FI 2A2 ELECTROMAGNETISMO
Clase 25
Campos Variables en el Tiempo-IV

LUIS S. VARGAS
Area de Energía
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

INDICE

- Movimiento de cargas en presencia de campos
- Energía del campo eléctrico
- Energía del campo magnético
- Energía Electromagnética
- Fuerza
- Ejemplos

Fuerza de Lorentz

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{u} \times \vec{B}$$

Fuerza de Lorentz

Producida por campo eléctrico ($q\vec{E}$)

Producida por campo magnético ($q\vec{u} \times \vec{B}$)

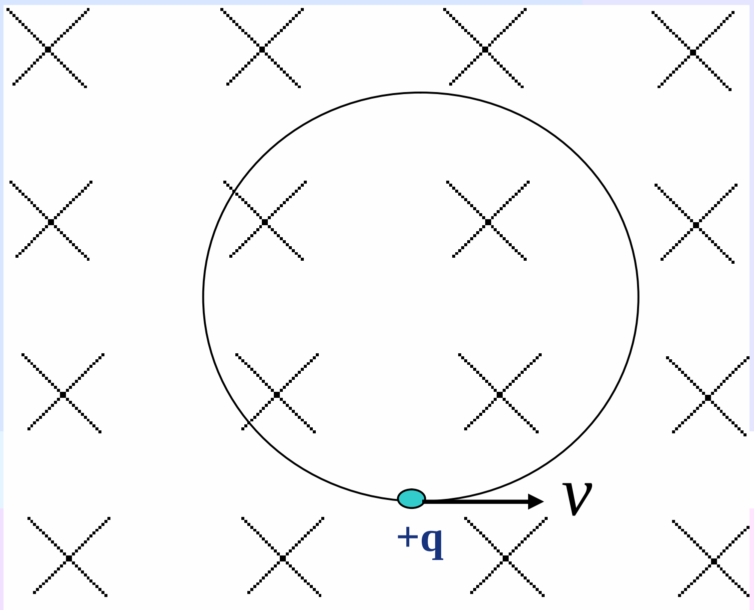
Cargas en campos magnéticos

$$\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$$

Fuerza de Lorentz

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m}$$



$\vec{B}$

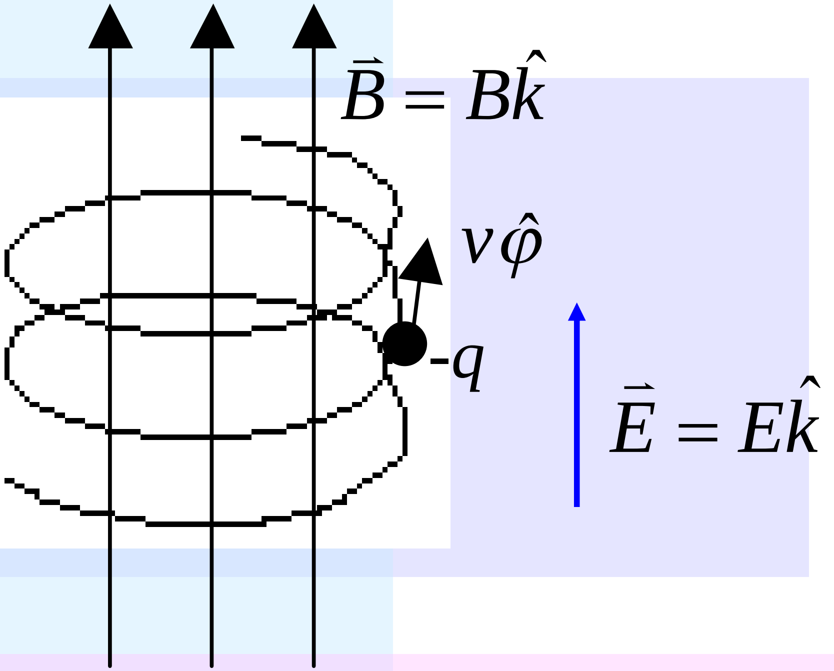
Trayectoria circular

Cargas en Campos Magnéticos

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})$$

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

$$r = \frac{mv}{qB}$$

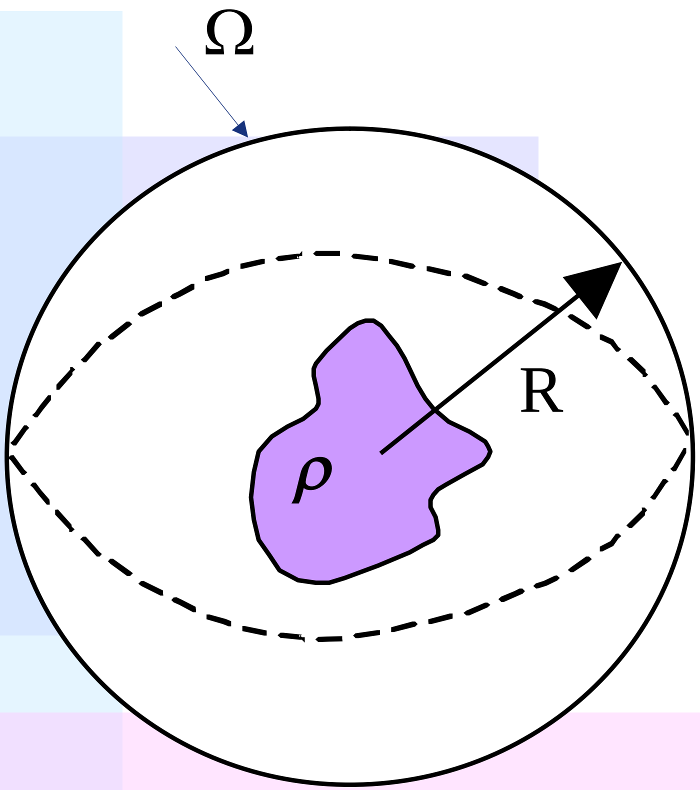


Trayectoria helicoidal

Energía Electromagnética

Habíamos obtenido que la energía del campo eléctrico es

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} \vec{D}\cdot\vec{E}\,dv$$



Aquí Ω es todo el espacio

Energía Electromagnética

3ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad / \vec{H} \cdot$$

4ª Ecuación de Maxwell

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad / \vec{E} \cdot$$

$$\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) = \vec{E} \cdot \vec{J} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Sumando

$$\vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H}\right) - \vec{H} \cdot \left(\nabla \times \vec{E}\right) = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \vec{J}$$

Energía Electromagnética

$$\vec{E}\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)-\vec{H}\cdot\left(\nabla\times\vec{E}\right)=\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\vec{J}$$

Usando la propiedad $\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot\vec{H}-\left(\nabla\times\vec{H}\right)\cdot\vec{E}$

$$\left.\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}&=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\ \nabla\times\vec{H}&=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)-\vec{H}\cdot\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{D}&=\varepsilon\,\vec{E}\\ \vec{B}&=\mu\,\vec{H}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad \nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\vec{E}\cdot\left(\frac{\partial\left(\varepsilon\vec{E}\right)}{\partial t}\right)-\mu\vec{H}\cdot\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)-\vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\varepsilon\frac{\partial}{2\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{E}\right)-\mu\frac{\partial}{2\partial t}\left(\vec{B}\cdot\vec{B}\right)-\vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=-\frac{\partial}{2\partial t}\left(\vec{E}\cdot\varepsilon\vec{E}\right)-\frac{\partial}{2\partial t}\left(\mu\vec{B}\cdot\vec{B}\right)-\vec{E}\cdot\vec{J}$$

Energía Electromagnética

$$\Rightarrow \quad -\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{D})}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(\vec{H}\cdot\vec{B})}{\partial t}+\vec{E}\cdot\vec{J}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(\vec{E}\cdot\vec{D})}{\partial t}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial(\vec{H}\cdot\vec{B})}{\partial t}+\vec{E}\cdot\vec{J}=-\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)$$

Tomando la integral sobre un volumen Ω muy grande

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dv+\iiint_{\Omega}\vec{E}\cdot\vec{J}dv=-\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)dv$$

Energía Electromagnética

Nos interesa el caso cuando Ω es todo el espacio

$$\Rightarrow \iiint_{\Omega} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dv + \iiint_{\Omega} \vec{E}\cdot\vec{J}dv = -\iiint_{\Omega} \overbrace{\nabla}^{\propto \frac{1}{r}} \cdot \left(\underbrace{\vec{E}\times\overbrace{\vec{H}}^{\propto \frac{1}{r^2}}}_{\propto \frac{1}{r^2}}\right)\underbrace{dv}_{\propto r^2}$$

$$\propto \frac{1}{r^3} \qquad \therefore \lim_{r\to\infty}\left(\iiint_{\Omega}\cdots\right)=0$$

