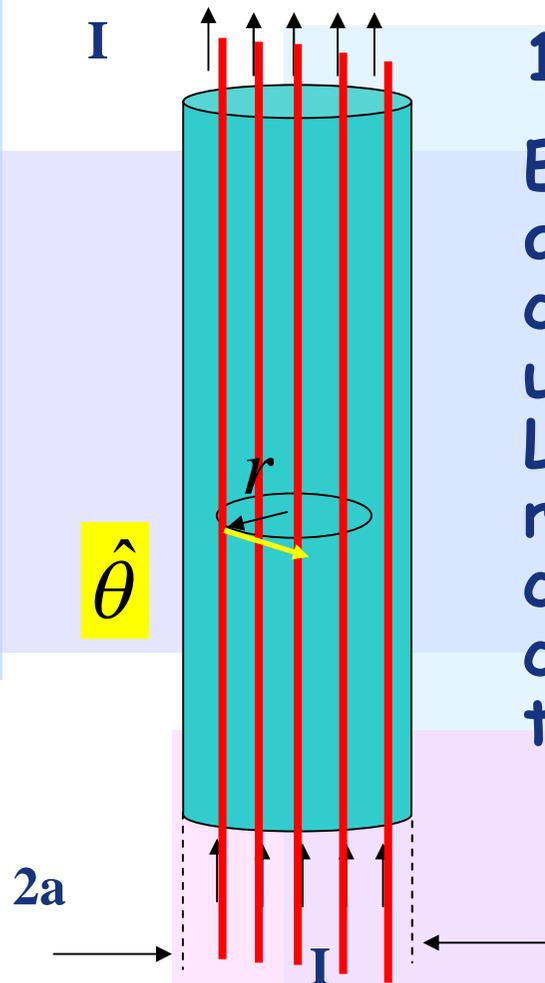


$$\vec{B} = ?$$



Ejemplo 2

Zona $r < a$



1ª Observación:

El interior del cilindro puede asimilarse a líneas de corriente paralelas que forman un todo densamente poblado. Luego el campo magnético resultante es la suma de los campos de c/u de las líneas de corriente, es decir, el campo tiene la siguiente forma:

$$\vec{B} = B \hat{\theta}, \quad \vec{H} = H \hat{\theta}$$



Ejemplo 2

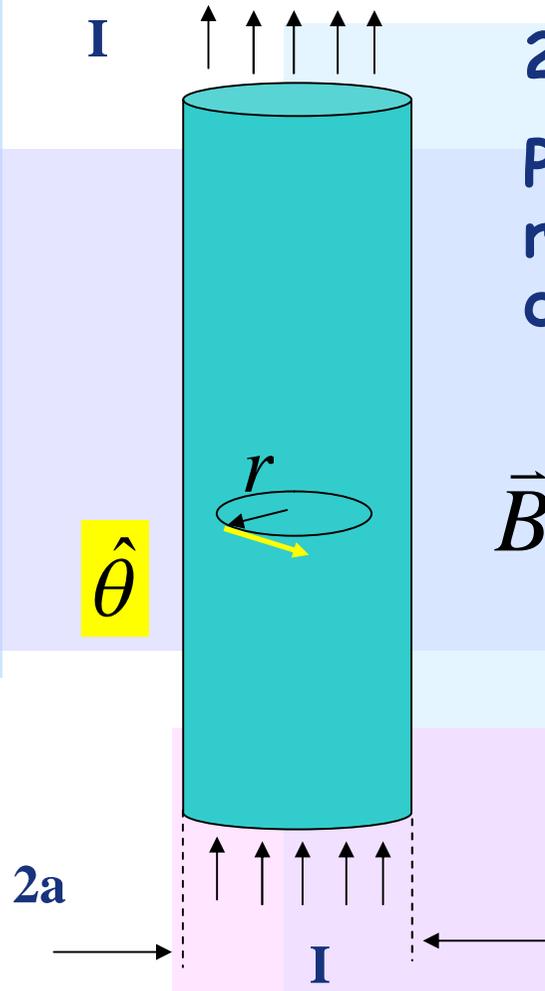
Zona $r < a$

I ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

2ª Observación:

