Mecánica del Continuo y Ondas

Tarea 3

Prof: René Rojas C.
17 de Agosto de 2008

Problema 9 : Cuerda Periódica

Una cuerda de largo L, densidad lineal σ y tensión τ, es enrollada en torno a un cilindro y unida en sus extremos, luego esta cuerda cumple con condiciones de borde periódicas[1].

a) Encuentre las frecuencias propias.
b) Grafique los cuatro primeros modos normales.
c) Dada la condición inicial.

$$\begin{aligned} y(x,0) &= \begin{cases} \alpha x & si\ x \in [0, \frac{L}{2}] \\ \alpha(L-x) & si\ x \in [\frac{L}{2}, L] \end{cases} \\ \frac{\partial y(x,0)}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

encuentre la solución general.

Problema 10 : Solitón en sin-Gordon

Encuentre y grafique la solución solitón para la ecuación de sin-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0.$$

Para ello pase a la variable del sistema móvil $\xi = x - vt$ donde v es la velocidad del solitón y se considera como un parámetro conocido. La solución solitón tiene como condiciones de borde para $\xi \to -\infty$, $u \to -\pi$, $du/d\xi \to 0$ y para $\xi \to \infty$, $u \to \pi$, $du/d\xi \to 0$.

[1] Condiciones de borde periódicas: $y(0,t) = y(L,t)$; $\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial y(L,t)}{\partial x}$.

Problema 11 : Teorema de Noether

Considere una ϵ-familia $\psi_l(x;\epsilon)$ de transformaciones de los campos. Para $\epsilon = 0$ los campos $\psi_l(x;0)$ son solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange del **problema 7**. Demuestre que si la densidad Lagrangiana es invariante bajo esta familia de transformaciones entonces

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nabla \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) \bigg|_{\epsilon=0} = 0.$$

Problema 12 : Ecuación de Schrödinger

Considere la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \dot{\psi} - \dot{\psi}^* \psi) - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \psi^* \cdot \nabla \psi - V(\vec{x}) \psi^* \psi,$$

donde $\psi(\vec{x}, t)$ es complejo.

a) Encuentre la ecuación de Euler-Lagrange para ψ.
b) Muestre que $\mathcal{L}$ es invariante bajo la transformación $\psi \to \psi e^{i\epsilon}$, $\psi^* \to \psi^* e^{-i\epsilon}$ y, usando el resultado del **problema 11**, obtenga la ecuación de conservación correspondiente.