Energía Electromagnética

Nos interesa el caso cuando Ω es todo el espacio

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{\Omega}\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dv}_{\text{Energía del campo electromagnético}} + \underbrace{\iiint_{\Omega}\vec{E}\cdot\vec{J}dv}_{\text{Potencia consumida por efecto Joule}} = 0$$

Energía del campo electromagnético

Potencia consumida por efecto Joule

$$U = \iiint_{\Omega}\frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}+\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dv$$

$$P_{Joule} = \iiint_{\Omega}\vec{E}\cdot\vec{J}dv$$

Energía del campo eléctrico ($\vec{E}\cdot\vec{D}$)

Energía del campo magnético ($\vec{H}\cdot\vec{B}$)

Energía Electromagnética

Si no hay pérdidas Joule $P_{Joule} = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J} dv = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dv = 0$$

$$\therefore U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2} \left(\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B} \right) dv = Cte.$$

En ausencia de pérdidas Joule la energía electromagnética se conserva

Energía Electromagnética

Si no hay campos magnéticos

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D}\right)dv$$

Si no hay campos eléctricos

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2}\left(\vec{H}\cdot\vec{B}\right)dv$$

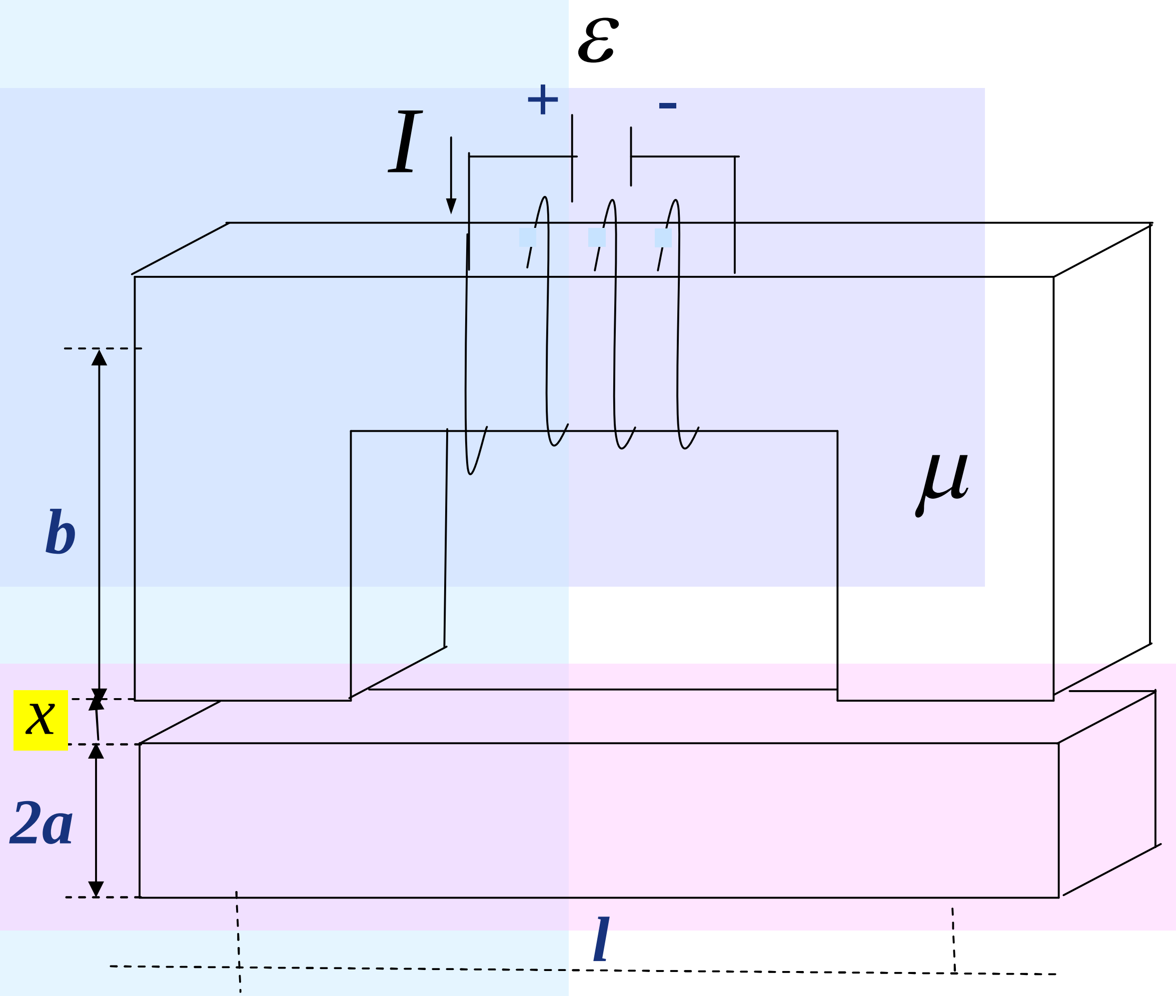
Energía Electromagnética

Ejemplo 1

Calcular la energía para el sistema compuesto de un material ferromagnético de sección cuadrada S.

Aproximar para el caso

$$\mu >> \mu_0$$



Energía Electromagnética

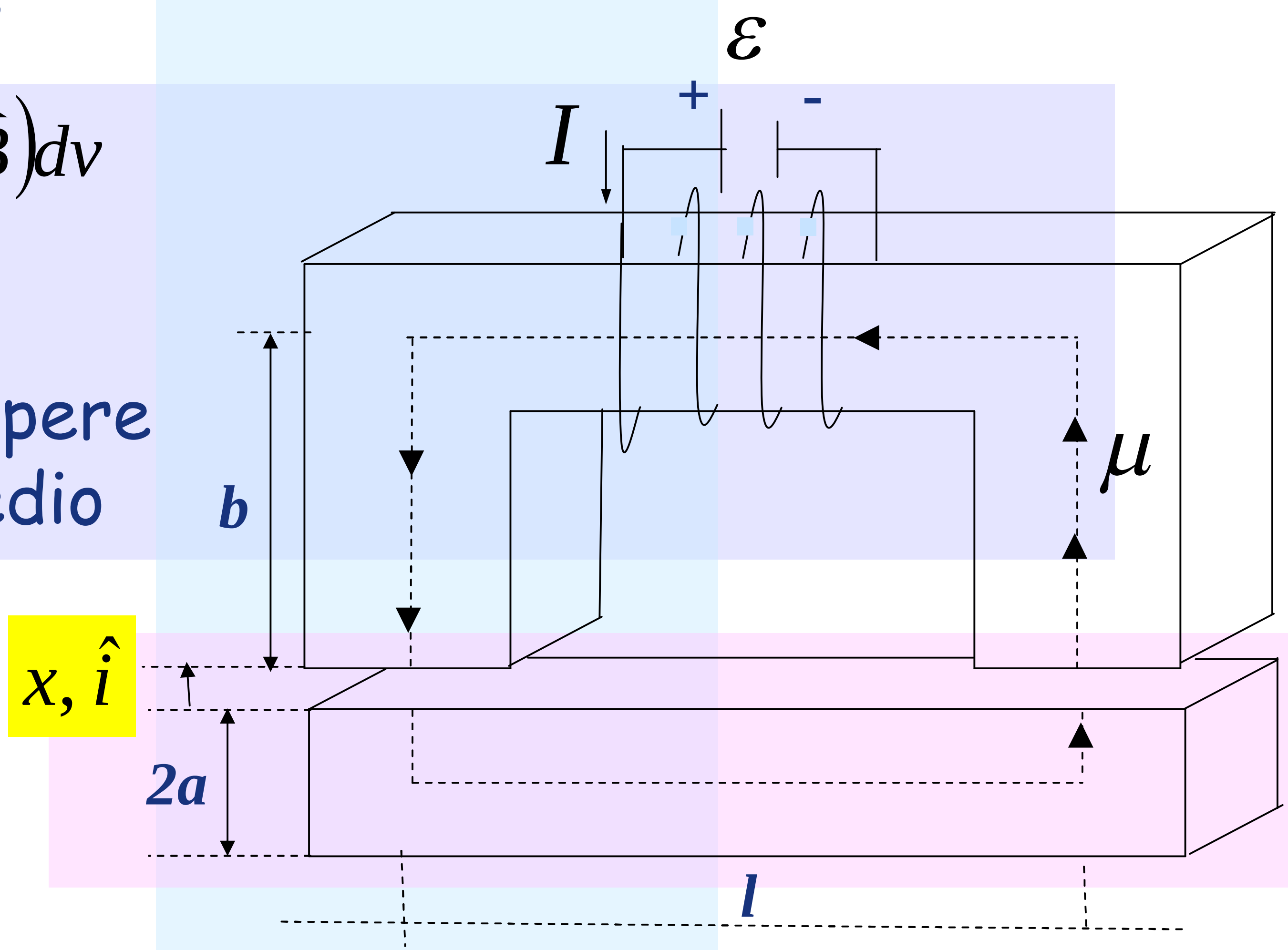
La energía es

$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2}\left(\vec{H} \cdot \vec{B}\right) dv$$

