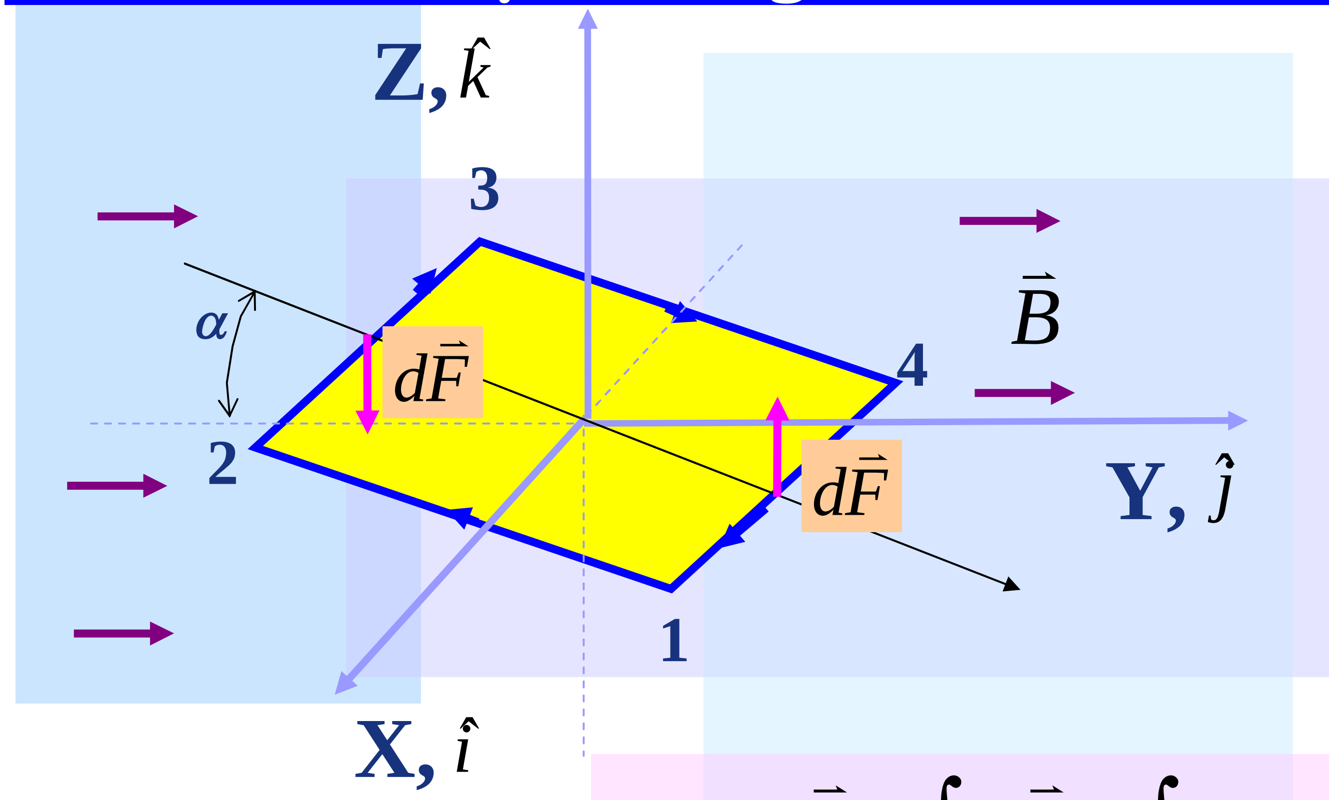
FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO
Clase 19
Magnetostática-IV
Medios Materiales

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Repaso torque magnético
- Dipolo magnético
- Torque de campo magnético sobre dipolo
- Campo magnético de dipolo
- Modelo atómico de los materiales

Torque Magnético

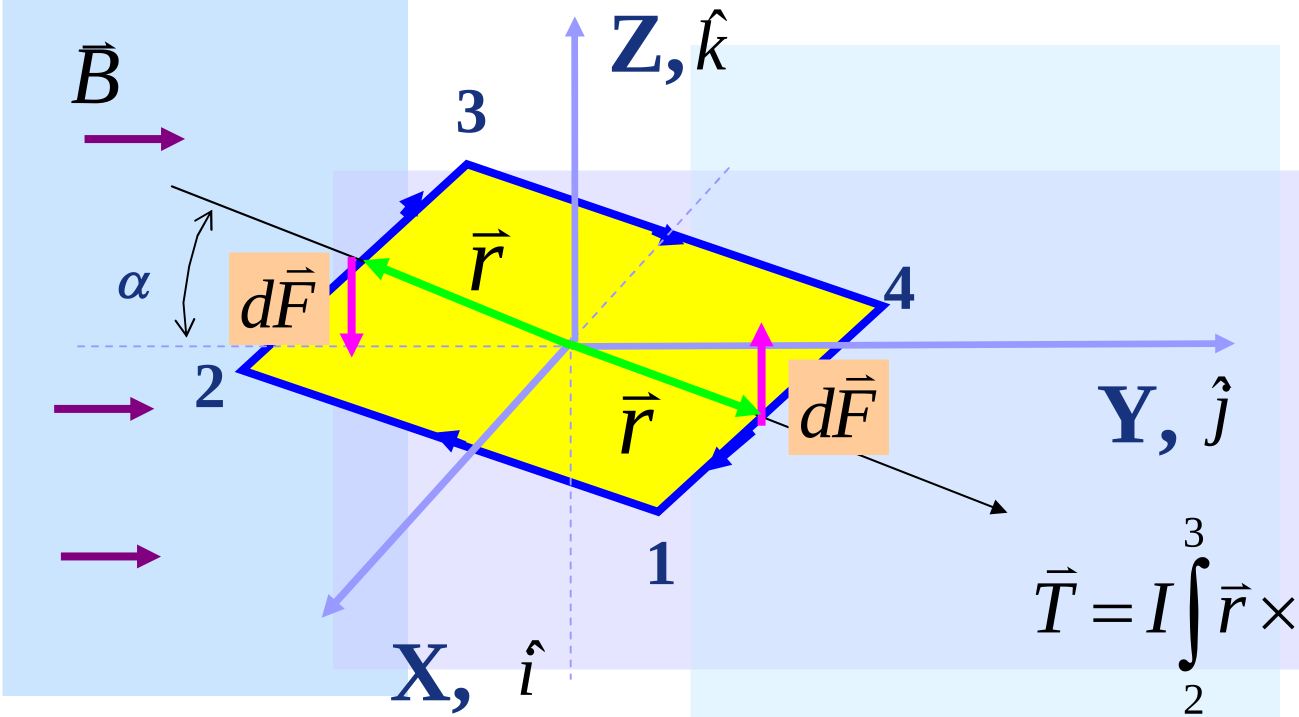


$$d\vec{T} = \vec{r} \times d\vec{F}$$

$$\vec{T} = \oint_c d\vec{T} = \oint_c \vec{r} \times d\vec{F} = \oint_c \vec{r} \times i d\vec{l} \times \vec{B}$$

Torque neto no nulo sobre el circuito

Torque Magnético

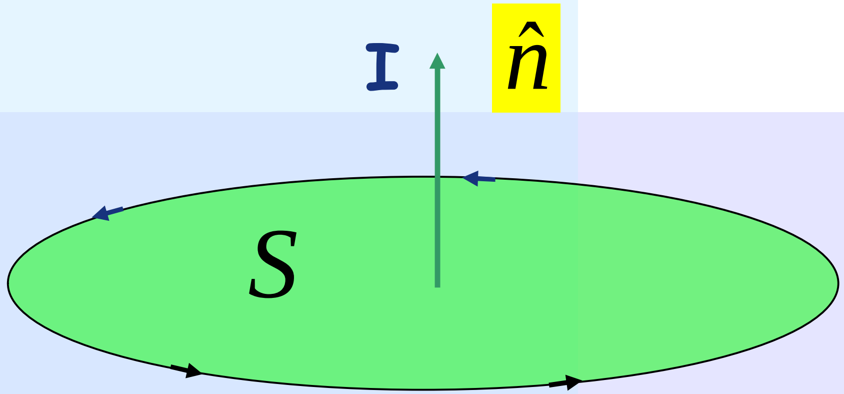


$$\vec{T} = I\int_2^3 \vec{r}\times dx\hat{i}\times\vec{B} + I\int_4^1 \vec{r}\times dx\hat{i}\times\vec{B}$$

$$\vec{T} = \frac{Iwl}{2}\cos\alpha\,\hat{i} + \frac{Iwl}{2}\cos\alpha\,\hat{i}$$

Torque neto sobre el circuito $\therefore\ \vec{T} = Iwl\cos\alpha\,\hat{i}$

Dipolo Magnético

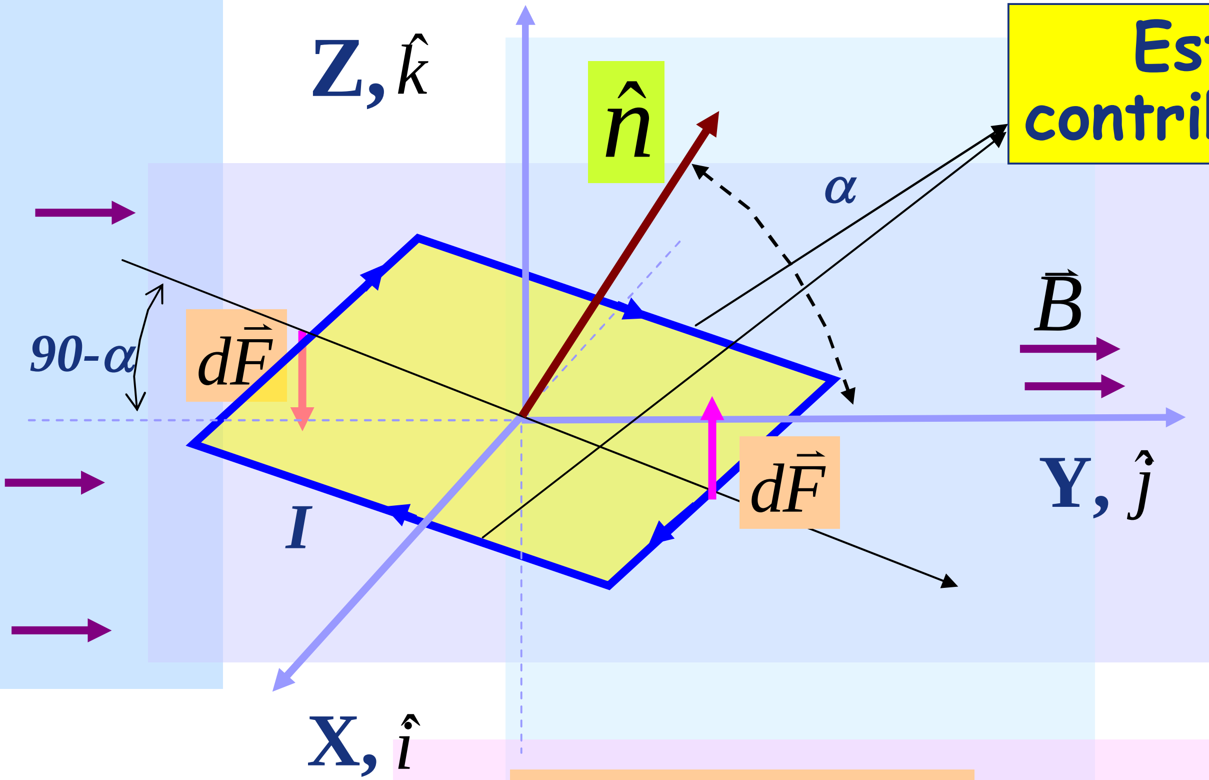


Dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S\hat{n} \; [Am^2]$$

Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Torque de campo sobre circuito rectangular



