Mecánica Estadística

Auxiliar

Profesor: Rodrigo Soto
Auxiliar: Hernán González

Problema 1: Fermiones relativistas.

Se tiene un gas de fermiones ultra relativistas de spin 1/2 en una caja de volumen V a temperatura T tan pequeña que consideraremos nula.
a) Encontrar el número de estados con energía entre ε y $\varepsilon + d\varepsilon$.
b) Calcular la energía y presión promedio del gas.

Problema 2: Límite Maxwell-Boltzmann.

a) Calcular la densidad de estados cuánticos asociada a una partícula libre.
b) Considere el caso donde el número de ocupación promedio en un estado k , es pequeño ($\bar{n}_k \ll 1$). Partiendo de la función Gran partición Ξ para un gas cuántico de partículas nointeractuantes, Mostrar que en este límite se recobra la función partición Z de un gas ideal clásico con el factor de corrección para particulas indistiguibles ($N!$) y el factor de normalización debido a la mínima área del espacio de fase (h^{3N}).

Problemas 3: Emisión Termo-iónica.

Los electrones dentro de un metal poseen un potencial interno $-W$, y la energía necesaria para arrancar un electrón desde el nivel de Fermi (μ_0, a $T = 0°K$) es ϕ. A temperatura finita, los electrones que tienen energía mayor a W pueden escapar al exterior. Cuando una apropiada diferencia de potencial es aplicada entre un ánodo y este metal (tomado como cátodo), es posible recolectar todos los electrones que escapan del metal en una corriente eléctrica. Muestre que esta corriente por unidad de área de metal está dado por:

$$I \propto T^2 e^{-\phi/k_B T}$$

Nota: Considere que para $T > 0°K$, $\mu(T) \approx \mu_0$.

Problema 4:

Un electrón en un campo magnético H tiene una energía $\pm\mu_B H$ de acuerdo si el momento magnético del spin es paralelo o anti-paralelo al campo. Calcular la suceptibilidad magnetica ($\chi = \partial M/\partial H$, con M la magnenetización) de un sistema de electrones libres a $0°K$, donde la degeneración es completa.

Problema 5 : Gas de Bose bidimensional

Considere un sistema de N bosonoes que pueden moverse en dos dimensiones pero en presencia de un potencial $V(x, y) = a\left(x^2 + y^2\right)$, con $a > 0$ y (x, y) las coordenadas cartesianas del plano. Muestre que existe el fenómeno de condensación y calcule la temperatura crítica.

Problema 6 : Gas de Bose en D dimensiones

Considera un gas de bosones no interactuantes con un espectro de energía $\varepsilon = \alpha\,|\vec{p}|^s$, contenido en una caja de "volumen"$V = L^D$ en D dimensiones. En particular, muestre que en $D = 1$ no existe dicho fenómeno, y además que en $D = 2$ tampoco para partículas no relativistas pero si para partículas sin masa.

Problema 7: Ecuación de estado en un sólido.

Parte del comportamiento de un sólido cristalino de N átomos se puede entender en base a un sistema de $3N$ osciladores lindeal es independientes caracterizados por un vector de onda $\vec{k}$ y frecuencia $\omega_\lambda(\vec{k})$. Considere que Φ es la energía del cristal en su estado fundamental.
a) De una expresión para la energía libre del cristal en equilibrio a temperatura T.

b) Si Φ y $\omega_\lambda(\vec{k})$ son funciones del volumen V del cristal (esta aproximación corresponde a tomar en cuenta correcciones anharmónicas del cristal) y que se cumple

$$\frac{\partial \log \omega_\lambda(\vec{k})}{\partial V} = -\frac{\gamma}{V}$$

con γ la constante de Gruneisen, independiente de $\vec{k}$ y λ, muestre que se cumple la ecuación de estado de Mie-Gruneisen

$$p = -\frac{d\Phi}{dV} + \gamma \frac{E}{V}$$

con E la parte de energía interna correspondiente a las vibraciones atómicas.

Problema 7: Ecuación de estado en un sólido.

Mostrar que el área entre las curvas $3Nk_BT$ (Ley de Dulong et Petit) y C_V como función de T es igual a $\bar{E}\left(T=0,N,V\right)$. Calculela explícitamente para el modelo de Debye.