Por simetría, el campo para un radio dado no debiera cambiar de magnitud

$$\vec{B} = B(r)\hat{\theta}, \quad \vec{H} = H(r)\hat{\theta}$$





Ejemplo 2

Zona $r < a$

I

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} H(r) \hat{\theta} \cdot r d\theta \hat{\theta}$$

$$= H(r)r \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta$$

$2a$

$$\Rightarrow \oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi H(r)r$$

I



Ejemplo 2

Zona $r < a$

\mathbf{I}

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

S : superficie circular de radio r

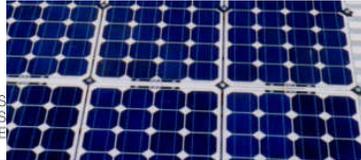
$$I_{enlazada}(S) = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{A} \hat{k}$$

$2a$

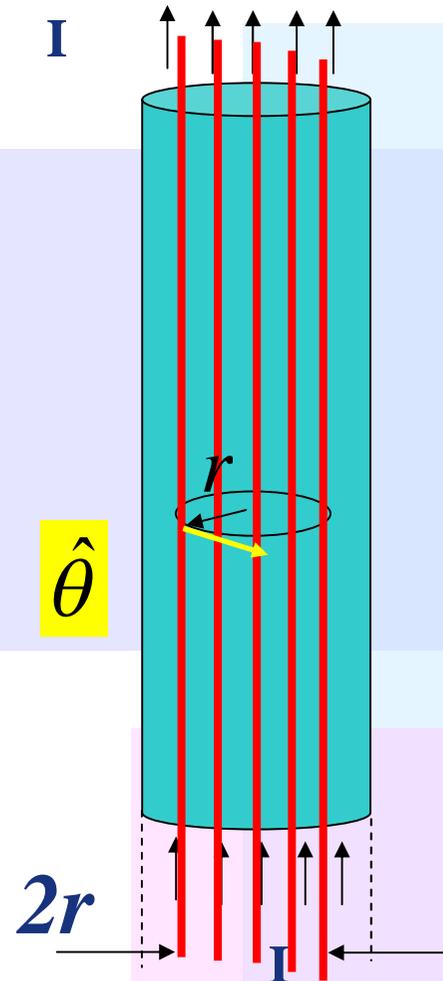
$$I_{enlazada}(S) = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=r} \frac{I}{\pi a^2} \hat{k} r d\theta dr \hat{k}$$

$$I_{enlazada}(S) = \frac{I r^2}{a^2}$$



Ejemplo 2

Zona $r < a$



$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}(S)$$

$$\Rightarrow 2\pi H(r)r = \frac{Ir^2}{a^2}$$

$$\therefore \vec{H} = \frac{Ir}{2\pi a^2} \hat{\theta}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2} \hat{\theta}$$



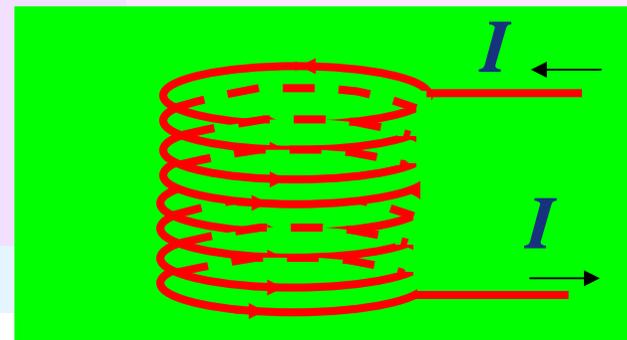
Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(s)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

- Requiere ver el campo magnético con antelación
- Requiere destreza para escoger apropiadamente la trayectoria de integración $\Gamma(s)$

Propuesto: Calcular campo magnético de bobina infinita con N vueltas por unidad de largo