Estos lados no contribuyen al torque

$$\vec{T} = Iwl\cos\alpha\,\hat{i}$$

Torque $\vec{T} = IS\,\hat{n}\times\vec{B}$

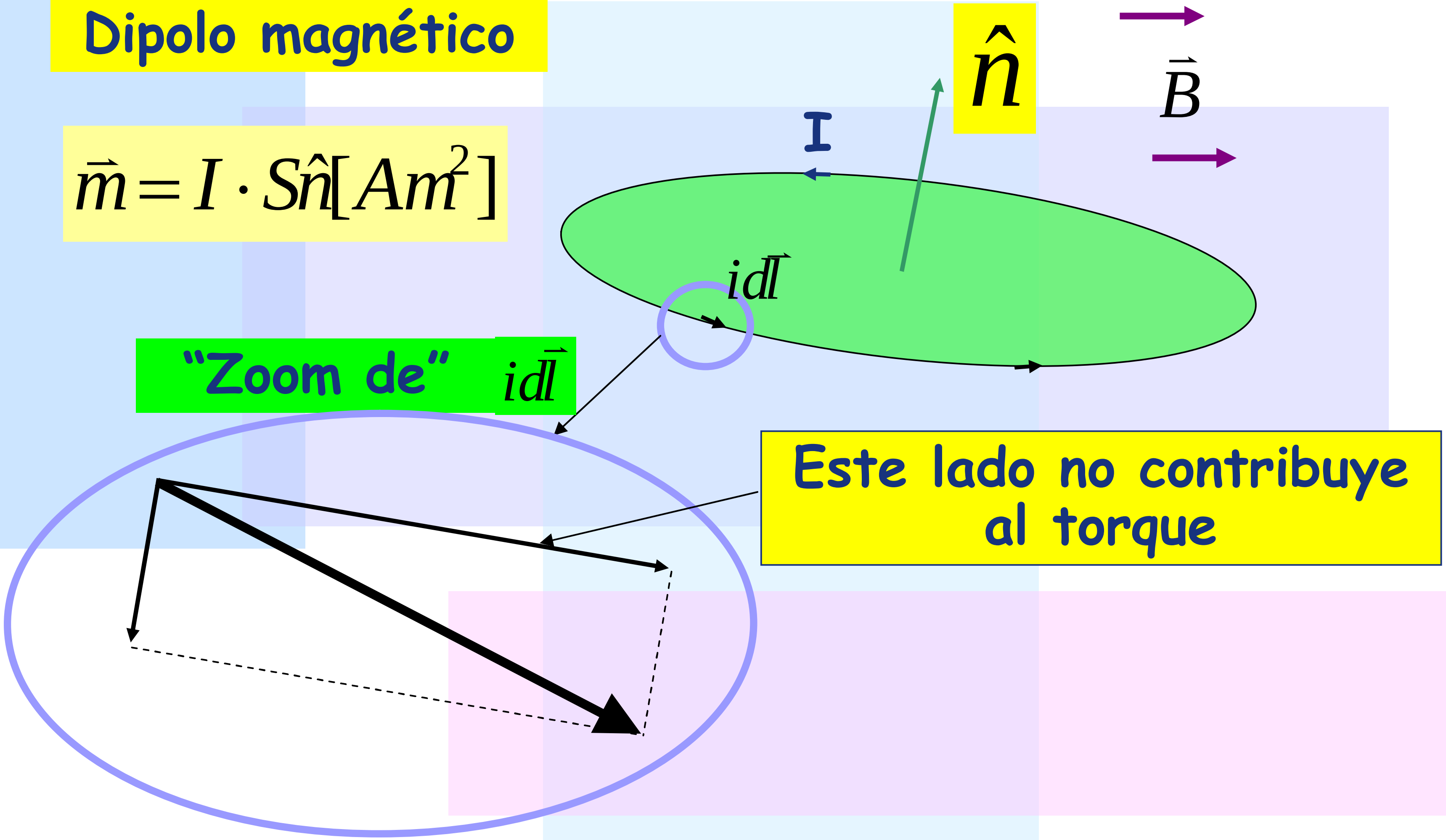
Dipolo magnético $\vec{m} = IS\hat{n}$

$$\vec{T} = \vec{m}\times\vec{B}$$

Torque de campo sobre dipolo

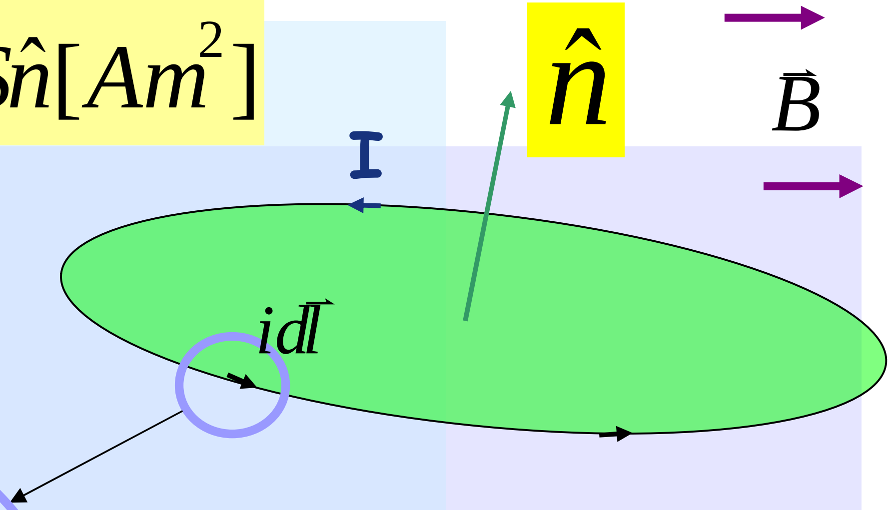
Dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S\hat{n}\,[Am^2]$$

