IN702
Primavera, 2008

Tarea 1

Problema 1 Considere el modelo de competencia a lo Cournot, en el cual la función de demanda inversa es $P(Q) = 1 - Q$, y las firmas tienen costo marginal igual a cero. Muestre que es estrictamente dominante para las firmas producir cualquier cantidad mayor a $\frac{1}{2}$. Escriba el conjunto de estrategias que no son estrictamente dominadas para las firmas como un intervalo $[\underline{S}^1, \overline{S}^1]$. Encuentre el intervalo de estrategias $[\underline{S}^2, \overline{S}^2]$ que no son estrictamente dominadas cuando la firma rival elige cantidades en $[\underline{S}^1, \overline{S}^1]$. Pruebe por inducción que al continuar con la eliminación de estrategias estrictamente dominadas en la etapa $2k$, las estrategias que sobreviven están en el intervalo $[\underline{S}^{2k}, \overline{S}^{2k}]$, donde:

$$\underline{S}^{2k} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{4^j}$$

$$\overline{S}^{2k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{4^j}$$

Concluya que este juego se puede resover ocupando la eliminación de estrategias puras estrictamente dominadas.

Problema 2 Para los siguientes juegos, encuentre todos los equilibrios de Nash:

	W	X	Y	Z
A	6,1	5,3	4,0	3,2
B	4,0	4,2	4,0	4,2
C	1,6	4,5	2,8	0,2
D	3,9	3,0	4,0	3,2

	W	X	Y	Z
A	3,4	0,0	3,0	5,1
B	2,0	1,4	3,0	6,1
C	1,0	5,2	4,4	7,1

Problema 3 Considere el siguiente juego:

	X	Y	Z
A	0,0	5,4	4,5
B	4,5	0,0	5,4
C	5,4	4,5	0,0

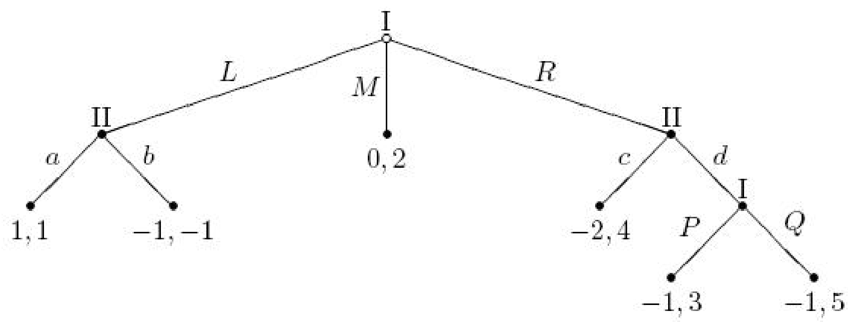
a) Verifique que existe un único NE en el cuál el pago esperado de cada jugador es 3.

Problema 4 Considere un juego en forma normal entre dos jugadores. Diremos que una estrategia mixta para el jugador i, σ_i es *admisible* si da peso igual a cero a todas las estrategias débilmente dominadas. Diremos que un perfil de estrategias $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ es *admisible* si cada componente lo es para el correspondiente jugador. Pruebe lo siguiente:

a) Una estretegia σ_i^* es admisible ssi. existe una estrategia completamente mixta σ_j^* del otro jugador, a la que σ_i^* es mejor respusta.

Problema 5 Considere el siguiente juego de negociación: dos agentes deben repartirse una torta de tamaño 1, haciendo ofertas alternadas. En $t = 1$ el agente 1 hace una oferta $x_1 \in [0, 1]$ al jugador 2, quien la acepta o rechaza. Si la acepta, el jugador 2 recibe $1 - x_1$, dejando x_1 para el jugador 1. Si la rechaza, no hay división de la torta, y es su turno de hacer una oferta $x_2 \in [0, 1]$ en $t = 2$. Si su oferta es aceptada, recibe $1 - x_2$ mientras que 1 recibe x_2. Si es rechazada, el jugador 1 es quien debe hacer el ofrecimiento en $t = 3$, y así sucesivamente. Suponga un factor de descuento $\lambda \in (0, 1)$ y que hay T períodos de negociación. Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos, es decir, encuentre una secuencia $(x_1, ..., x_T)$ SPE del juego anterior. Determine $\lim_{T\to\infty} x_1$.

Problema 6 Considere el siguiente juego en forma extensiva:



a) Determine el número de estrategias puras para el jugador, y el número de estrategias reducidas correspondiente.

b) Entregue la forma normal reducida del juego.

