Auxiliar: Electromagnetismo

5 Noviembre 2008

Parte I

Ondas Electromagnéticas

Como se vió en cátedra podemos encontrar ondas electromagnéticas en el vacío. Recordemos como procedíamos para lograrlo:

Escribimos primero las ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad ;$$

Además de las relaciones constitutivas:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad , \quad \vec{H} = \vec{B}/\mu .$$

En el vacío no existen corrientes o cargas así que

$$\vec{J} = 0 \quad y \quad \rho = 0$$

y

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \quad , \quad \mu = \mu_0$$

El asunto es ver que en el vacío, muy lejos de una fuente de carga o corriente, existen soluciones no nulas de campos E-M.

En estas condiciones:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot \vec{B} = \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

y

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

la última se puede escribir como

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

y definiendo $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$:

$$c^2 \, \nabla \times \vec{B} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$ / tomamos retor $\nabla \times$

$$c^2 \, \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{E})$$

Usando que $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A})$

entonces

$$c^2 \left[+\nabla^2 \vec{B} + \nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{B}}_{0}) \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left(+ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}}$$

Ecuación de Ondas Clásicas con vel. de propagación c : vel de la luz.

Tomandole $\nabla\times$ a la otra ecuación ($\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$) se llega al campo electrico:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Entonces el campo electrico y magnético serán de la forma:

$$\begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{x},t) \\ \vec{B}(\vec{x},t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{E}_0 \\ \vec{B}_0 \end{Bmatrix} e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$$

Para soluciones de este tipo es conveniente asociar $\nabla\times \longrightarrow i\vec{k}\times$ $\quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$

y $k^2 = c^{-2}\omega^2 \rightarrow \boxed{\omega^2 = c^2 k^2}$ Relación de dispersión.
(viene de la ecuacion de ondas)

Reemplazando en la ecuacion de Maxwell.

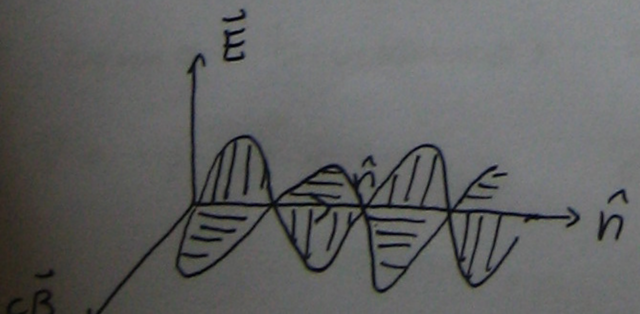
$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k}\times\vec{E} = +i\omega\vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\times\vec{E} = c\vec{B}}$$

sea $\hat{n} \equiv$ dirección en que la onda E-M se propaga.

$$\boxed{\hat{n}\times\vec{E} = c\vec{B}}$$

el campo magnetico es $\perp$ al campo electrico y al sentido de propagación



Una forma alternativa de derivar estos resultados es poner como ansatz la solución de las ecuaciones de Maxwell, una solución armónica, que por superposición de Fourier puede transformarse en una solución general

$$\begin{Bmatrix} \vec{B} \\ \vec{E} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{B}(\vec{x}) \\ \vec{E}(\vec{x}) \end{Bmatrix} e^{-i\omega t}$$

y usando que $\partial_t \to -i\omega$.

Ahora veremos que en el caso de ondas en materia, k en lugar de ser un número real, es un complejo, lo que significa, que la onda tiene una parte exponencial decreciente y por ende una longitud de penetración en la materia.

(Efecto piel)

Entonces veamos que k es complejo:

Tenemos que $\rho = 0$ pero en materia $\vec{J} \neq 0$, de hecho $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (ley de ohm)

Entonces tenemos que $\nabla \cdot E = \nabla \cdot B = 0$ y

$$\nabla \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma E$$

(suponemos medio dieléctrico (ϵ) y no magnético ($\mu = \mu_0$))

y como buscamos solución de ondas planas:

$$\nabla \times \to i\vec{k} \times \quad y \quad \partial_t \to -i\omega$$

Luego la ecuación se ve:

$$\frac{1}{\mu_0} i\vec{k} \times \vec{B} = \epsilon(-i\omega)\vec{E} + \sigma\vec{E}$$

Ahora tomamos rotor $\nabla\times$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0} \nabla\times(\nabla\times\vec{B}) = \epsilon\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\vec{E}) + \sigma\nabla\times\vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0}\left[-\nabla^2\vec{B}\right] = \epsilon\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) + \sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\mu_0}\left[+(i\vec{k})^2\cancel{\vec{B}}\right] = \epsilon(+i\omega)^2\cancel{\vec{B}} + \sigma(+i\omega)\cancel{\vec{B}}$$

Por lo tanto tenemos una relación de dispersión en materia:

$$-\frac{k^2}{\mu_0} = -\epsilon\omega^2 + i\omega\sigma$$

$$\Rightarrow k^2 = +\mu_0\epsilon\omega^2 - i\mu_0\omega\sigma$$

Ahora $\mu_0\epsilon \doteq \frac{1}{c^2}$ donde c es la velocidad de la luz en el medio.

$$\boxed{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\mu_0\omega\sigma}$$

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{1 - \frac{i\mu_0\sigma c^2}{\omega}} \equiv a + ib$$

donde a y b son ad-hoc

Entonces el campo se escribe

$$\begin{Bmatrix}\vec{E}\\ \vec{B}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\vec{E}_0\\ \vec{B}_0\end{Bmatrix} e^{-bx} \underbrace{e^{iax}\, e^{-i\omega t}}_{\text{parte ondulatoria}} \qquad \left(\begin{matrix}\hat{x} \text{ dirección}\\ \text{de propaga-}\\ \text{ción}\end{matrix}\right)$$

parte de decaimiento.