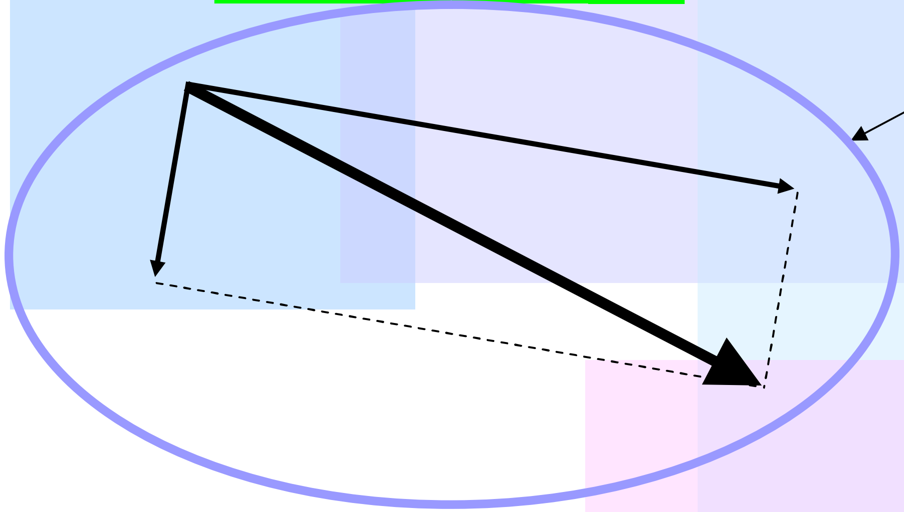


Torque de campo sobre dipolo

Dipolo magnético $\vec{m} = I \cdot S\hat{n} [Am^2]$



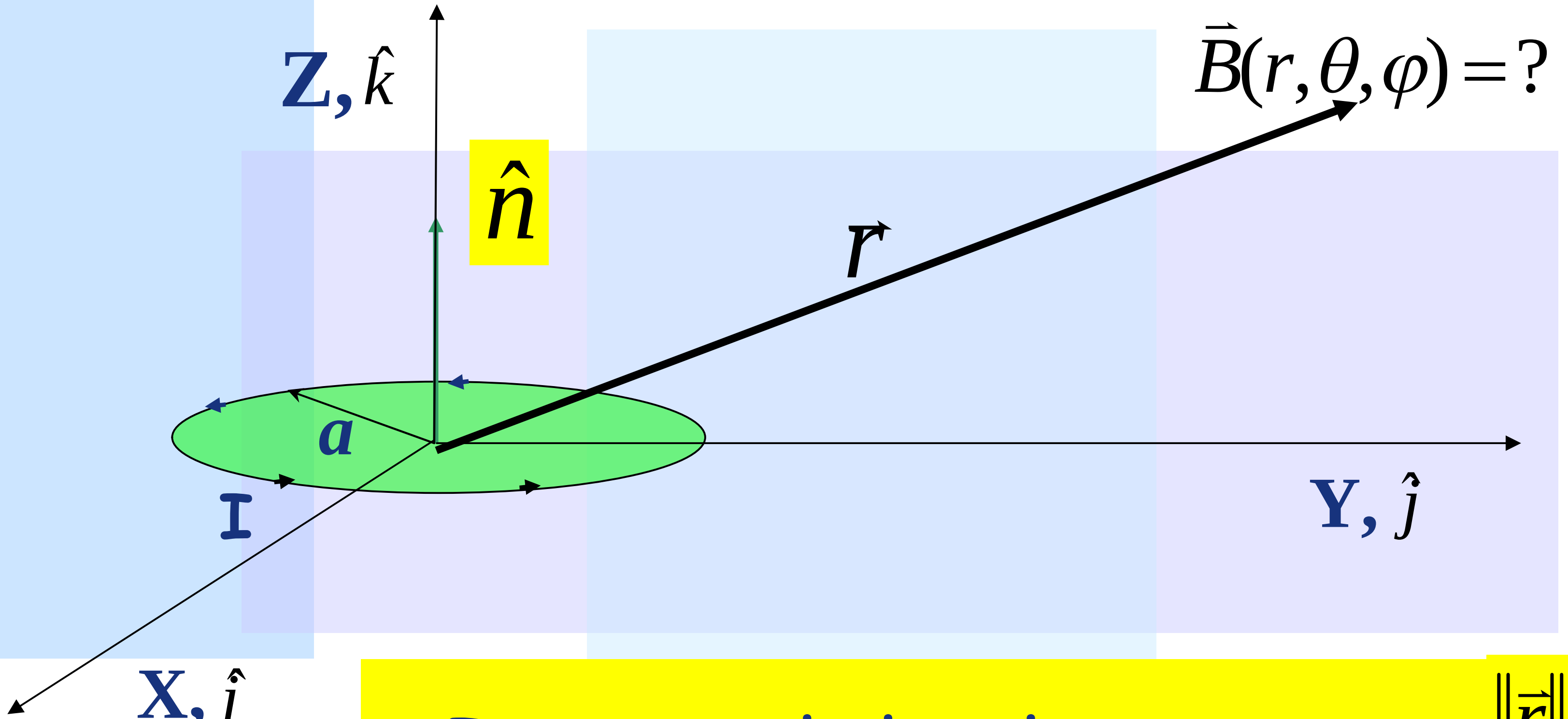
"Zoom de" $id\vec{l}$



Luego torque también se puede expresar como

$$\vec{T} = \vec{m} \times \vec{B}$$

Campo magnético de un dipolo



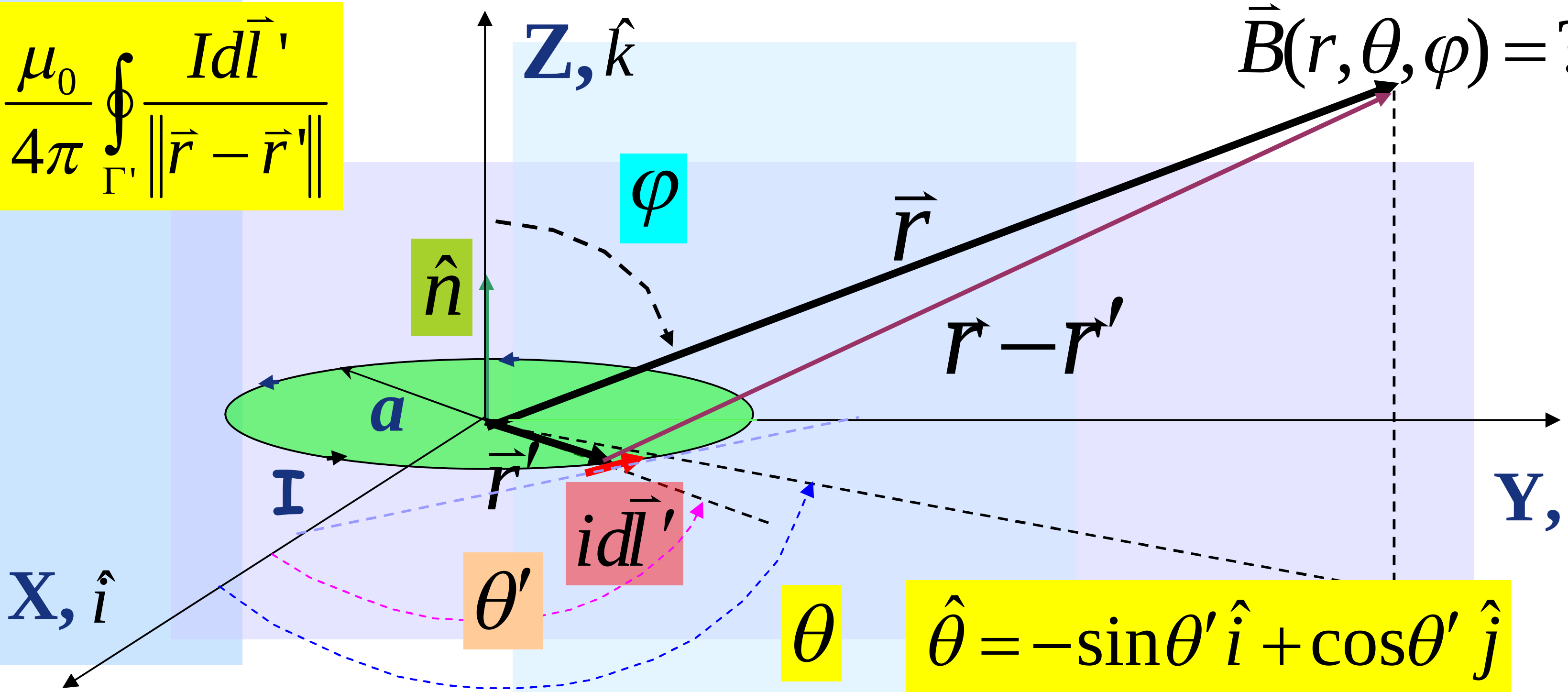
Interesa calcular el campo para $\|\vec{r}\| >> a$

Usaremos el potencial magnético vector $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$

Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{Id\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

$$\vec{B}(r,\theta,\varphi) = ?$$



$$\hat{\theta} = -\sin\theta' \,\hat{i} + \cos\theta' \,\hat{j}$$

$$id\vec{l}\,' = Iad\theta'\,\hat{\theta} = Iad\theta'(-\sin\theta'\,\hat{i} + \cos\theta'\,\hat{j})$$

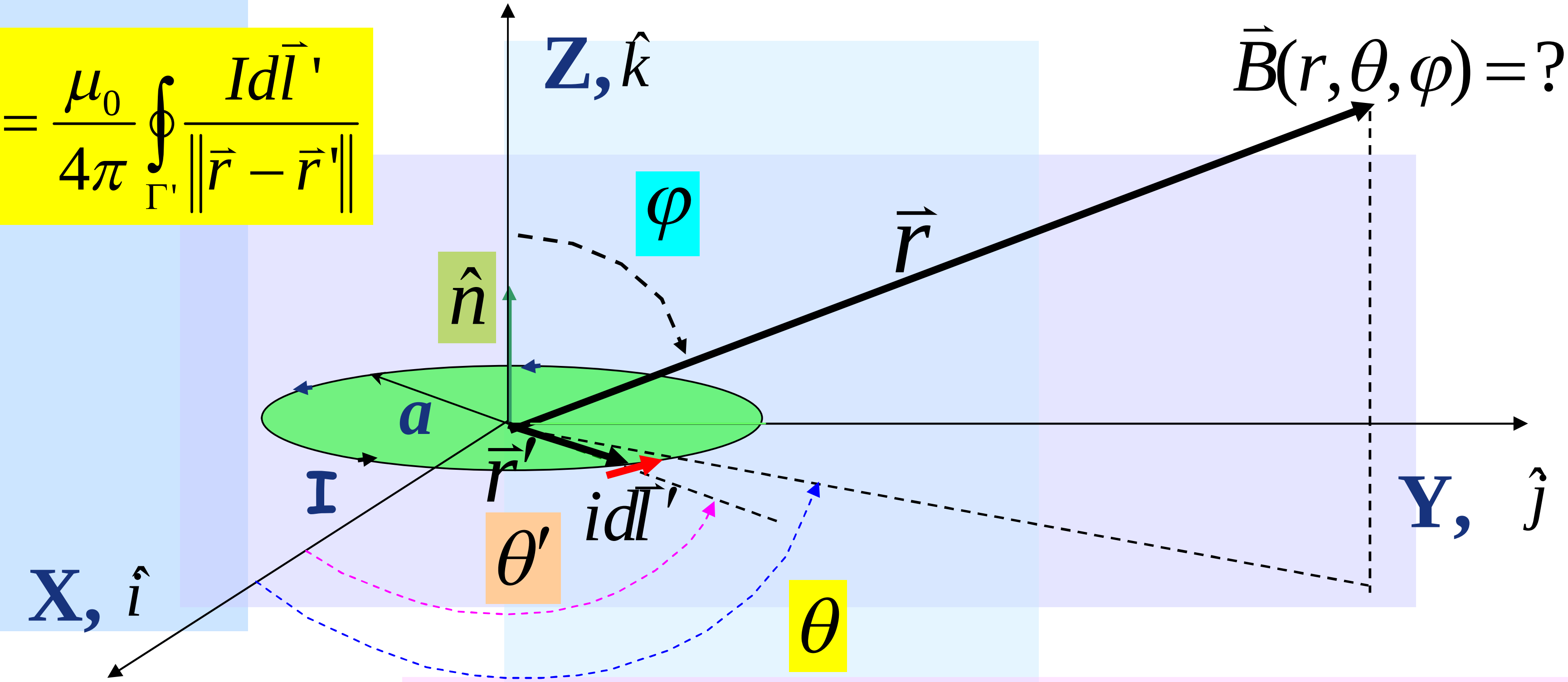
$$\frac{1}{\|r - r'\|} = \frac{1}{\|r\|} + \frac{r \bullet r'}{\|r\|^3} + TOS$$

$$\|r\| >> a \quad \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|} \approx \frac{1}{\|\vec{r}\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}\,'}{\|\vec{r}\|^3}$$

Campo magnético de un dipolo

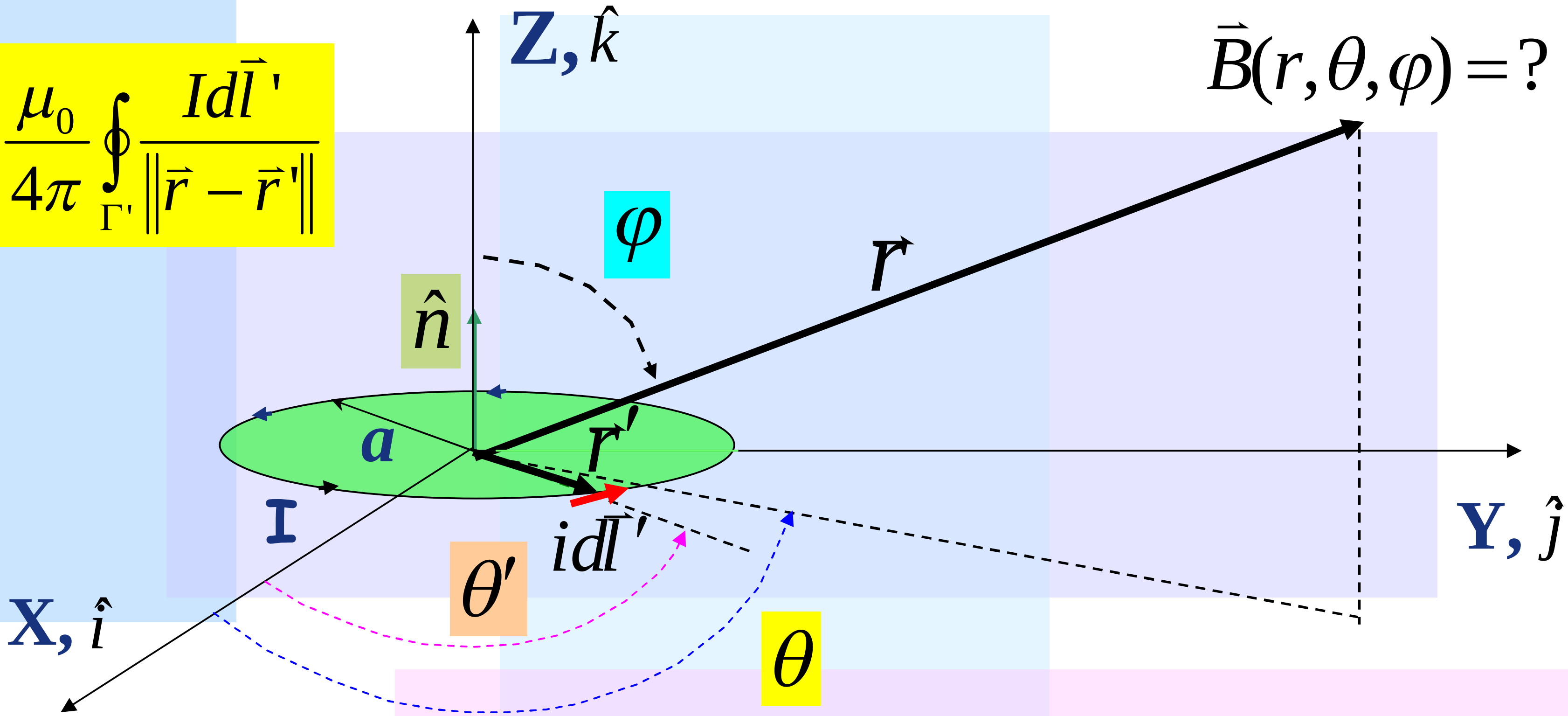
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\left\| \vec{r} \right\|} + \frac{\vec{r} \bullet \vec{r}\,'}{\left\| \vec{r} \right\|^3} \right) Iad\theta' (-\sin\theta' \,\hat{\imath} + \cos\theta' \,\hat{\jmath})$$