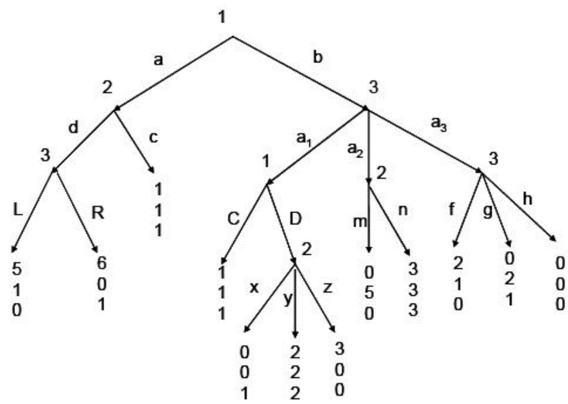
c) Determine los equilibrios en estrategias puras del mismo.

d) Cuáles son los SPE's del juego y los pagos correspondientes para cada jugador.

e) Encuentre todos los pares de estrategias reducidas en los cuales una domina débilmente a la otra.

f) Encuentre los NE en estrategias puras y mixtas.

Problema 7 Para el siguiente juego encuentre todos los SPE.



Problema 8 Use *inducción hacia atrás* parea encontrar un NE del siguente juego, una versión simplificada del famosísimo programa de TV *El Rival más Débil.* Hay 4 jugadores neutros al riesgo, con valores $v_1 > v_2 > v_3 > v_4 > 0$. El juego tiene tres rondas. En cada una de las etapas, un agente externo guarda los valores de cada jugador sobreviviente en una *cuenta común* [1], al final de la tercera etapa uno de los concursantes gana y se lleva el total recolectado en la *cuenta común.* Decimos que un jugador sobrevive en una etapa si no fue eliminado en la ronda anterior. Al final de la etapa 1 y 2, los sobrevivientes eliminan a un jugador votando por el. Los votos son secuenciales según el índice, observando el voto anterior. El más votado es eliminado. En caso de empate se decide de manera aleatoria, y al final de la tercera ronda, el concursante i gana con probabilidad $v_i/(v_i+v_j)$ con v_j la valoracón del otro sobreviviente. Especifique que concursante es eliminado para cada combinación de sobrevivientes. No es necesario especificar como votará cada jugador en

[1] Por ejemplo, si el concursante 2 es eliminado en la primera ronda, y el 4 en la segunda, el total de dinero en la cuenta es $(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) + (v_1 + v_3 + v_4) + (v_1 + v_3)$ al final del juego.

cada contingencia (opr ejemplo, a quién votó cada concursante). Le puede ser util suponer que un jugador no puede votar por si mismo

Problema 9 Consumidores están distribuídos uniformemente a lo largo de una línea de largo 1 kilómetro. Los precios de los helados están regulados, por lo que los 2 consumidores pueden ir a comprar únicamente al punto más cercano (asuma que independiente de la lejanía de este punto, todo agente va a consumir helados). Si existe más de un vendedor en el mismo punto, se reparten el negocio equitativamente.

(i) Considere un juego en que dos vendedores de helados deben elegir sus ubicaciones simultáneamente. Muestre que existe sólo un equilibrio. Caracterícelo.

(ii) Pruebe que si hay 3 vendedores, no existe equilibrio en estrategias puras.

Problema 10 Considere el siguiente modelo para determinar la limpieza (asignación de esfuerzos) de un departamento habitado por dos personas. En el juego, los dos compañeros de pieza escogen simultáneamente niveles de esfuerzo, e_1, e_2, para destinar a limpiar el departamento. Ambos obtienes utilidad por habitar en un ambiente limpio (depende de la suma de los esfuerzos), y desutilidad por el esfuerzo personal que ejercen. Jugador 1 valora más la limpieza que jugador 2. Específicamente, asuma que los esfuerzos son no-negativos y se escogen de acuerdo a las siguientes funciones de utilidad neta:

$$\begin{aligned} u_1(e_1, e_2) &= k \log(e_1 + e_2) - e_1 \\ u_2(e_1, e_2) &= \log(e_1 + e_2) - e_2 \end{aligned}$$

donde $k > 1$

a) Encuentre las funciones de mejor respuestas de ambos arrendatarios. Interpréte.

b) Encuentre el equilibrio de Nash puro del juego. ¿Cómo se refleja la distribución de los esfuerzos de acuerdos a las preferencias de los jugadores?

c) Trate de escribir una modificación del modelo en el cual los resultados parezcan más justos.

Problema 11 (*Tragedia de los comunes*). Un lago puede ser accedido libremente por pescadores. El costo de mandar un bote al lago es $r > 0$. Cuando b botes son mandados al lago, $f(b)$ peces son pescados en total (por ende, cada pescador se queda con $\frac{f(b)}{b}$ peces), donde $f'(b) > 0$ y $f''(b) < 0$ para todo $b \geq 0$. El precio del pescado es $p > 0$, que es inalterado por el nivel de pesca del lago.

a) Caracterice el equilibrio descentralizado (Nash). (número de botes enviados al lago)

b) Caracterice el número óptimo de botes que deberían ser mandados al lago. ¿Cómo se compara su respuesta con a) ?

c) ¿Qué impuesto se debería cobrar por pez pescado por bote para restaurar la eficiencia?

d) Suponga que el lago posee un único dueño, el cual puede mandar todos los botes que él desea. ¿Qué nivel escogerá?