Métodos Experimentales FI2A3 Sección 5-6
Pauta de ejercicio 2

Profesores: Nicolás Mujica, Maite Cerda

3 de Septiembre, 2008

Solución Problema 1

a) **(1 pt)**Guiándose por el siguiente gráfico:

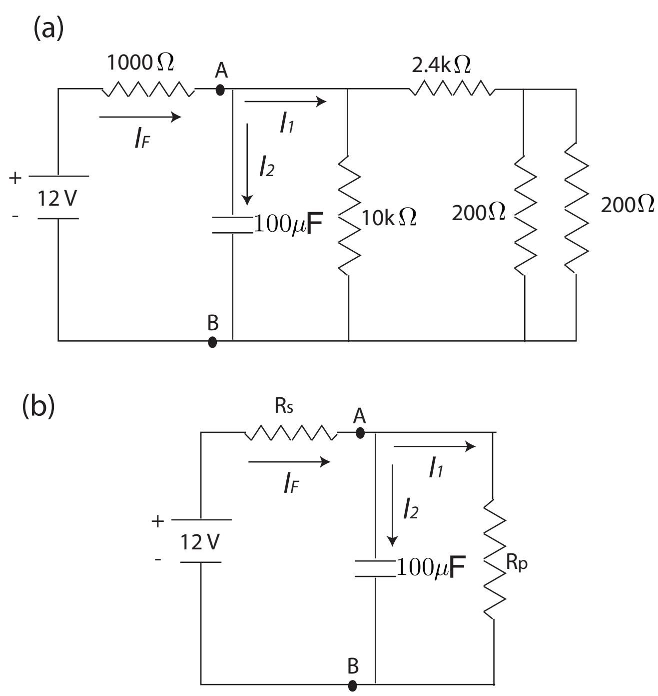

Figure 1: Circuito total y simplificado

Obteniendo la resistencia equivalente de las primeras dos en paralelo (de derecha a izquierda en figura 1 (a)), resulta:

$$\frac{1}{R'_{eq}} = \frac{1}{200\Omega} + \frac{1}{200\Omega}$$
$$R'_{eq} = 100\Omega$$

Con el resultado anterior, sumamos la siguiente resistencia en serie,

$$R''_{eq} = 2.4k\Omega + 100\Omega = 2.5k\Omega$$

Así, obtenemos ahora la resistencia equivalente pedida.

$$\frac{1}{R_{eq\,final}} = \frac{1}{1k\Omega} + \frac{1}{2.5k\Omega}$$
$$R_p = 2k\Omega$$

Y, la resistencia en seria,

$$R_s = 1k\Omega$$

b) **(1 pt)** Para encontrar la EDO, debemos resolver el siguiente sistema de 5 ecuaciones:

$$\begin{aligned} V_1 - V_2 &= R_s \cdot I_F & (1) \\ V_2 - V_3 &= R_p \cdot I_1 & (2) \\ V_2 - V_3 &= \frac{Q}{C} & (3) \\ I_f &= I_1 + I_2 & (4) \\ \frac{dQ}{dt} &= I_2 & (5) \end{aligned}$$

Tenemos 5 incógnitas (I_1, I_2, I_F, Q y V_2), y sumando (1) y (2) queda,

$$V_1 - V_3 = V = R_s \cdot I_F + R_p \cdot I_1$$

Igualando (2) y (3),

$$\begin{aligned} R_p \cdot I_1 &= \frac{Q}{C} \\ \Rightarrow I_1 &= \frac{Q}{R_p C} \end{aligned}$$

Usando (4) y (5) con el resultado anterior, queda,

$$
\begin{aligned}
V = R_s\left(\frac{Q}{R_pC} + \frac{dQ}{dt}\right) + \frac{R_pQ}{R_pC} \\
\frac{dQ}{dt} + Q\left[\frac{1}{R_pC} + \frac{1}{R_sC}\right] = \frac{V}{R_s}
\end{aligned}
$$

(1 pt) La solución homogénea de esta ecuación diferencial es:

$$
\begin{aligned}
Q_h(t) &= Ae^{-t/\tau} \\
\Rightarrow \tau^{-1} = \frac{1}{C\tilde{R}} &\quad \text{con} \quad \frac{1}{\tilde{R}} = \frac{1}{R_p} + \frac{1}{R_s} \rightarrow \tilde{R} = \frac{R_pR_s}{R_p + R_s}
\end{aligned}
$$