Campo magnético de un dipolo

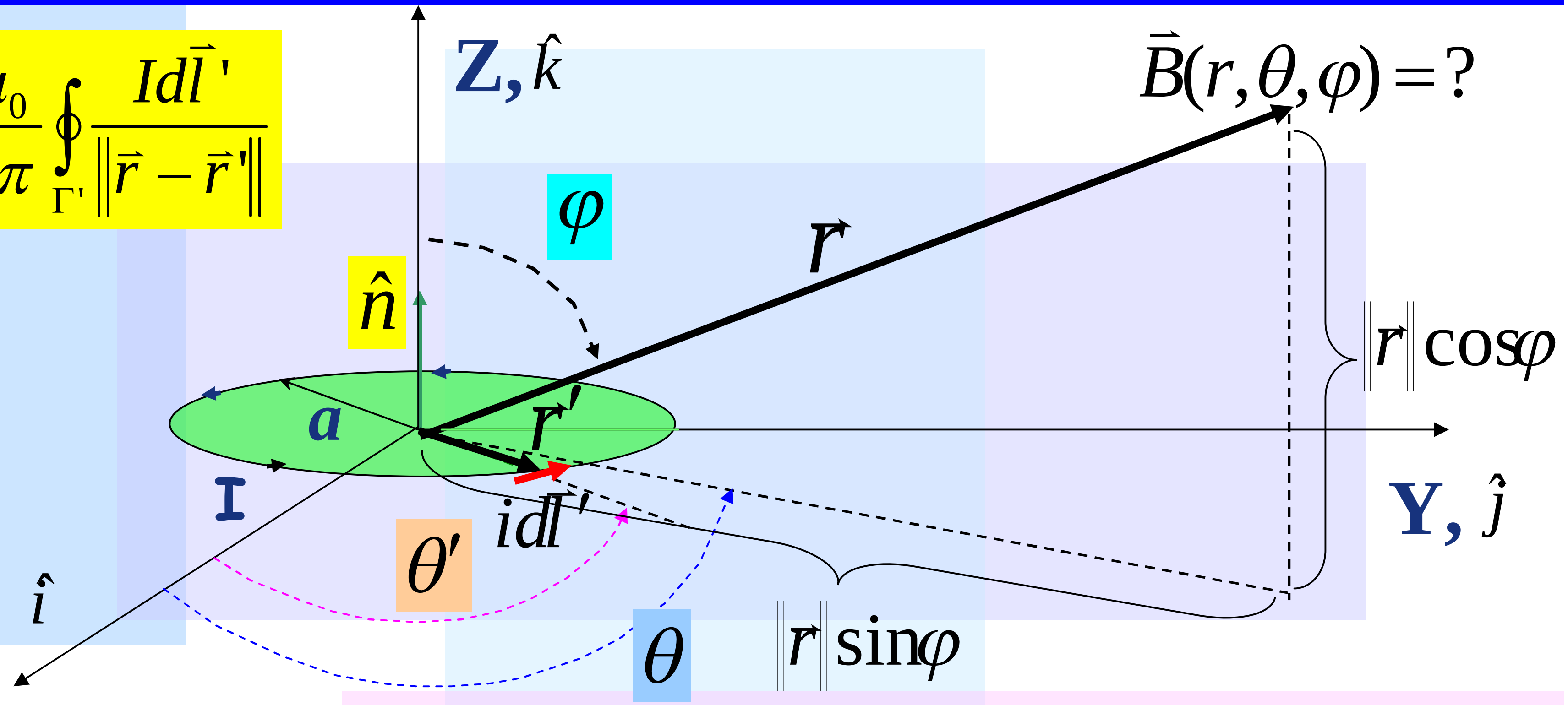
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi \left\| \vec{r} \right\|^3} \int_0^{2\pi} \vec{r} \bullet \vec{r}\,' I a d\theta' (-\sin\theta' \,\hat{i} + \cos\theta' \,\hat{j})$$

Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$



$$\vec{r}\,' = a\cos\theta'\,\hat{i} + a\sin\theta'\,\hat{j}$$

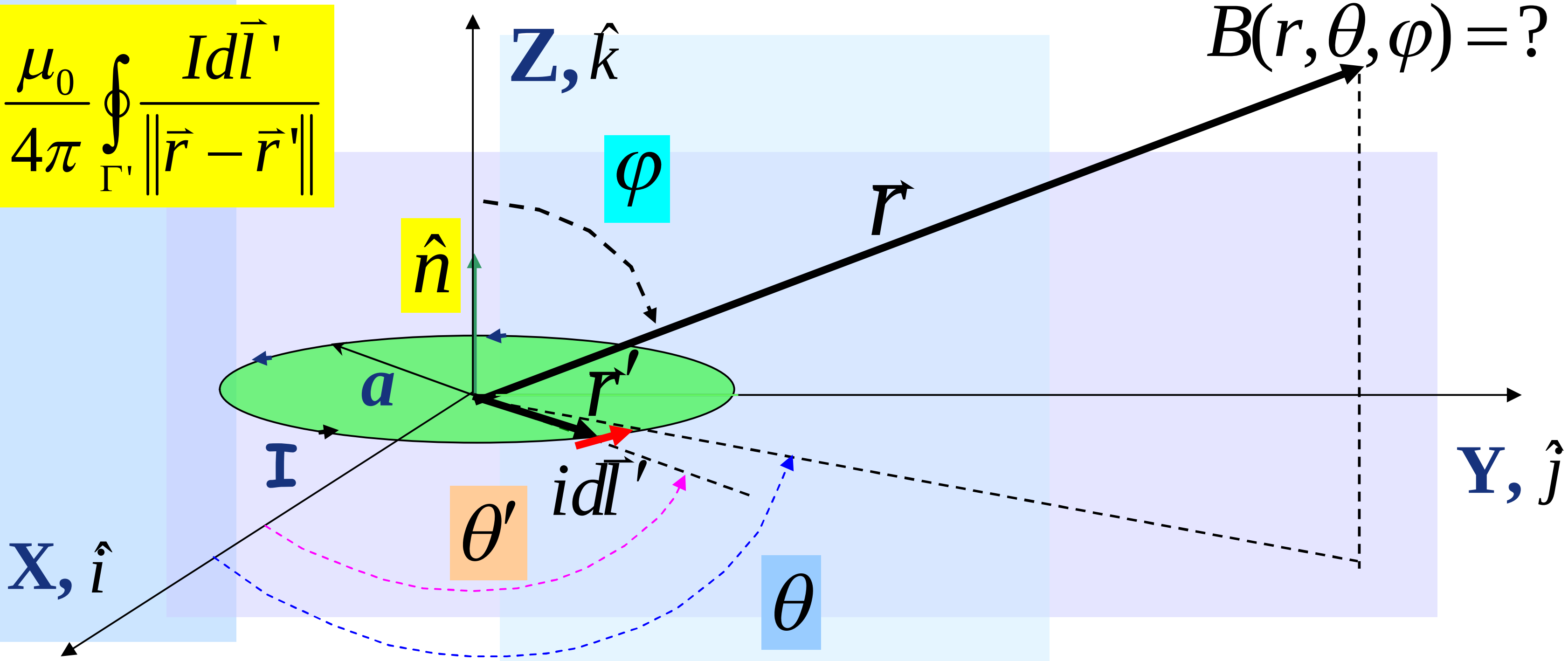
$$\vec{r} = r\sin\varphi\cos\theta\,\hat{i} + r\sin\varphi\sin\theta\,\hat{j} + r\cos\varphi\,\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{r} \bullet \vec{r}\,' = ra\sin\varphi\cos\theta\cos\theta' + ra\sin\varphi\sin\theta\sin\theta'$$

Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$

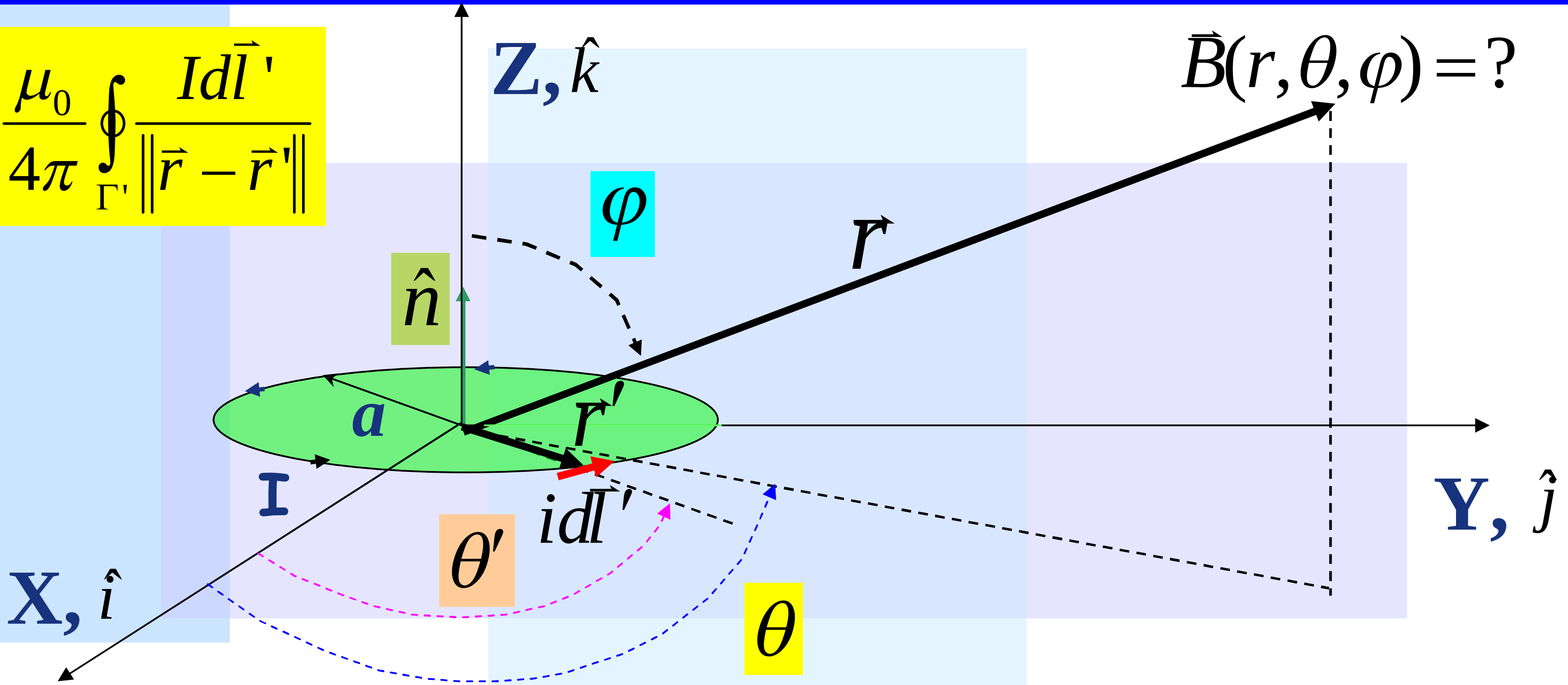
$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = ?$$



$$\vec{A} = \frac{I r a^2 \sin\varphi \mu_0}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\theta' (\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta')(-\sin\theta' \,\hat{i} + \cos\theta' \,\hat{j})$$