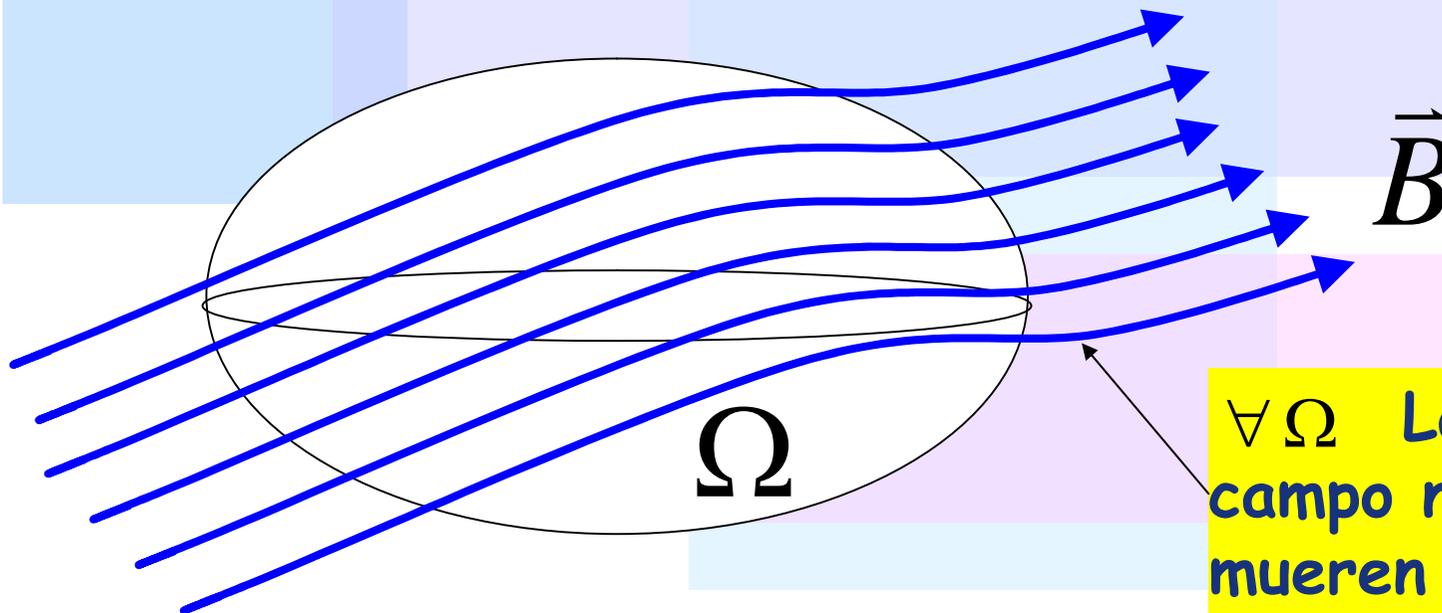


3ª Ecuación de Maxwell

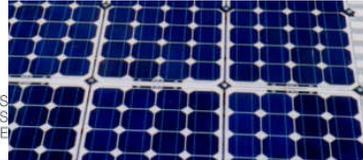
Hasta hoy no se han encontrado fuentes desde donde nazcan líneas de campo, es decir, no hay "cargas magnéticas"

$$\therefore \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell



$\forall \Omega$ Las líneas de campo no nacen ni mueren en parte alguna



4ª Ecuación de Maxwell

Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enlazada}$$

Podemos escribir

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s}$$

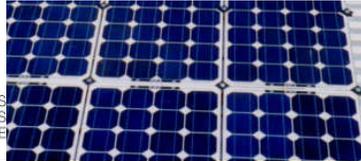
además

$$I_{enlazada}(S) = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\Rightarrow \iint_S (\nabla \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad \text{Válido } \forall S$$