Tomando la Ley Circuital de Ampere en el camino medio

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{total}$$

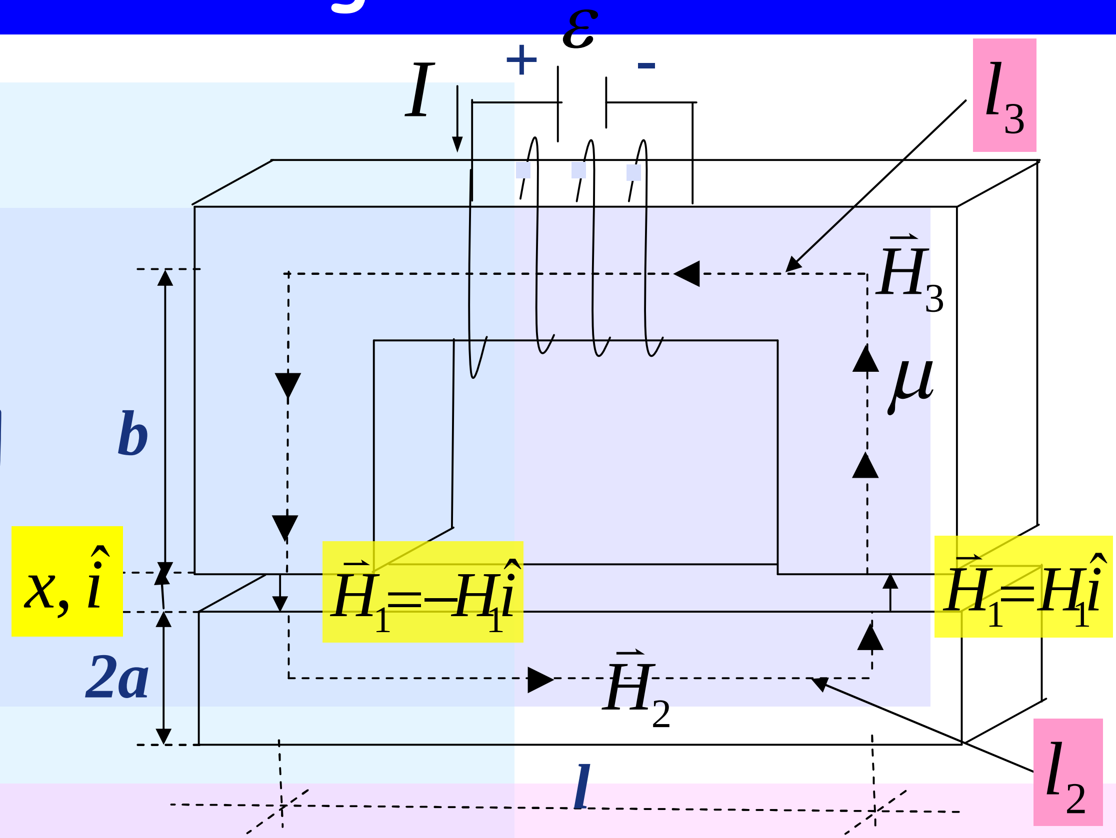
$$I_{total} = -NI$$



Energía Electromagnética

Supondremos:

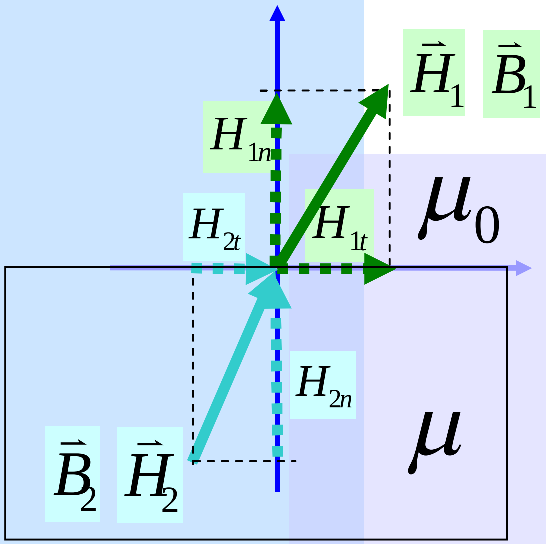
- B y H constantes en cada medio
- B y H son rectilíneos y paralelos al material (se desprecian efectos de borde)

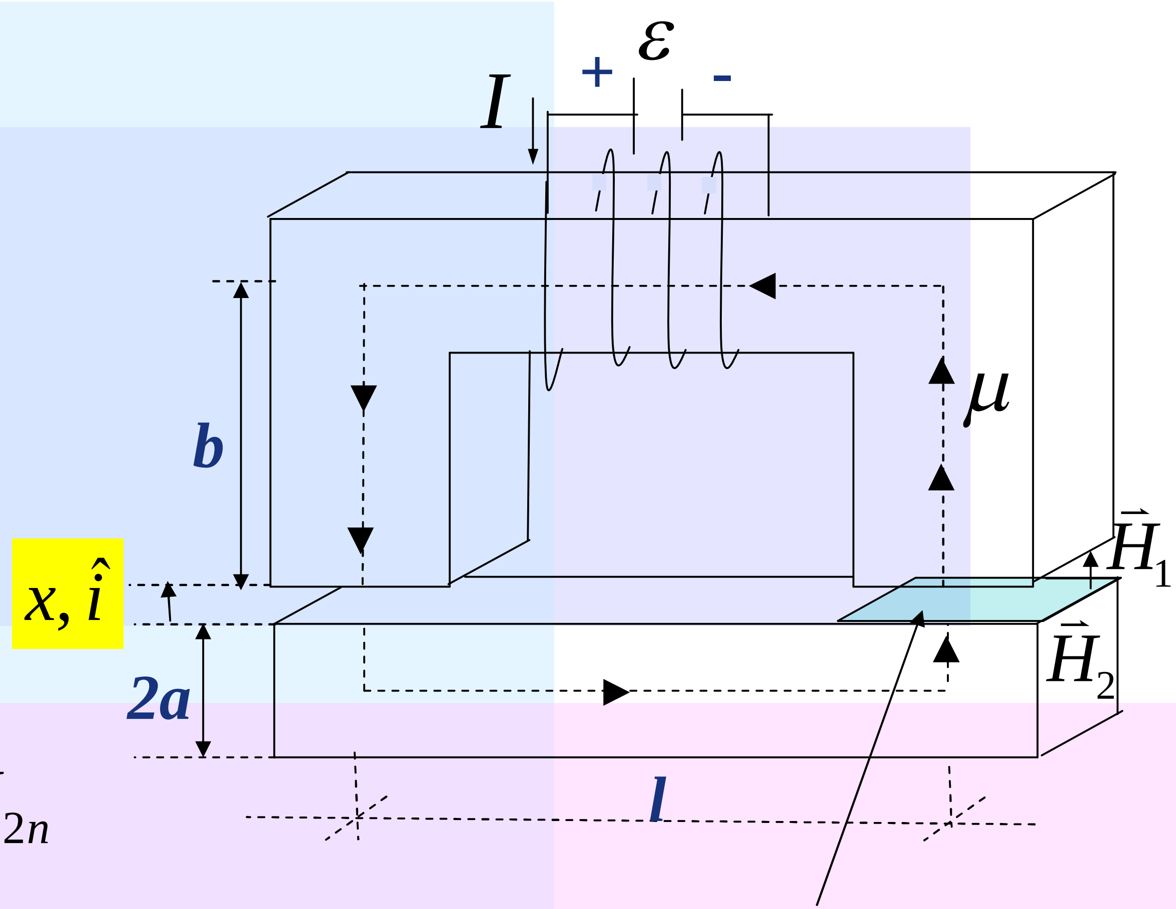


$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int \vec{H}_1 \cdot dx\,\hat{i} + \int_{l_3} \vec{H}_3 \cdot d\vec{l} + \int (-H_1)\cdot dx\,(-\hat{i}) + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H_1 x + H_3 l_3 + H_1 x + H_2 l_2$$