Campo magnético de un dipolo

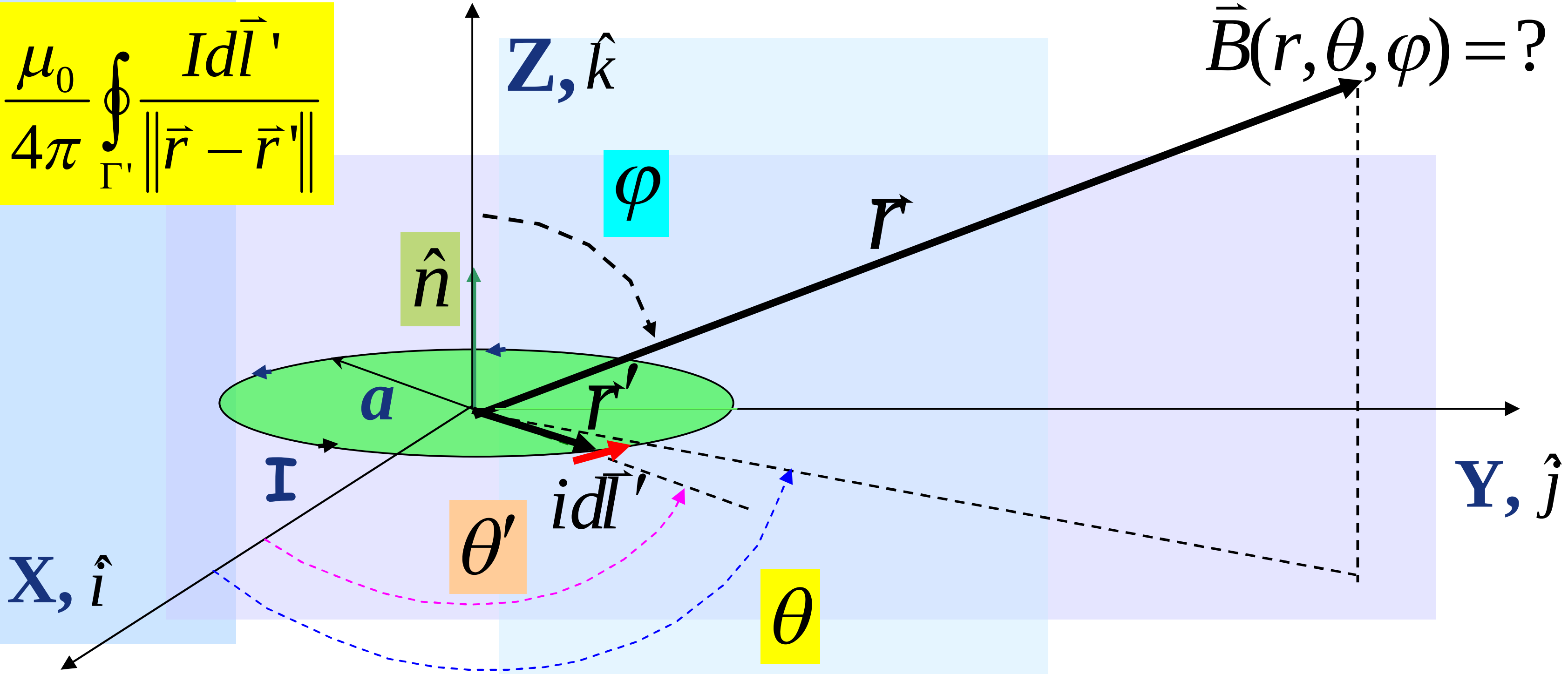
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$



$$\vec{A} = \frac{Ira^2 \sin\varphi \mu_0}{4\pi r^3} \int_0^{2\pi} d\theta' (\cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta')(-\sin\theta' \,\hat{i} + \cos\theta' \,\hat{j})$$

Campo magnético de un dipolo

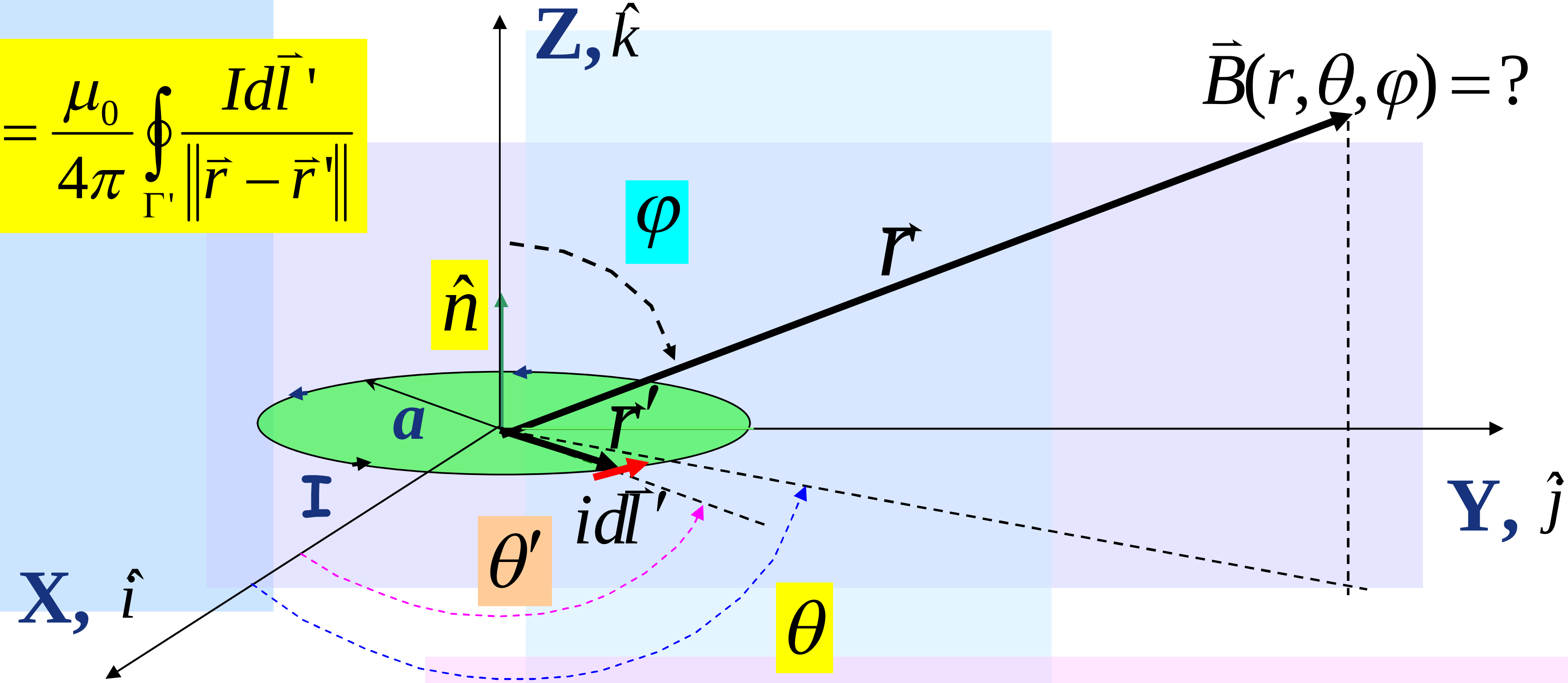
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|}$$



$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\varphi}{4\pi r^2} \int_0^{2\pi} (\cos\theta \cos\theta'^2 \hat{j} - \sin\theta \sin\theta'^2 \hat{i}) d\theta'$$

Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|}$$

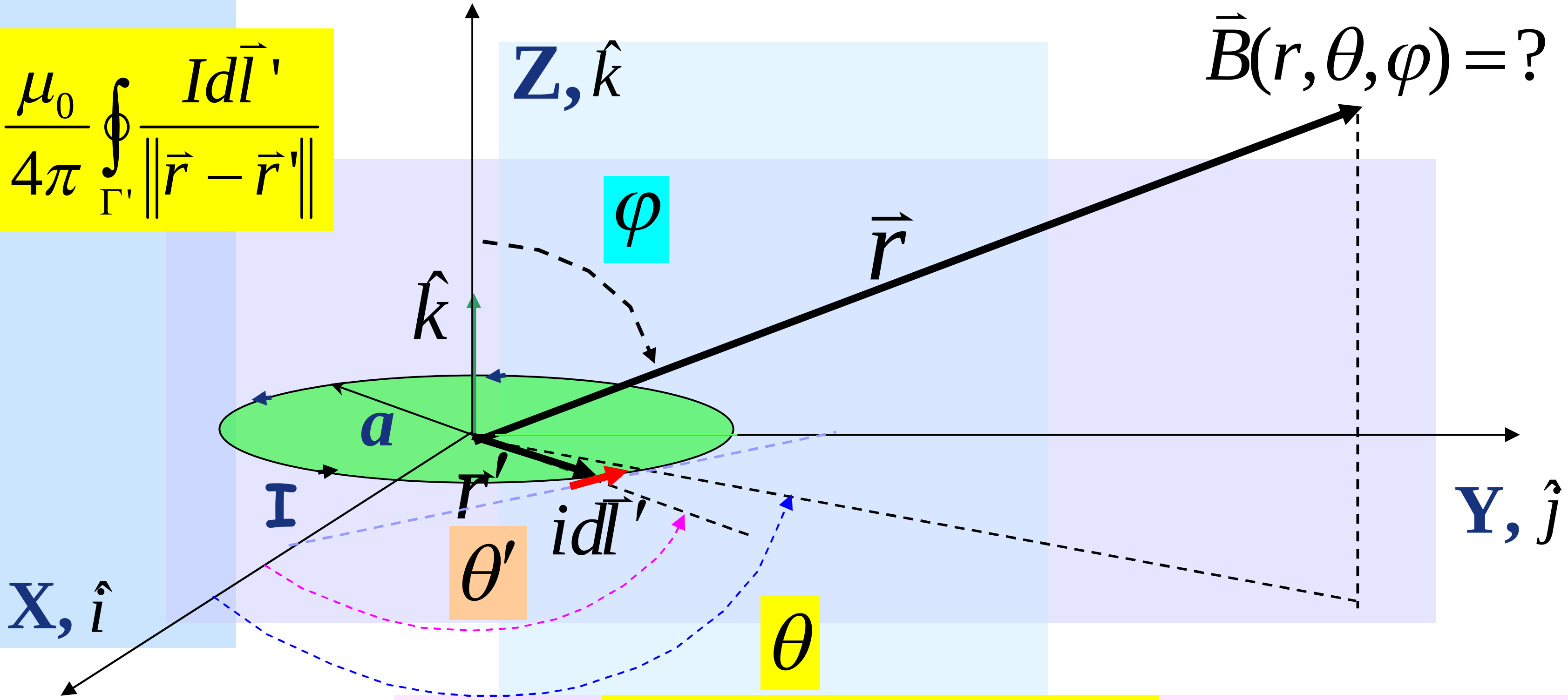


$$\int_0^{2\pi} \cos\theta'^2 d\theta' = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta'}{2} d\theta' \Rightarrow \int_0^{2\pi} \sin\theta'^2 d\theta' = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta'}{2} d\theta' = \pi$$

Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{\Gamma'} \frac{I d\vec{l}\,'}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|}$$

$$\vec{B}(r,\theta,\varphi) = ?$$



$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

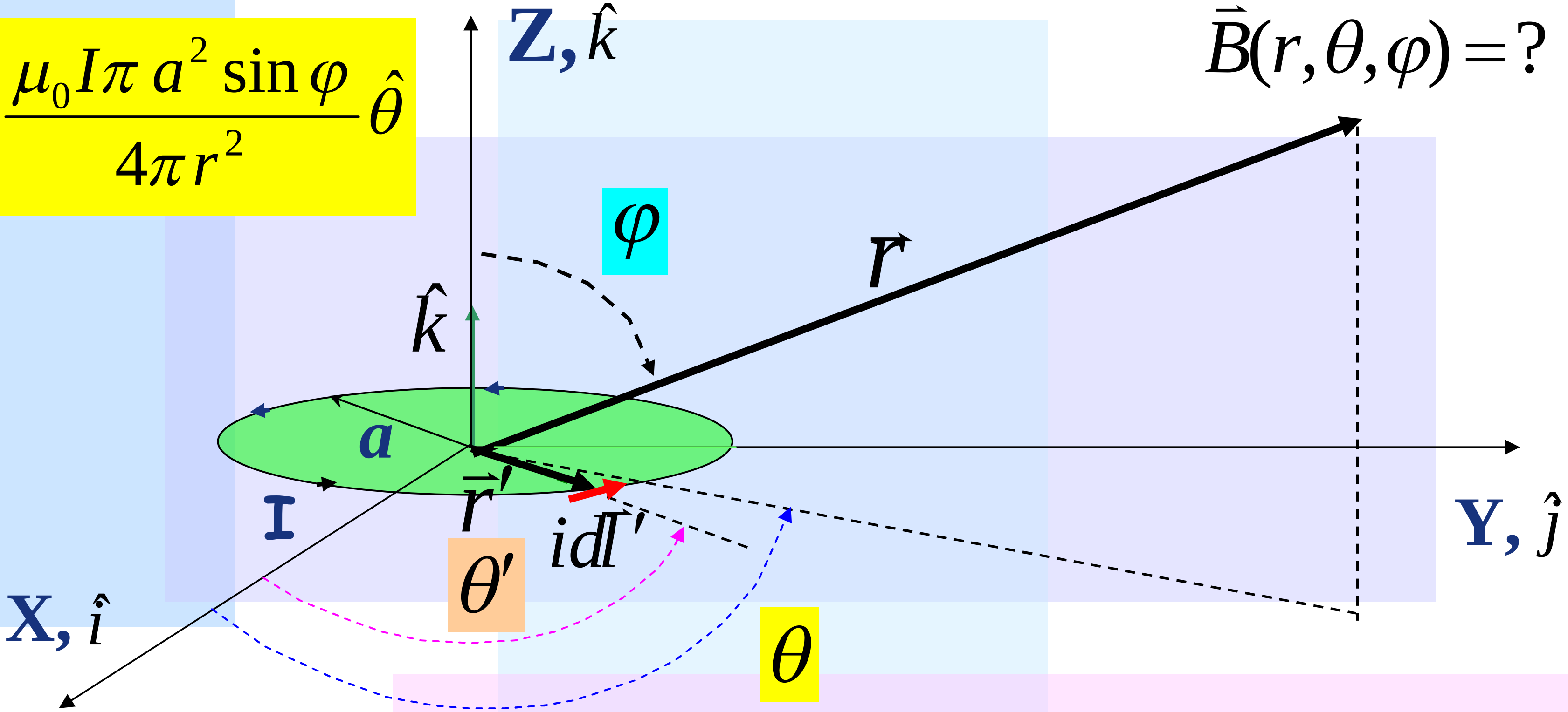
$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I\pi a^2 \sin\varphi}{4\pi r^2}(\cos\theta\,\hat{j} - \sin\theta\,\hat{i})$$

$$\therefore \vec{A} = \frac{\mu_0 I\pi a^2 \sin\varphi}{4\pi r^2}\hat{\theta}$$

Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin\varphi}{4\pi r^2}\hat{\theta}$$

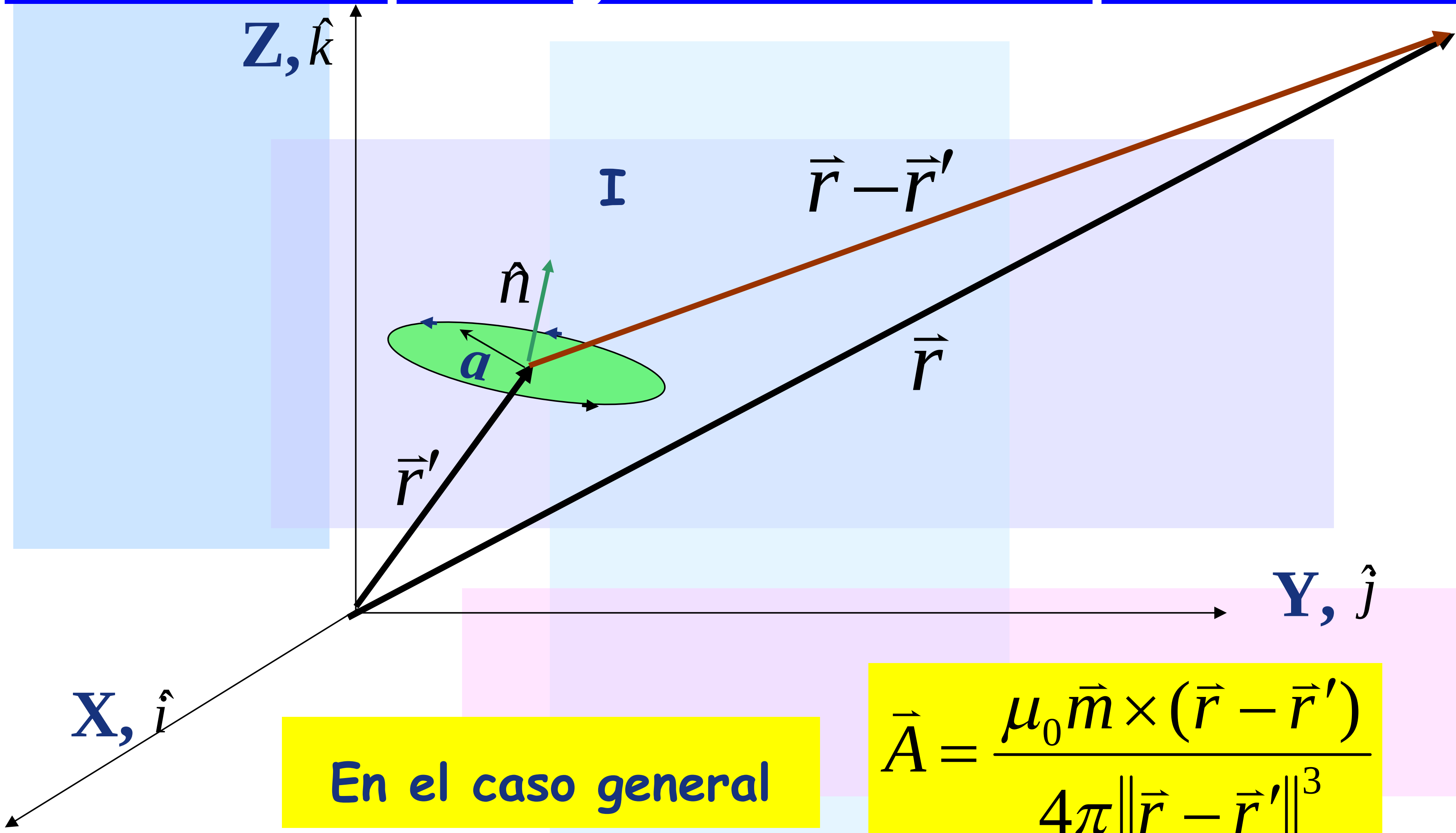
$$\vec{B}(r,\theta,\varphi) = ?$$



pero

$$\vec{m} = IS\hat{n} = I\pi a^2 \hat{k} \quad \Rightarrow \quad \vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m}\times\hat{r}}{4\pi r^2}$$

Campo magnético de un dipolo

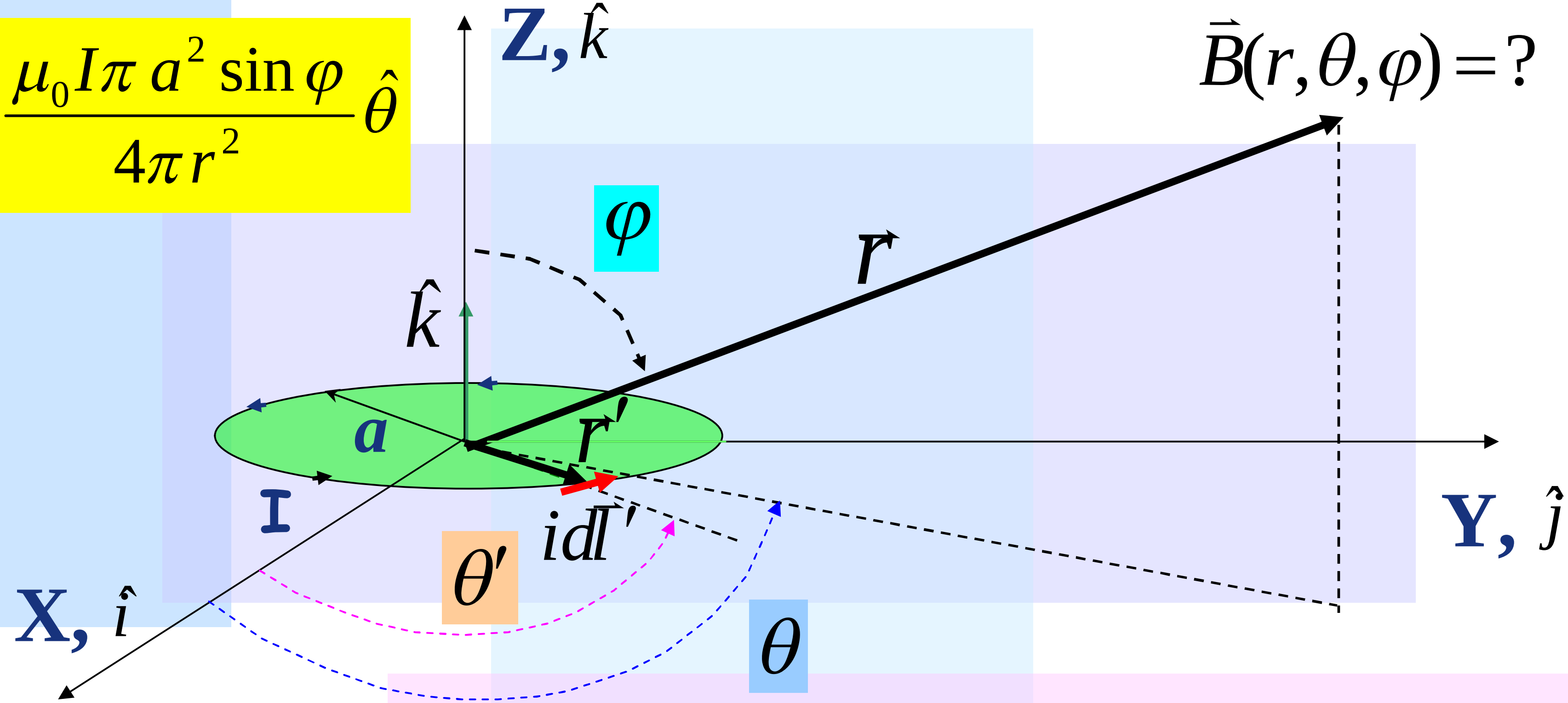


En el caso general

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 \vec{m} \times (\vec{r} - \vec{r}\,')}{4\pi \left\| \vec{r} - \vec{r}\,' \right\|^3}$$

Campo magnético de un dipolo

$$\vec{A} = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin\varphi}{4\pi r^2}\hat{\theta}$$