$$\therefore \nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell



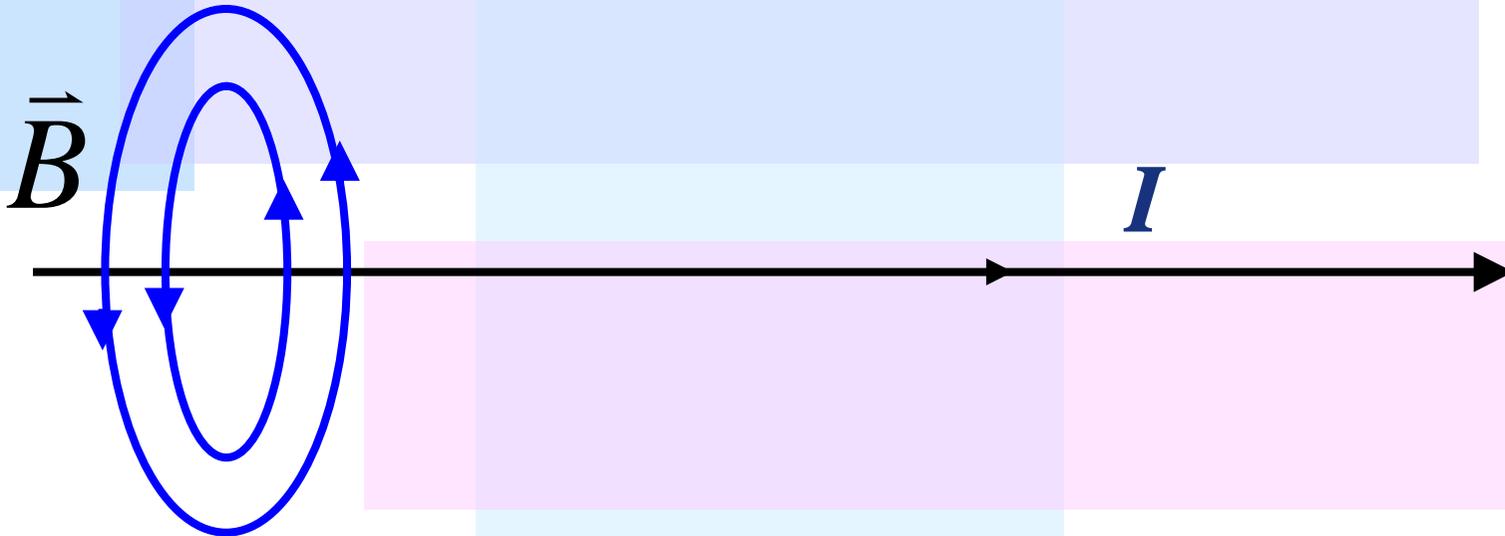
Origen del campo magnético

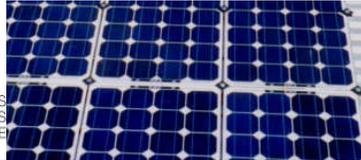
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell





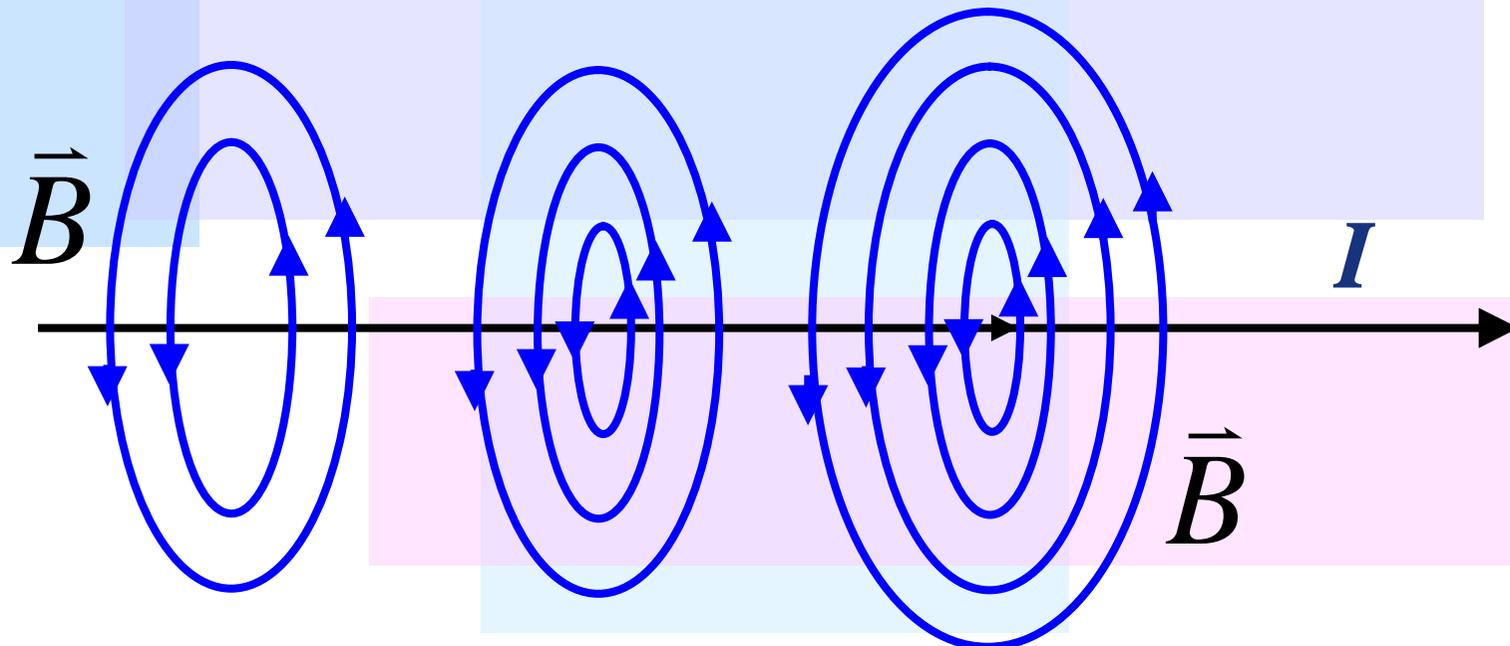
Origen del campo magnético

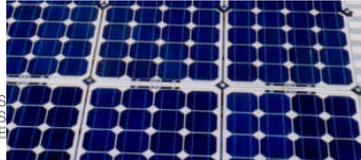
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

4ª Ecuación de Maxwell





Potencial Magnético Vector

Un campo vectorial cualquiera cumple con $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$

Por otra parte todo campo magnético cumple $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Luego podemos escribir $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

\vec{A} es el potencial magnético vector

Usaremos la definición de campo magnético para encontrar una expresión del potencial magnético vector



Potencial Magnético Vector

Usaremos la identidad $\nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

Recordemos que el campo magnético de circuitos lineales es $\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$

Luego podemos escribir $\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} I d\vec{l}' \times \left(\nabla_r \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$

Usando ahora la identidad $\nabla \times (f \vec{F}) = f \nabla \times \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$

$$\nabla_r \times \left(\frac{I d\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \nabla_r \times I d\vec{l}' + \nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times I d\vec{l}' \quad \text{pero } \nabla_r \times I d\vec{l}' = 0$$



Potencial Magnético Vector

$$\Rightarrow \nabla_r \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = \nabla_r \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times Id\vec{l}'$$

Invirtiendo el producto cruz $Id\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) \times Id\vec{l}'$

$$\Rightarrow Id\vec{l}' \times \nabla \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right) = -\nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$

Luego podemos escribir $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \nabla \times \left(\frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$

$$\Rightarrow \vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$$



Potencial Magnético Vector

Notemos que $\vec{B} = \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \right)$

tiene la forma $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$

Luego $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$

Es el potencial magnético vector de una corriente I en un circuito

$$[\vec{A}] = \frac{T}{m}$$



Potencial Magnético Vector

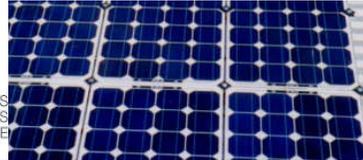
Por extensión, y siguiendo un análisis similar, se concluye que para distribuciones continuas de corriente

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_S \frac{\vec{K} ds'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para corrientes superficiales $[\vec{K}] = \frac{A}{m}$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\Omega} \frac{\vec{J} dv'}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Para corrientes en volumen $[\vec{J}] = \frac{A}{m^2}$



Resumiendo

Usando la definición

$$\vec{B} = \oint_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I' d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi \|\vec{r} - \vec{r}'\|^3}$$

Ley Circuital de Ampere

$$\oint_{\Gamma(S)} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{enlazada}} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

Usando el potencial magnético vector

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

3ª Ecuación de Maxwell

4ª Ecuación de Maxwell