Energía Electromagnética



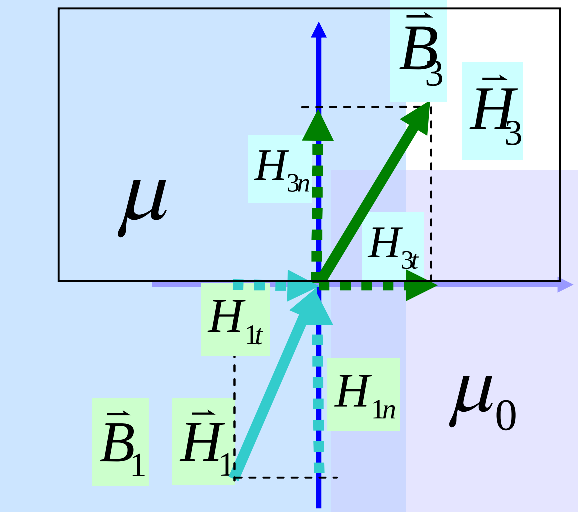


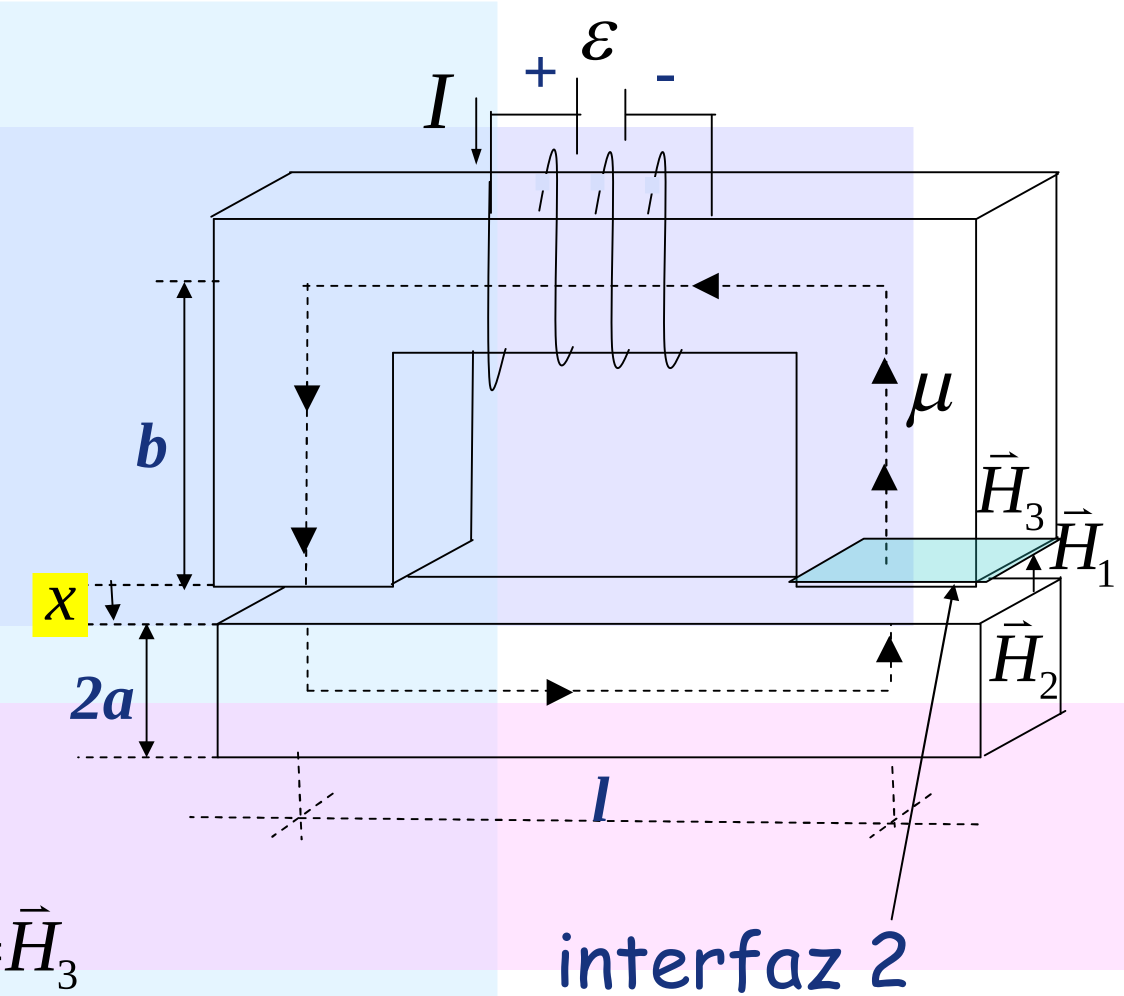
En la interfaz 1

$$B_{1n} = B_{2n} \Leftrightarrow \mu_0 H_{1n} = \mu H_{2n}$$

$$\therefore \mu_0 H_1 = \mu H_2$$

Energía Electromagnética





En la interfaz 2 se cumple

$$B_{1n} = B_{3n} \Leftrightarrow \mu_0 H_{1n} = \mu H_{3n}$$

$$\therefore \mu_0 H_1 = \mu H_3 \quad \Rightarrow \quad \vec{H}_2 = \vec{H}_3$$

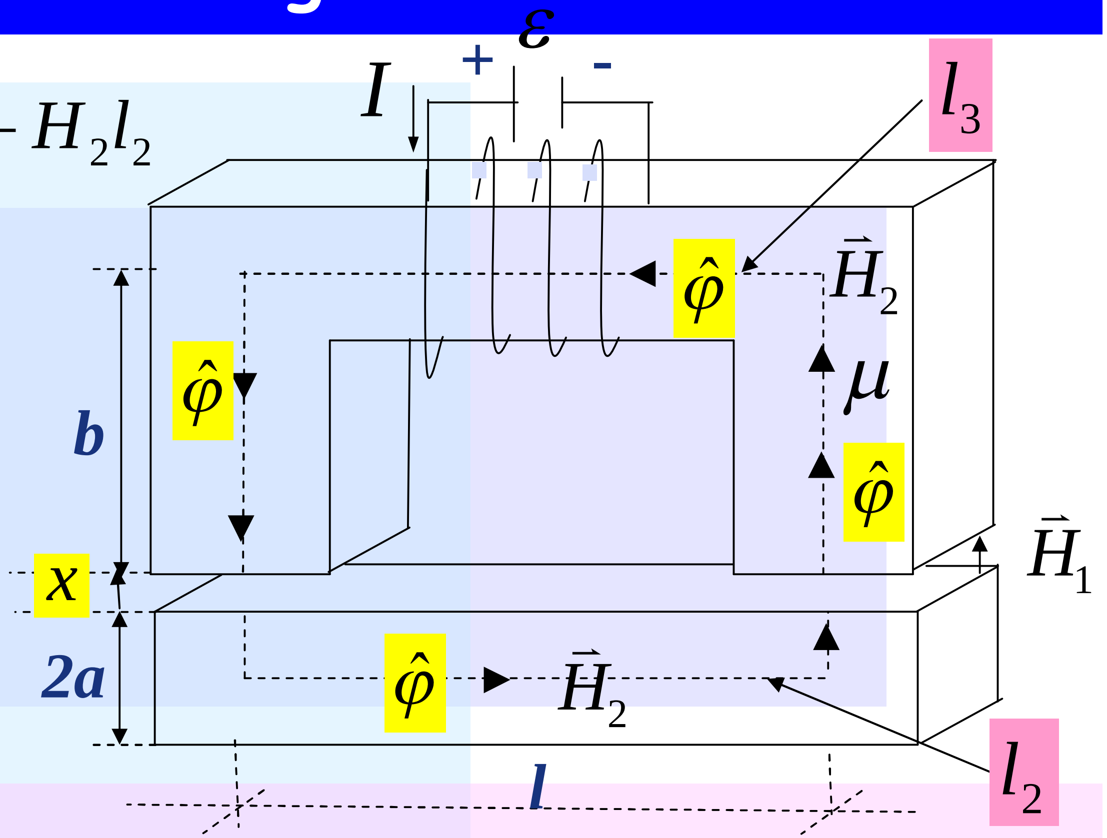
Energía Electromagnética

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H_1 x + H_3 l_3 + H_1 x + H_2 l_2$$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2H_1 x + H_2 (l_2 + l_3)$$