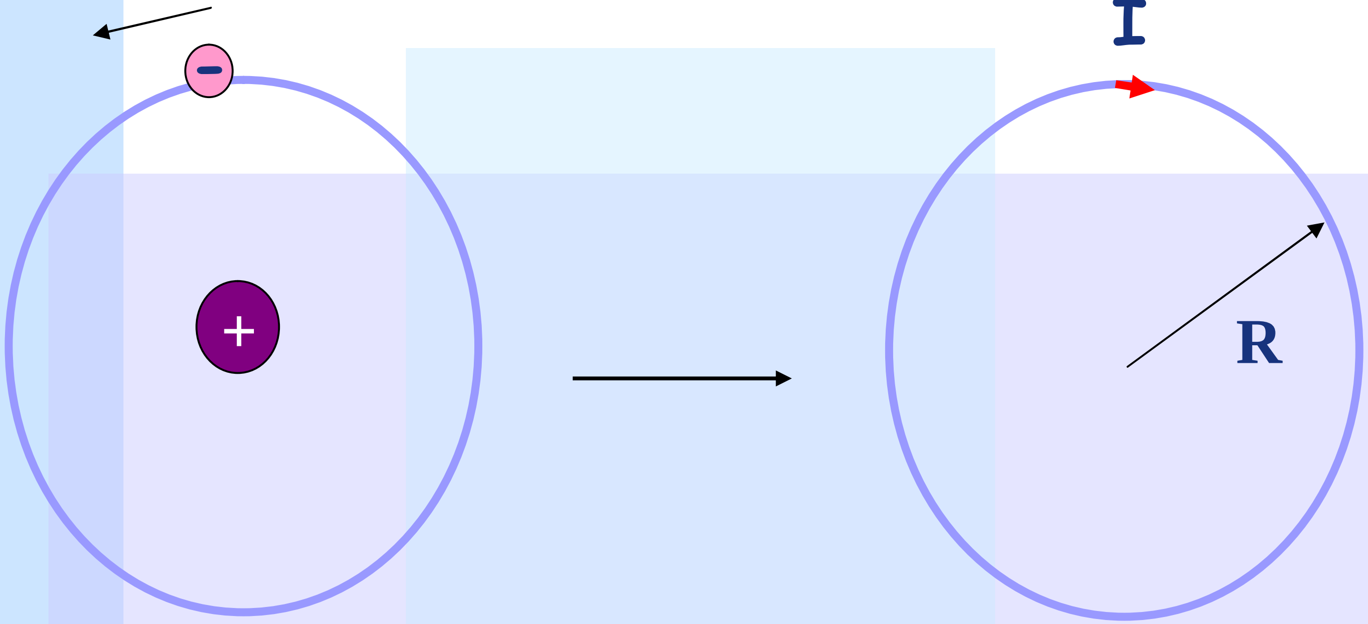


$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Luego

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3}\left(2\cos\phi\,\hat{r} + \sin\phi\,\hat{\phi}\right)$$

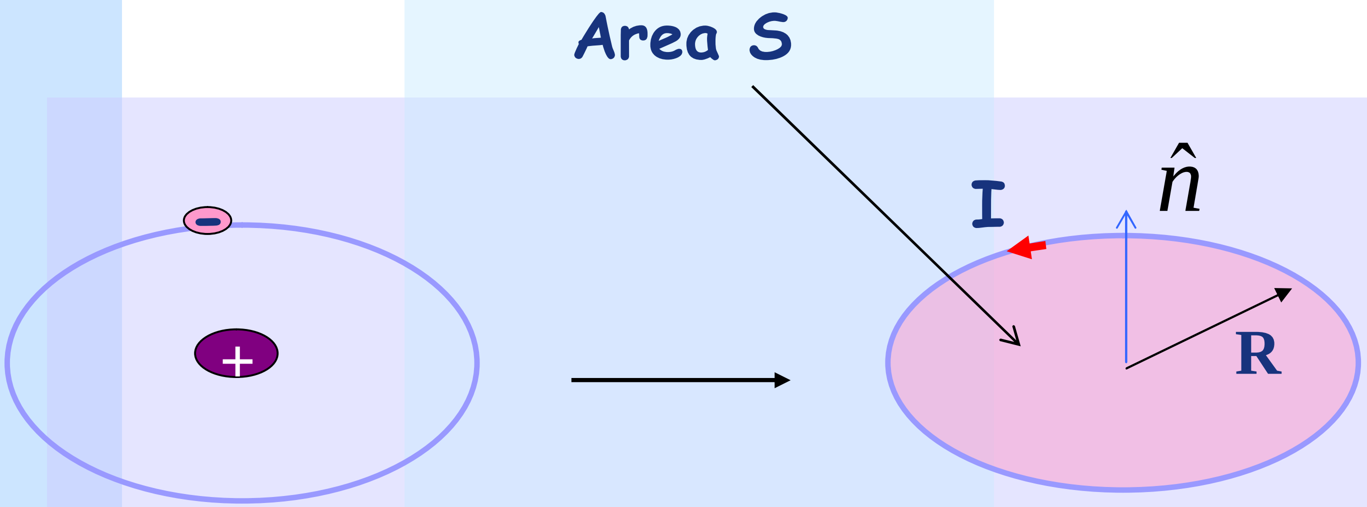
Modelo atómico de los materiales



Movimiento de electrones se puede modelar como una corriente

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{qu}{2\pi R}$$

Modelo atómico de los materiales

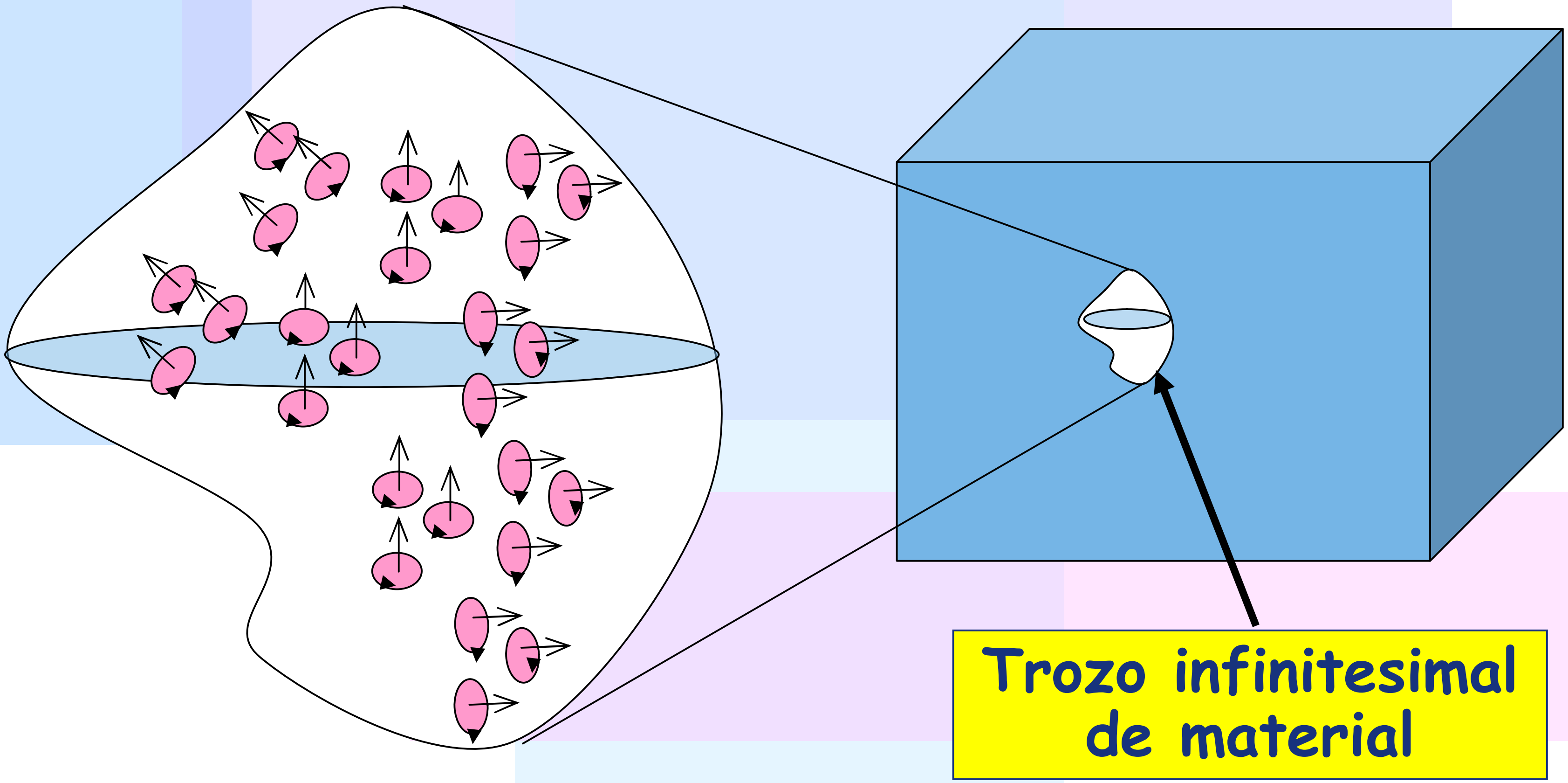


Se puede representar el átomo como un dipolo magnético

$$\vec{m} = I \cdot S\hat{n}[Am^2]$$

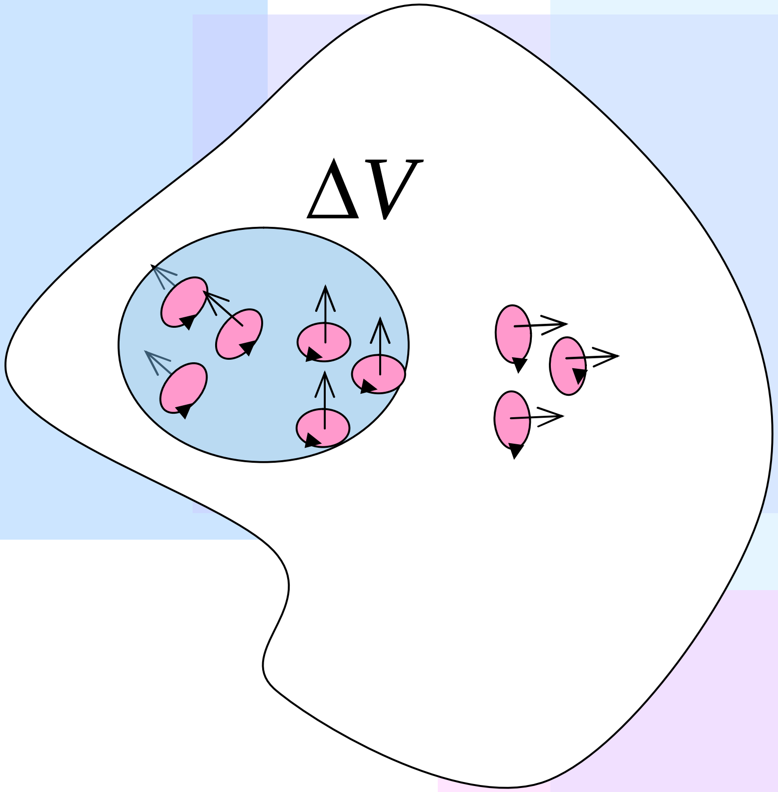
Modelo atómico de los materiales

En un material cualquiera hay un número muy elevado de dipolos magnéticos (átomos)