Entonces podemos definir una longitud de penetración (skin depth)

$$\boxed{\delta = \frac{1}{b}}$$

Veamos k para: buenos conductores $\sigma \to \infty$

$$\sqrt{1 - \frac{i\sigma\mu_0 c^2}{\omega}} \approx \sqrt{-\frac{i\sigma\mu_0 c^2}{\omega}} \approx ic\sqrt{\frac{i\sigma\mu_0}{\omega}}$$

$$\approx ic\sqrt{\frac{\sigma\mu_0}{\omega}}\sqrt{\frac{2i}{2}}$$

$$\approx ic\sqrt{\frac{\sigma\mu_0}{2\omega}}\,(1+i)$$

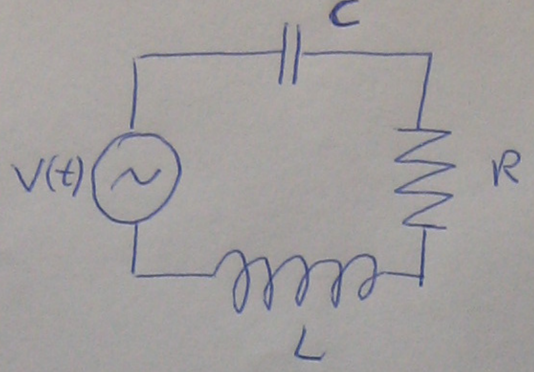
$$\approx ic\underbrace{\sqrt{\frac{\sigma\mu_0}{2\omega}}}_{b} - c\sqrt{\frac{\sigma\mu_0}{2\omega}}$$

entonces

$$\delta = \left(\sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}} \right)^{-1} = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu_0}}$$

Ppto calcular δ para malos conductores $\sigma \to 0$

Circuito RLC (con forzamiento armónico.)



La ecuación del circuito es:

$$\boxed{L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = V(t)}$$

Resolvamos primero la ecuación Homogenea.

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0$$

Para que nos quede una ecc. diferencial resolvemos Q (carga del capacitor)

Proponemos soluciones de la forma:

$$Q_H = Ae^{\alpha t} \quad \text{y usamos} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dQ}{dt}\right)$$

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{LC} = 0$$

y reemplazando Q_H en la ecuación

$$\Rightarrow Ae^{\alpha t}\left(\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC}\right) = 0 \quad \left(\text{Ecuación Característica}\right)$$

luego

$$\alpha = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

Entonces nuestra solución varía según los tres casos en que

$$\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \equiv \varphi$$

1) $\varphi > 0 \rightarrow$ raíz real
2) $\varphi = 0 \rightarrow$ raíz nula
3) $\varphi < 0 \rightarrow$ raíz imaginaria.

1) 2 soluciones reales.

$$Q_H(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}}\left(Ae^{\varphi t} + Be^{-\varphi t}\right)$$

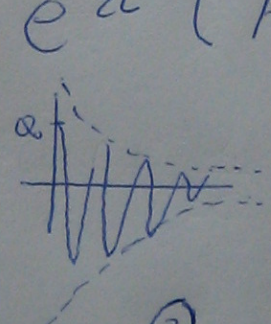
2)

$$Q_H(t) = Ae^{-\frac{Rt}{2L}} + \underbrace{Bt\,e^{-\frac{Rt}{2L}}}_{\text{solución}}$$

fórmula (ver D. Zill) (variación de parámetros)

3)

$$Q_H(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(A\cos(\varphi t) + B\operatorname{sen}(\varphi t)\right)$$



Consideremos el caso ③ para resolver la ecuación del comienzo con $V(t) = V_0\cos(\omega t)$ (señal alterna).

Buscamos una solución particular de la forma del forzamiento $Q_p = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$ donde ajustamos A y B según la ecuación:

$$L\ddot{Q}_p + R\dot{Q}_p + \frac{Q_p}{C} = V_0\cos(\omega t)$$

$$Q_p = A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\dot{Q}_p = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)$$

$$\ddot{Q}_p = -A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)$$

$$\Rightarrow L(-A\omega^2\cos(\omega t) - B\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)) + R(-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t) + B\omega\cos(\omega t)) + \frac{1}{C}(A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t)) = V_0\cos(\omega t)$$

igualando los coeficientes que acompañan a sen(ωt) y cos(ωt) en cada lado de la ecuación:

$$\left.\begin{aligned} -LA\omega^2 + RB\omega + \frac{1}{C}A &= V_0 \\ -LB\omega^2 - RA\omega + \frac{1}{C}B &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\rightarrow B = \frac{\omega R}{\left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)}A = \frac{\omega R A}{L\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)}$$

$$-LA\omega^2 + R\omega\left(\frac{\omega R A}{L\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)}\right) + \frac{1}{C}A = V_0$$

$$\Rightarrow A\left(\frac{1}{C} - L\omega^2 + \frac{\omega^2 R^2}{L\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)}\right) = V_0$$

$$\boxed{A = \frac{V_0}{\left(L\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right) + \frac{\omega^2 R^2}{L\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)}\right)}}$$

(Revisar estos coeficientes!

luego

$$\boxed{\begin{aligned} Q(t) &= A\cos(\omega t) + B\,\mathrm{sen}(\omega t) \\ &\quad + e^{-\frac{R}{2L}}\left(C_1\cos(\omega t) + C_2\,\mathrm{sen}(\omega t)\right) \end{aligned}}$$

con A y B calculados y C_1, C_2 salen de condiciones iniciales.