Reemplazando en la ley circuital de Ampere

$$2H_1 x + H_2 (l_2 + l_3) = -NI$$



Teniamos $\mu_0 H_1 = \mu H_2$

$$\vec{H}_1 = -\frac{\mu NI}{2\mu\, x + \mu_0 (l_2 + l_3)}\hat{\varphi}$$

$$\vec{H}_2 = -\frac{\mu_0 NI}{2\mu\, x + \mu_0 (l_2 + l_3)}\hat{\varphi}$$

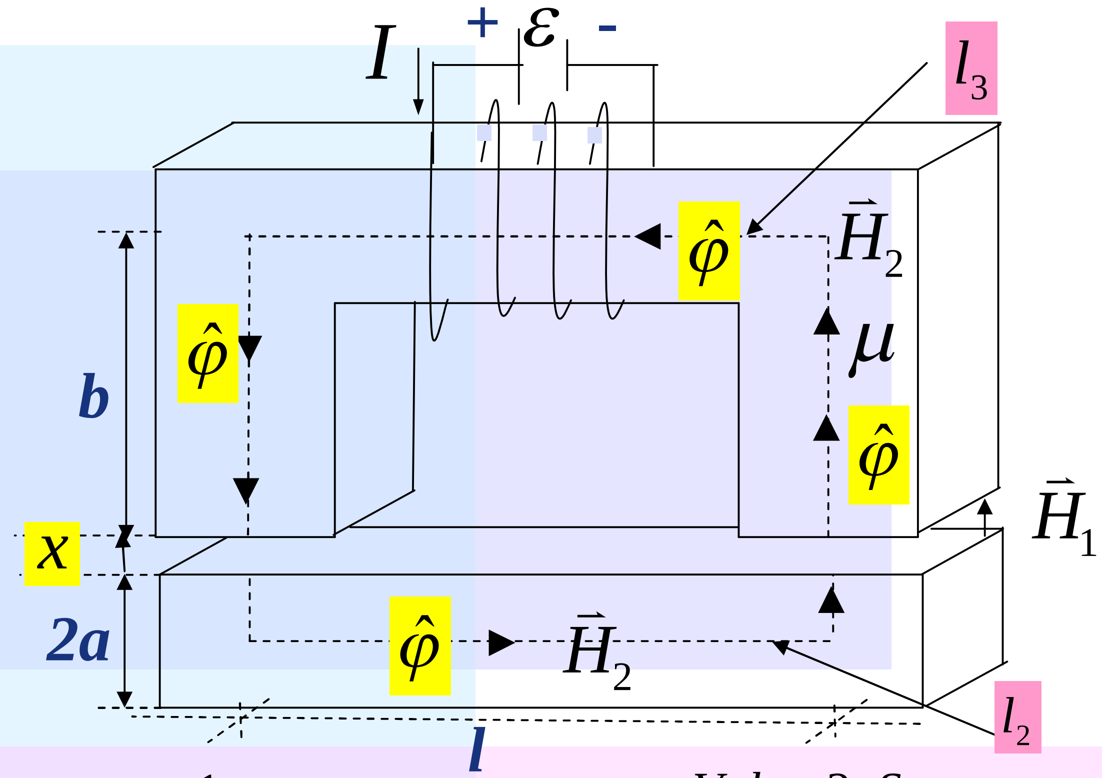
Energía Electromagnética

$$\vec{H}_1 = -\frac{\mu NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\hat{\varphi}$$

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 \mu NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\hat{\varphi}$$

$$\vec{H}_2 = -\frac{\mu_0 NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\hat{\varphi}$$

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu \mu_0 NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\hat{\varphi}$$



$$U = \iiint_{\Omega} \frac{1}{2}\left(\vec{H} \cdot \vec{B}\right) dv \Rightarrow U = \frac{1}{2} H_1 B_1 Vol_1 + \frac{1}{2} H_2 B_2 Vol_2$$

$$Vol_1 = 2xS$$

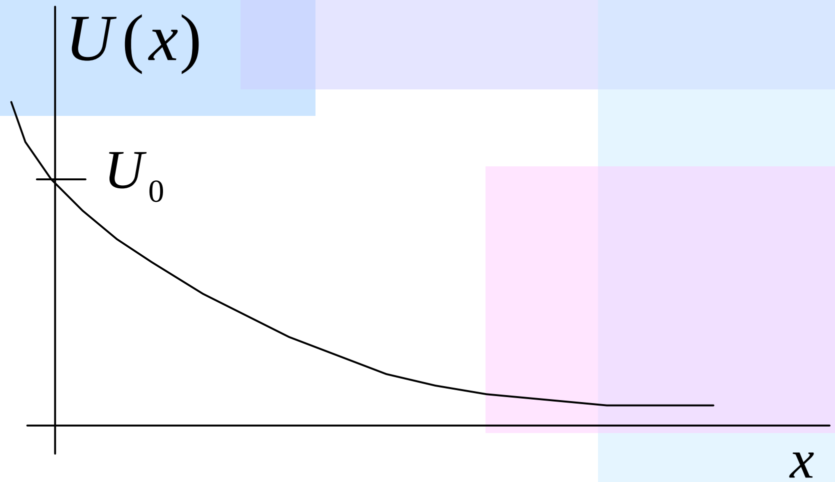
$$Vol_2 = S(l_2 + l_3)$$

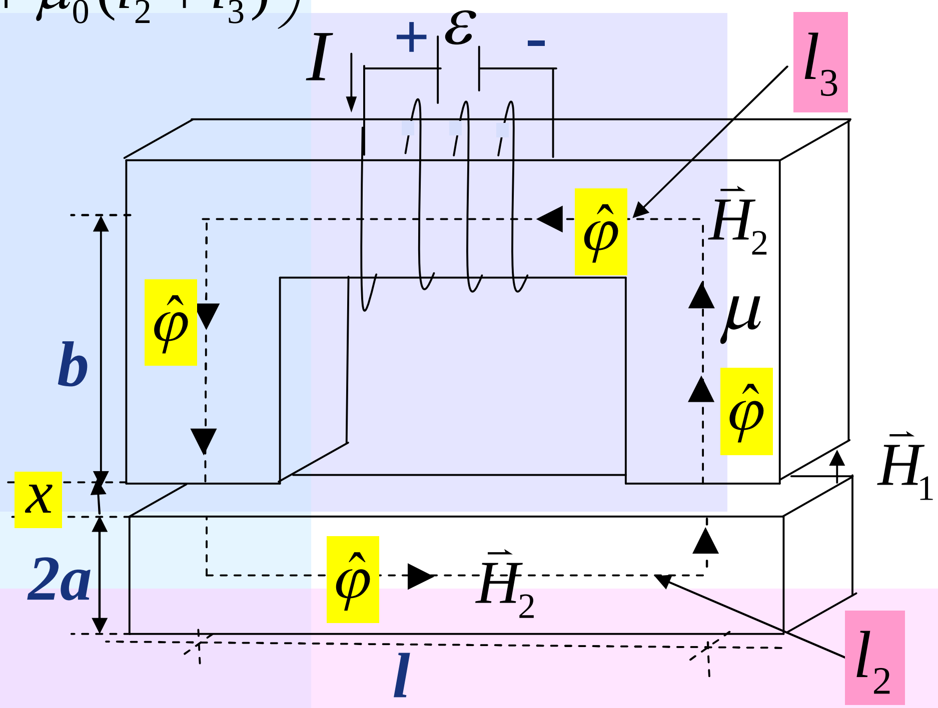
$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2}\mu_0 \mu^2 \left(\frac{NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\right)^2 2xS + \frac{1}{2}\mu_0{}^2 \mu \left(\frac{NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\right)^2 S(l_2 + l_3)$$

Energía Electromagnética

$$\Rightarrow \quad U = \frac{1}{2} S\mu_0\mu\left(2x\mu + \mu_0(l_2 + l_3)\right)\left(\frac{NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\right)^2$$

$$\therefore \quad U = \frac{1}{2}\left(\frac{S\mu_0\mu N^2 I^2}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\right)$$