Ahora, la solución particular ($\frac{dQ}{dt} = 0$) de esta ecuación es:

$$
Q_p = \frac{V\tilde{R}C}{R_s} = \frac{VR_pC}{(R_p + R_s)}
$$

Sumando ambas, tenemos la solución completa de la ecuación, teniendo presente que la condición inicial ($Q(t=0) = 0$) es,

$$
\begin{aligned}
A = -\frac{VR_pC}{(R_p + R_s)} \\
Q(t) = \frac{VR_pC}{(R_p + R_s)}(1 - e^{-t/\tau})
\end{aligned}
$$

c) **(1 pt)** A partir de la ecuación anterior, podemos obtener I(t) (o I_2 en notación anterior) derivando :

$$
\begin{aligned}
I_2(t) &= \frac{VR_pC}{(R_p + R_s)}\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} \\
&= \frac{V}{R_s}e^{-t/\tau}
\end{aligned}
$$

Lo que da el siguiente gráfico:

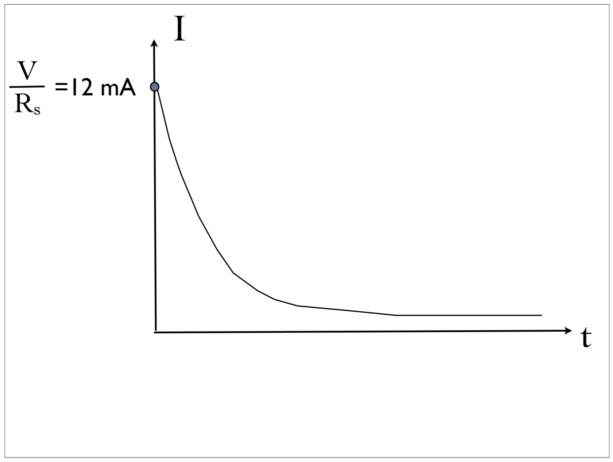

Figure 2: Corriente en función del tiempo

(1 pt) La corriente que entrega la fuente queda,

$$\begin{aligned}
I_F &= I_1 + I_2 \\
I_F &= \frac{Q(t)}{R_pC} + I_2(t) \\
&= \frac{VR_pC}{R_pC(R_p+R_s)} + \left(\frac{V}{(R_p+R_s)} + \frac{V}{R_s}\right)e^{-t/\tau} \\
&= \frac{V}{(R_p+R_s)} + V\left[\frac{R_p+2R_s}{R_s(R_p+R_s)}\right]e^{-t/\tau}
\end{aligned}$$

cuando $t \to \infty$, $I_F = \frac{V}{(R_p+R_s)}$, lo que da, $I_F(t\to\infty) = 4mA$.

d) **(1 pt)** Para un tiempo dado, se desconecta la fuente del circuito, quedando una carga en el condensador de $Q = VC\frac{R_p}{R_p+R_s}$.

Como es un circuito cerrado,

$$\begin{aligned}
V_c(t) &= -V_{R_p}(t) \\
\frac{Q(t)}{C} &= -R_p \cdot I(t) \\
&\Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{R_pC}Q(t) = 0
\end{aligned}$$

Por lo que la solución es:

$$Q(t) = Ae^{-t/\tilde{\tau}} \qquad \text{con} \qquad A = VC\frac{R_p}{R_p + R_s} \quad \text{y} \quad \tilde{\tau} = R_p C = 2 \cdot 10^{-3} s$$

Lo que da una corriente de:

$$I(t) = -\frac{V}{R_p + R_s} e^{-t/\tilde{\tau}} \qquad \text{y} \qquad I(t = 0) = 4 \; [mA]$$

Imponiendo la condición de la alarma,

$$|I(t = t^*)| = 1 \; [mA] \quad \Rightarrow \quad e^{-t^*/\tilde{\tau}} = \frac{1}{4}$$

y aplicando logaritmo,

$$-t^* = -1.39 \cdot \tilde{\tau}$$

$$\Rightarrow t^* = 2.78 \; [ms]$$