Auxiliar #1 MA1A2

Profesor: Leonardo Sánchez

Auxiliares: Gonzalo Contador

Germán Ibarra

7/Agosto/2008

SUCESIONES Y CONTINUIDAD

P1. Sean $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones continuas en todo su dominio. Sea $h(x)$ definida como

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & x\in\mathbb{Q} \\ g(x) & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestre que h es continua en $x\in\mathbb{R}$ si y sólo si $f(x)=g(x)$

P2. Una función f se dirá *Lipschitz* si existe una constante L tal que se cumple

$$\forall x,y\in\mathbb{R}, \mid f(x)-f(y)\mid\leq L\mid x-y\mid$$

Demuestre que toda función Lipschitz es contínua sobre todo su dominio.

P3. Sea $\theta\in\mathbb{R}$ y definimos

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)-sen(\theta)}{x-\theta} & x\neq\theta \\ cos(\theta) & x=\theta \end{cases}$$

Demuestre que g es continua en θ

P4. Sea $h(x)$definida por

$$h(x)=\begin{cases} \cos(\dfrac{1}{x}) & x\neq 0 \\ \alpha\in\mathbb{R} & x=0 \end{cases}$$

Demuestre que h no es continua en 0, independiente del valor de α

P5. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de numeros reales tal que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} a_n=l$ y sea $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $b_n=\sqrt[n]{a_n}$. Pruebe que la sucesión $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ coverge y que su límite no depende de l. Pruebe que la sucesión $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida como $c_n = a_n b_n, n \in \mathbb{N}$ converge.

P6. Sea la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números naturales (i.e. $s_n \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$) y considere la función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = s_n$$

Definamos, para n natural $u_n = s_{f(n)}$.

a) Pruebe que (s_n)es creciente $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$es una subsucesión de (s_n)

b) Pruebe que si f creciente y acotada, entonces (u_n) converge y muestre su límite.