Energía Electromagnética

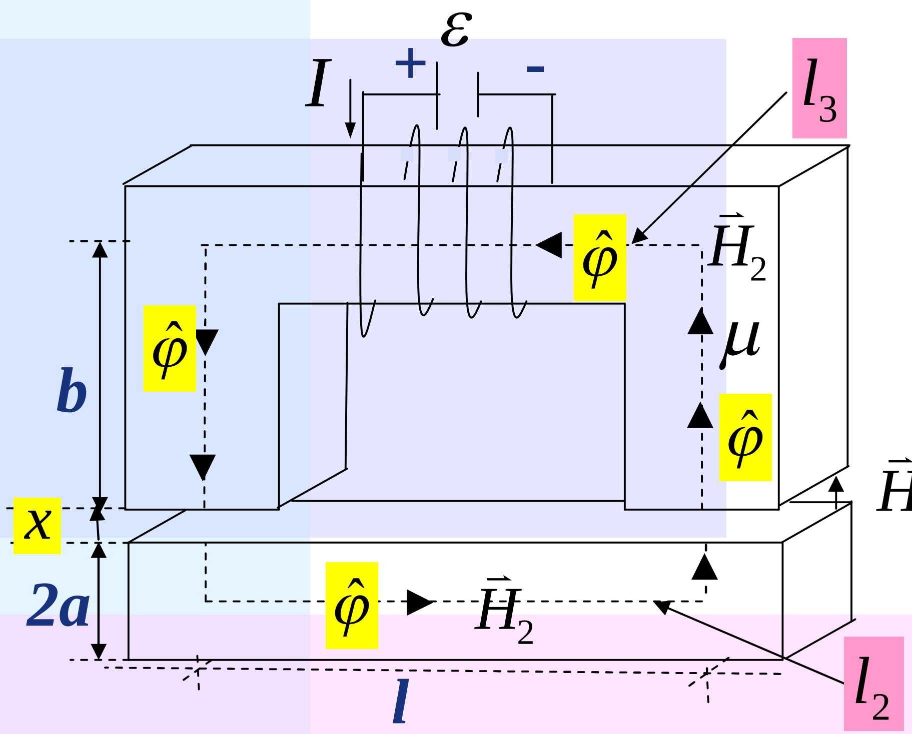
Si $\mu >> \mu_0 \Rightarrow \mu_R \mu_0 >> \mu_0$

$$U = \frac{1}{2} H_1 B_1 Vol_1 + \frac{1}{2} H_2 B_2 Vol_2$$

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 Vol_1 + \frac{1}{2\mu} B_2^2 Vol_2$$

$$B_1 = B_2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 \left(Vol_1 + \frac{1}{2\mu_R} Vol_2 \right)$$



Energía Electromagnética

$$U = \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 \left(Vol_1 + \frac{1}{2\mu_R} Vol_2 \right)$$

Notar que $Vol_1 = 2Sx$

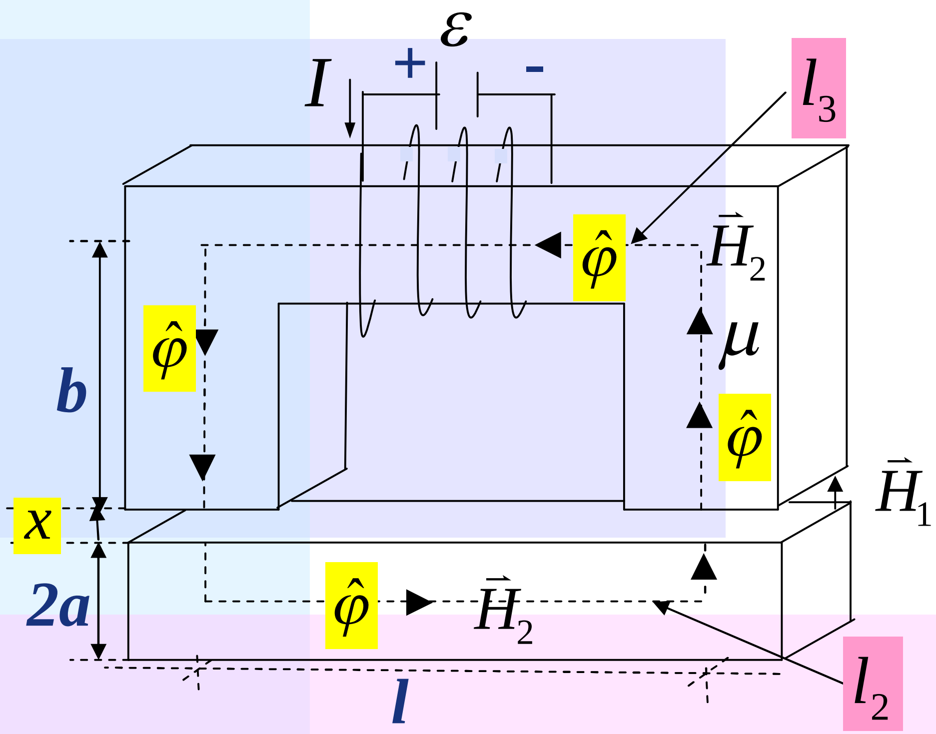
$Vol_2 \approx S(l_2 + l_3)$

Típicamente

$Vol_2 \approx 10 \times Vol_1$

$\mu_R > 1000$

$$\Rightarrow U \cong \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 Vol_1$$



La mayor parte de la energía se concentra en el entrehierro

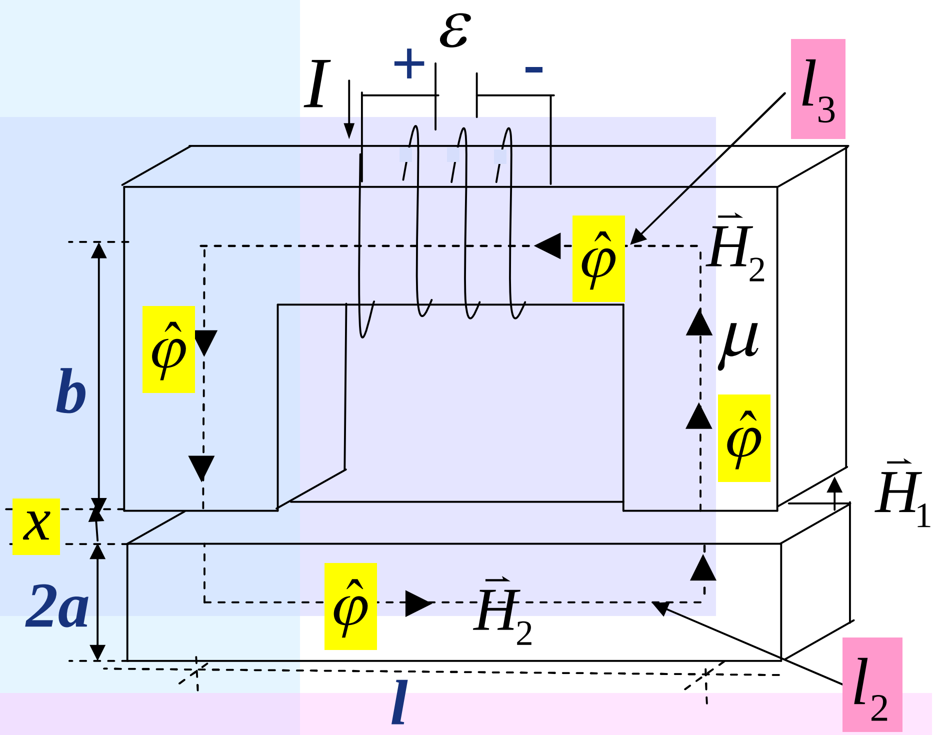
Energía Electromagnética

$$\Rightarrow U \cong \frac{1}{2\mu_0} B_1^2 Vol_1$$

$$\therefore \quad U \cong xS\mu_0 \left(\frac{\mu NI}{2\mu x + \mu_0 (l_2 + l_3)} \right)^2$$

$$U \cong xS\mu_0 \left(\frac{NI}{2x + \frac{\mu_0}{\mu}(l_2 + l_3)} \right)^2$$

$$\Rightarrow U \cong xS\mu_0 \left(\frac{NI}{2x} \right)^2 = S\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x}$$