Modelo atómico de los materiales

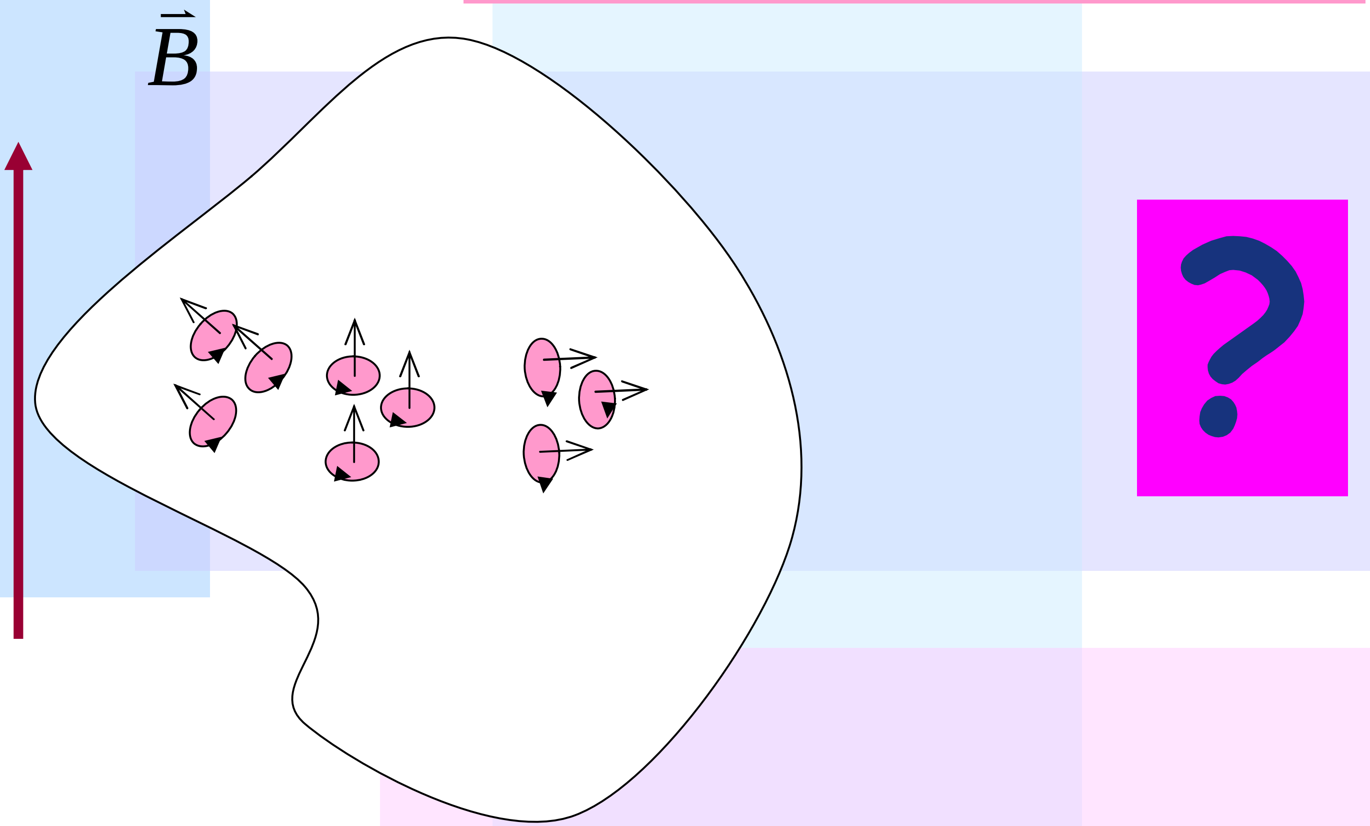
Vector magnetización



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{m} \vec{m}_k}{\Delta V} \; [A/m]$$

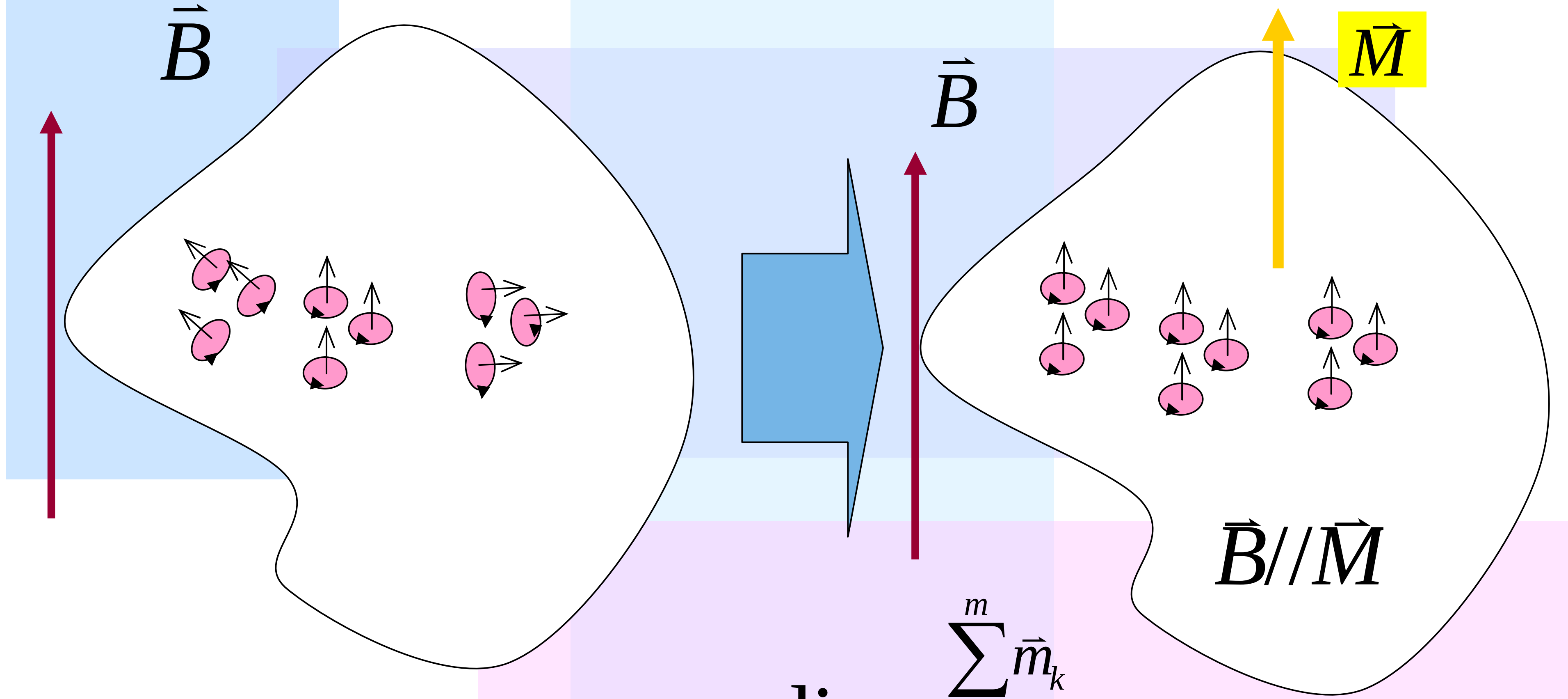
Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización



Modelo atómico de los materiales

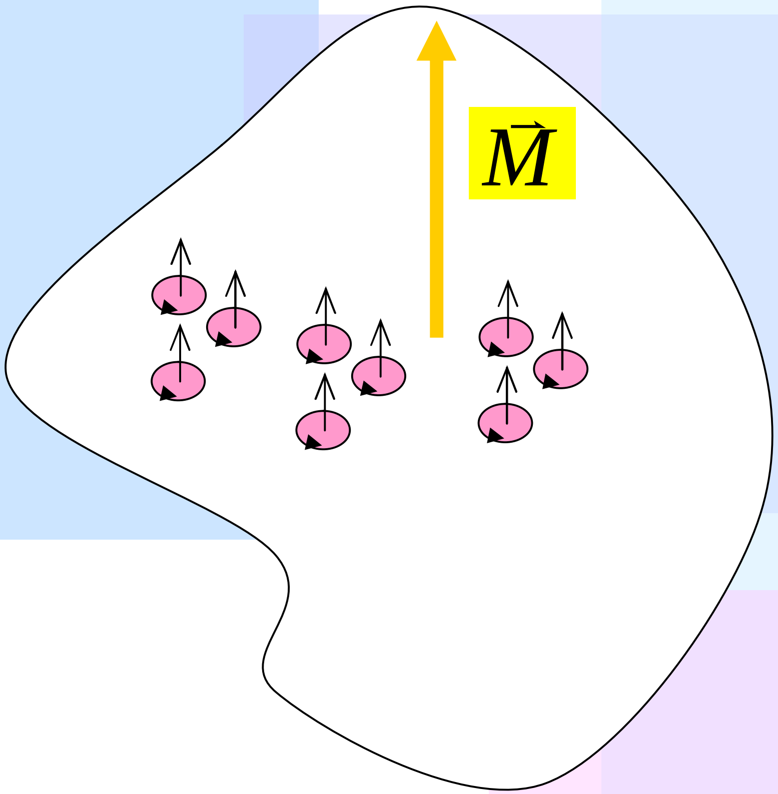
Vector magnetización



$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_{k=1}^{m} \vec{m}_k}{\Delta V} \, [A/m]$$

Modelo atómico de los materiales

Vector magnetización



$$si \quad \vec{B} = 0$$

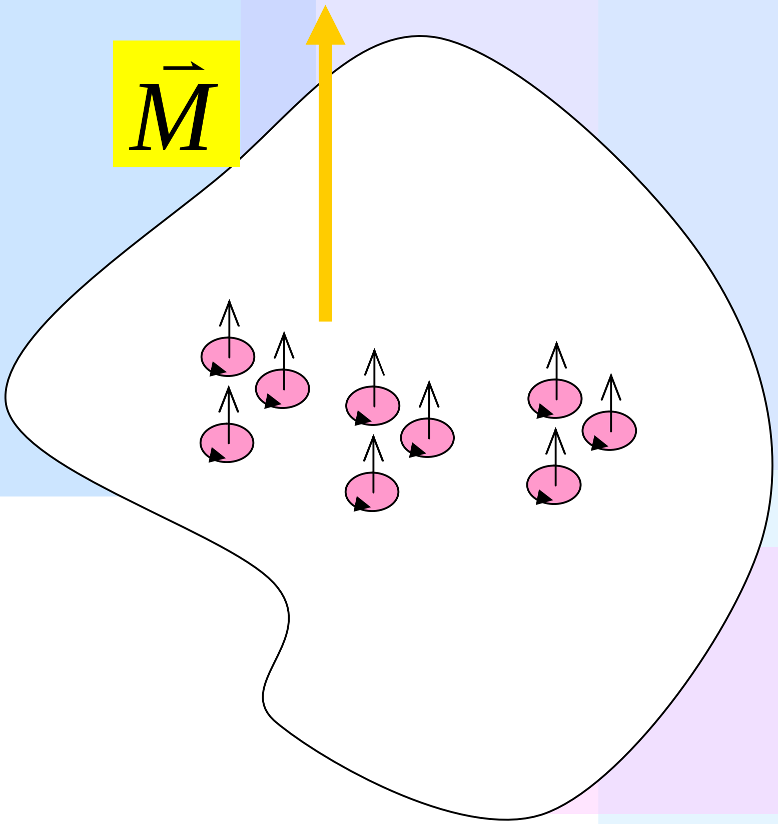
¿Qué ocurre para t→∞?

$$\vec{M} = ?$$

Modelo atómico de los materiales

Algunos Materiales mantienen la magnetización

$\vec{M}$



Pero la mayoría la pierde

$\vec{M} = 0$