Fórmula aproximada

Fuerza Electromagnética

Trabajo es igual al cambio de energía

$$-\vec{F}\cdot d\vec{l} = dU$$

$$\vec{F} = -\frac{dU}{dl}\hat{l}$$

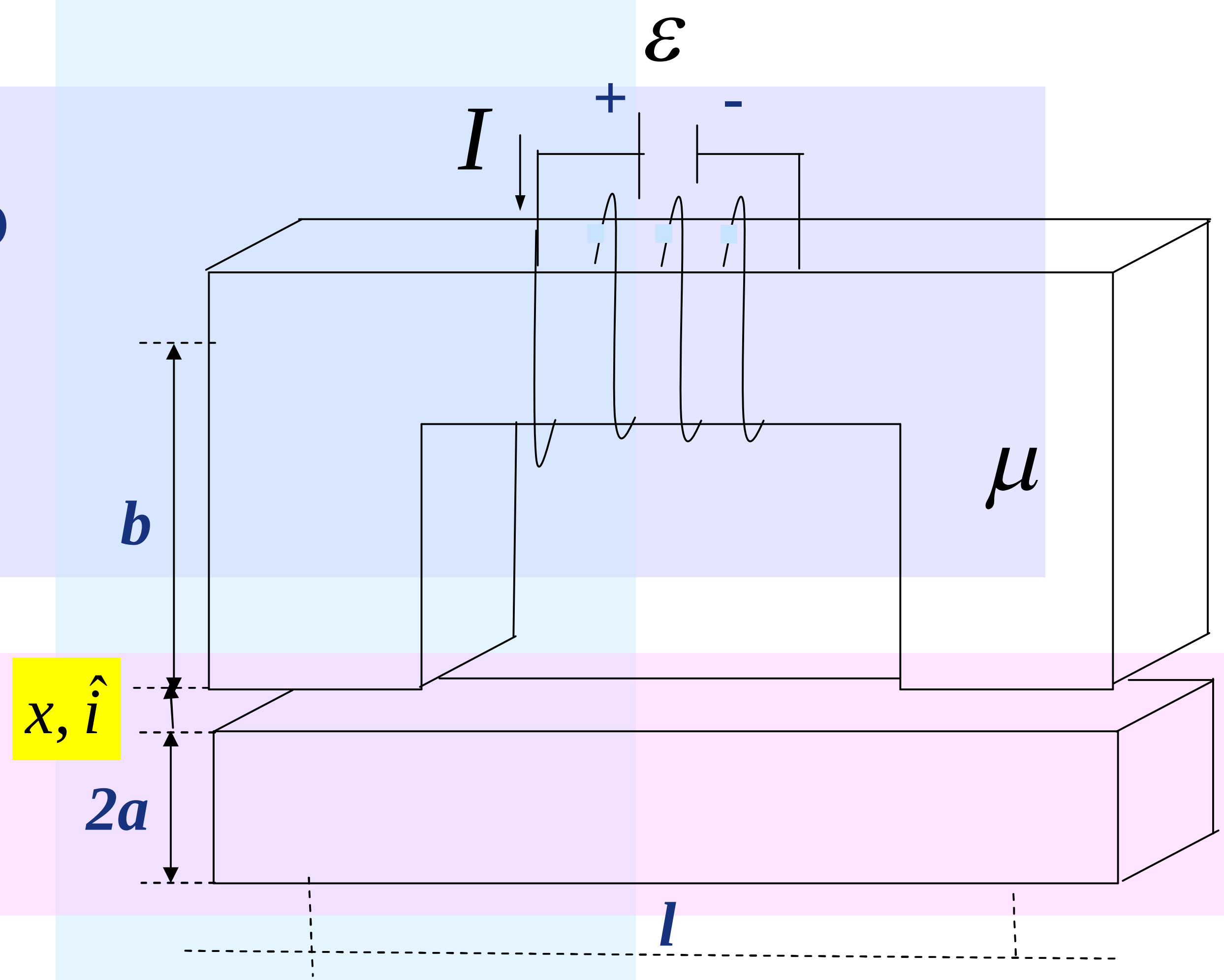
En general

$$\vec{F} = -\nabla U$$

Fuerza Electromagnética

Ejemplo 2

Calcular la Fuerza sobre el segmento inferior



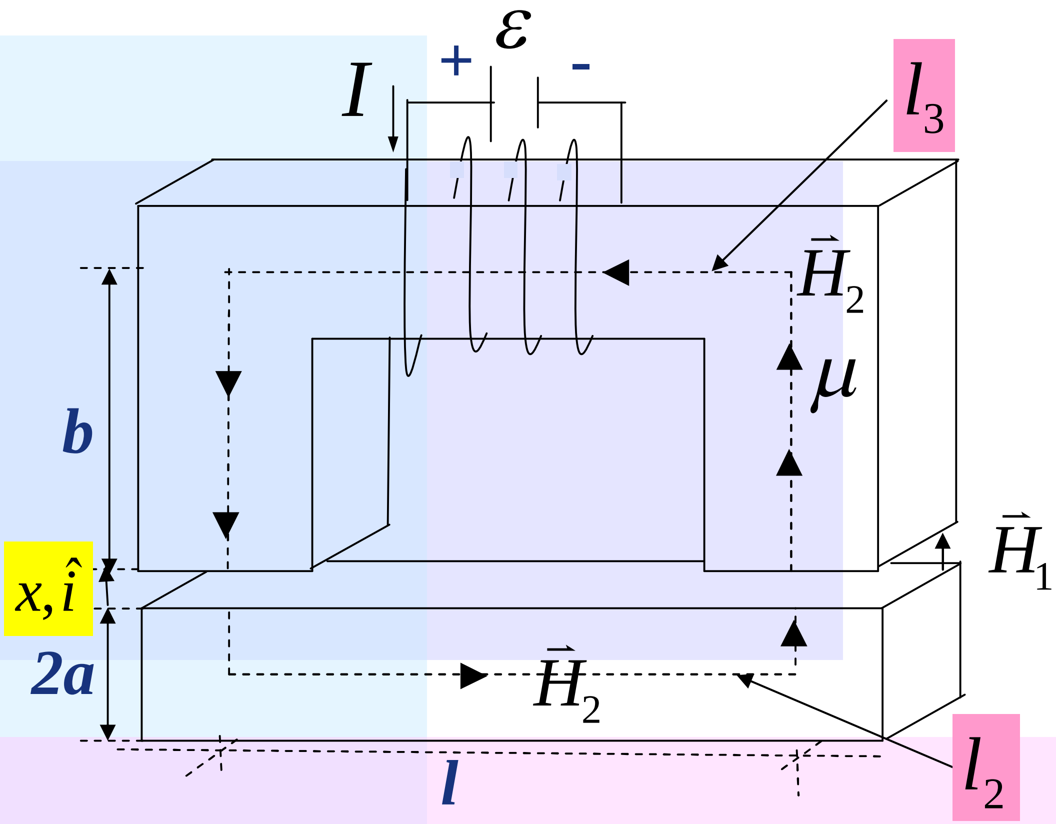
Fuerza Electromagnética

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\mu\mu_0 N^2 S}{2\mu\, x + \mu_0(l_2 + l_3)}\right) I^2 \hat{i}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\mu\mu_0 N^2 S I^2}{\left(2\mu\, x + \mu_0(l_2 + l_3)\right)^2}\right) 2\mu\, \hat{i}$$

$$\vec{F} = \left(\frac{\mu_0 \mu^2 N^2 S I^2}{\left[2\mu\, x + \mu_0(l_2 + l_3)\right]^2}\right) \hat{i}$$



Fuerza tiende a acercar la barra inferior: Electroimán.
Notar que hemos supuesto corriente constante.

Fuerza Electromagnética

Usando la fórmula aproximada

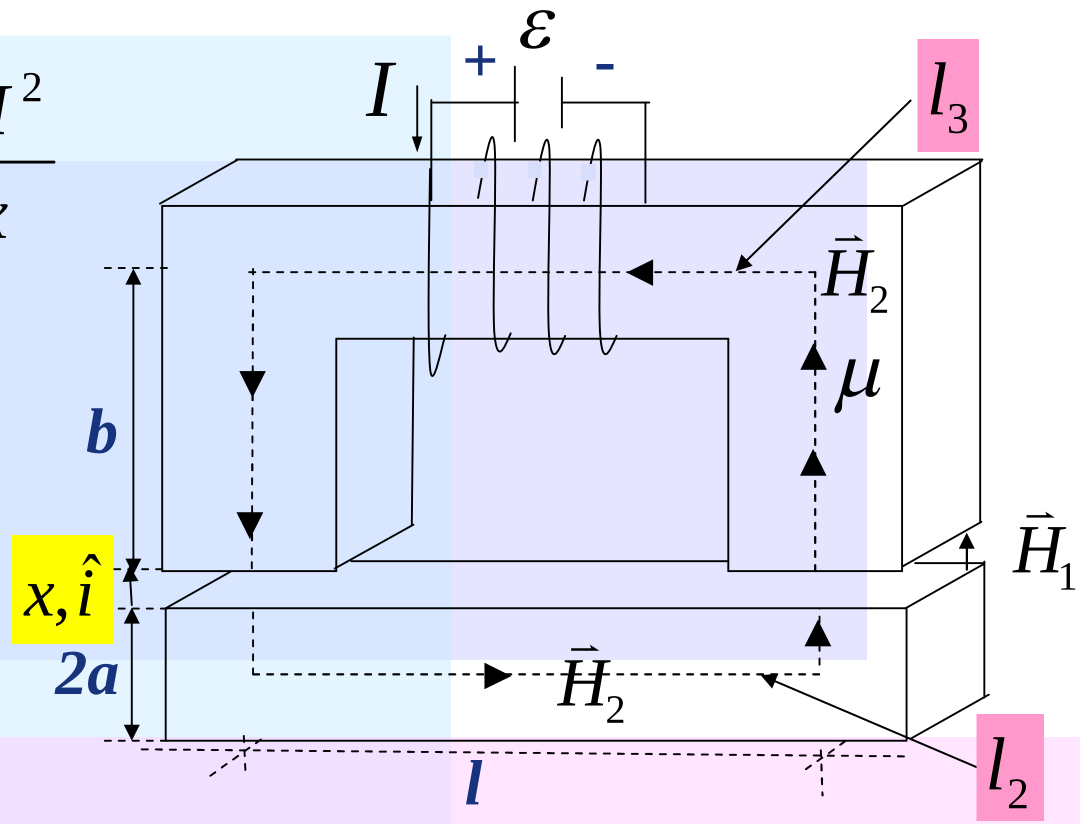
$$U = S\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x}$$

$$\vec{F} = -\nabla U$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[S\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x} \right]\hat{i}$$

Asumiendo que la corriente es constante

$$\vec{F} = S\mu_0 \frac{N^2 I^2}{4x^2}\hat{i}$$



Energía de Campo Magnético

Usando la ecuación de la potencia

$$U = \int_{t_o}^{t} P(t)dt = \int_{t_o}^{t} v(t)i(t)dt$$

$$v(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Rightarrow d\Phi = v(t)dt \qquad \Rightarrow U = \int_{\phi_o}^{\phi} i(t)d\Phi$$

como $\Phi = Li \qquad \Rightarrow U = \int_{\phi_o}^{\phi} \frac{\Phi}{L} d\Phi = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L}$

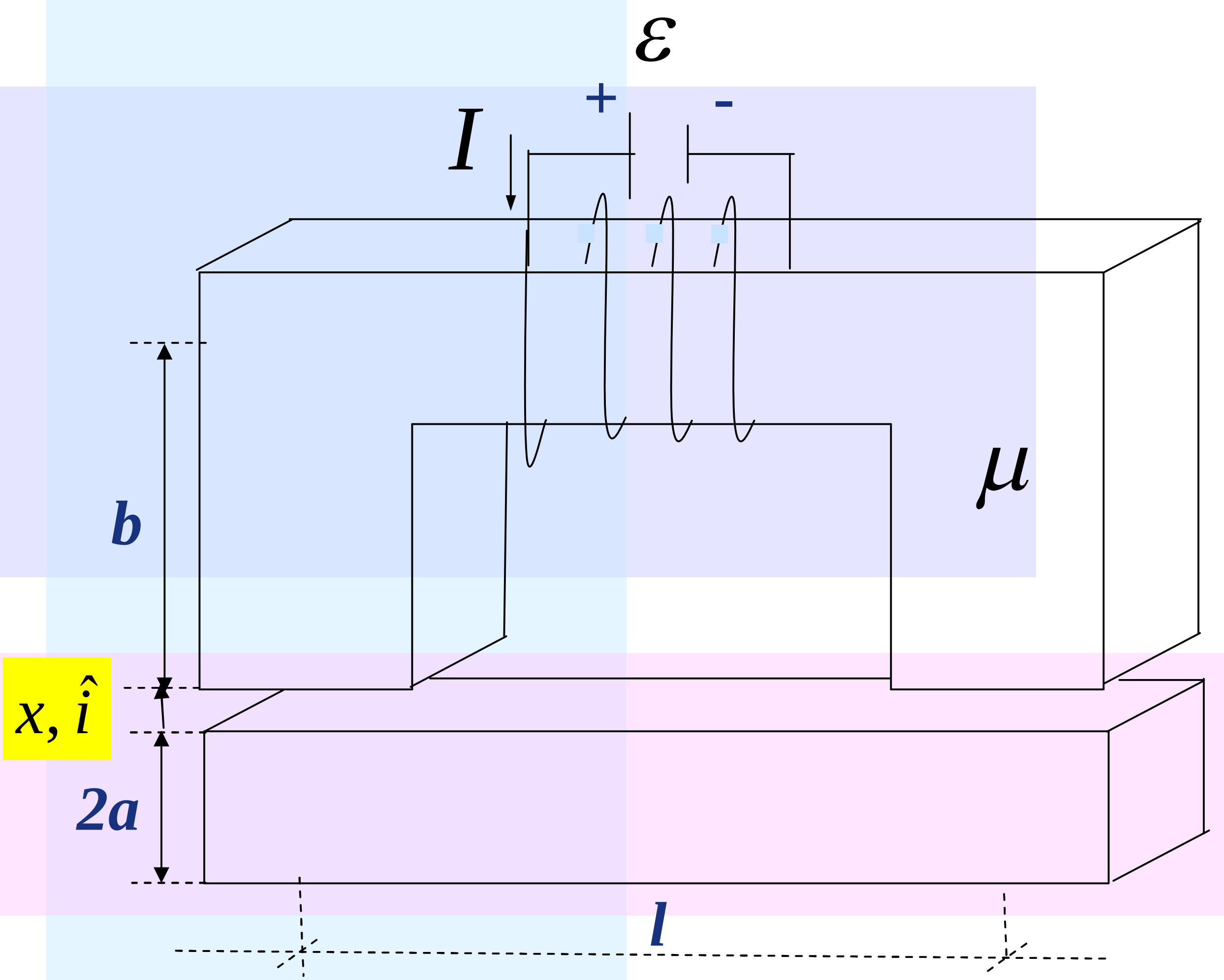
Se obtiene $$U = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2}Li^2$$

Energía de Campo Magnético

Ejemplo 3

Calcular la Fuerza sobre el segmento inferior usando la ecuación de energía

$$U = \frac{1}{2}\frac{\Phi^2}{L} = \frac{1}{2}Li^2$$



Energía de Campo Magnético

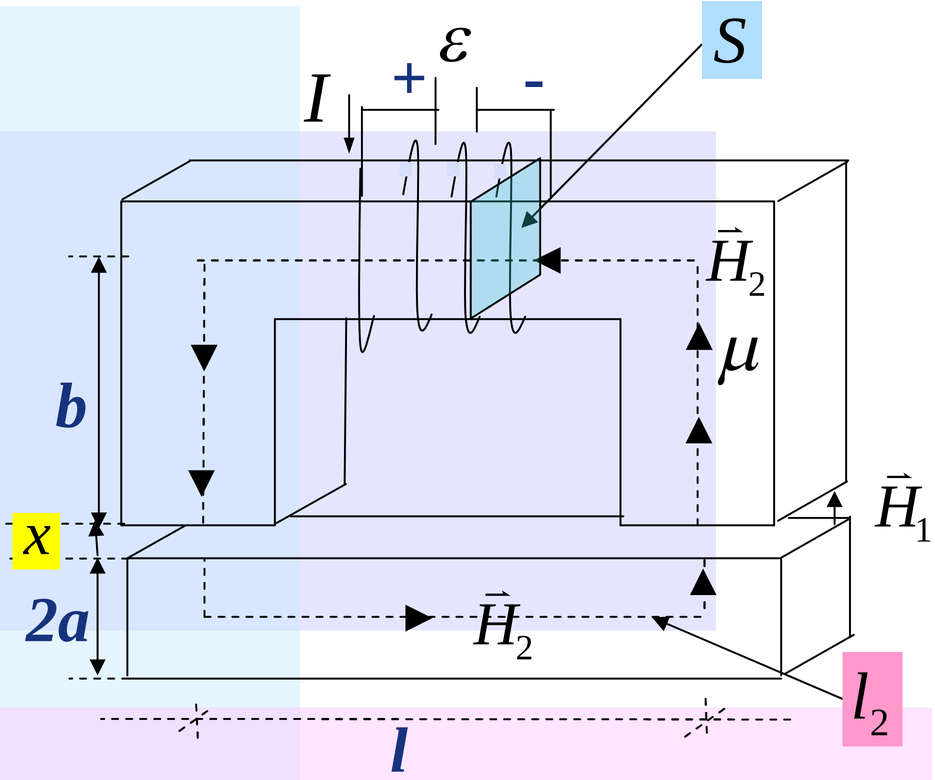
$$L \equiv \frac{\phi_T}{I} = \frac{N\phi_e}{I}$$

$$\phi_e = \iint_S \vec{B}_2 \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu\mu_0 NI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\hat{j}$$

$$\Rightarrow \phi_e = \frac{\mu\mu_0 NSI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}$$

$$\Rightarrow \phi_T = \frac{\mu\mu_0 N^2 SI}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}$$



$$\Rightarrow L = \frac{\mu\mu_0 N^2 S}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}$$

Energía de Campo Magnético

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu\mu_0 N^2 S}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\right) I^2$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\left(\frac{\mu\mu_0 N^2 S}{2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3)}\right) I^2 \hat{i}$$

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{\mu\mu_0 N^2 S I^2}{(2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3))2}\right) 2\mu \hat{i}$$

$$\vec{F} = \left(\frac{\mu_0 \mu^2 N^2 S I^2}{(2\mu x + \mu_0(l_2 + l_3))2}\right) \hat{i}$$