MA1B2 Álgebra Lineal - 2008/02
Profesor: Iván Rapaport Z.
Auxiliares: Johan Van der Molen M. - Mónica Carvajal P.

Auxiliar Semanas 6 y 7

25 de Septiembre

P1. Sea $P_3(\mathbb{R})$ el conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3 con coeficientes reales. Sean $p_1, p_2, p_3 \in P_3(\mathbb{R})$ tales que:

$$p_1(x) = 1 + x^2,\ p_2(x) = 4x,\ p_3(x) = 1 + 3x + 5x^2$$

Demuestre que $P_2(\mathbb{R}) = \langle\{p_1, p_2, p_3\}\rangle$.

P2. Determine la dependencia lineal o independencia lineal de cada uno de los siguientes conjuntos de vectores:

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$

(b) $\{x^2 + 1, x^2 - 1, x^2 + x + 1\} \subseteq P_2(\mathbb{R})$

(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$

P3. Sea W el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$ generado por el conjunto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(a) Determine una base de W y su dimensión.

(b) Extienda la base encontrada antes a una base de $\mathbb{R}^4$.

P4. Sea V un e.v. sobre K. Sean U, W s.e.v. de V, $Z = U \cap W$, Y un suplementario de Z respecto a U, y R un sumplementario de Z con respecto a W. Demuestre que los s.e.v. $Z + Y$ y R son suplementarios con respecto a $U + W$.

P5. Sea $m = 2n$ con $n > 0$ y considere el conjunto $P_m(\mathbb{R})$ de los polinomios reales de grado menor o igual a m. Si cada $p \in P_m(\mathbb{R})$ se escribe $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m$, se define el conjunto:

$$V = \{p \in P_m(\mathbb{R}) | \forall i \in \{0, \ldots, m\}, a_i = a_{m-i}\}$$

(a) Probar que V es subespacio vectorial de $P_m(\mathbb{R})$ sobre los reales.

(b) Encontrar una base de V y deducir que su dimensión es $n + 1$.

(c) Probar que $P_m(\mathbb{R}) = V \oplus P_{n-1}(\mathbb{R})$

(d) Se define

$$V' = \{p \in P_m(\mathbb{R}) | \forall i \in \{0, \dots, m\}, a_i = -a_{m-i}\}$$

Probar que $P_m(\mathbb{R}) = V \oplus V'$ (asuma que V' es un subespacio vectorial de $P_m(\mathbb{R})$).

P6. Si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$, se define:

$$A(V) = \{Ax | x \in V\}$$

(a) **(1)** Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y V es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ entonces $A(V)$ también es s.e.v. de $\mathbb{R}^n$.

(2) Sean V, W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, es invertible entonces $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$.

(3) Sean V, W s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ tales que $V \oplus W = \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $A(V) \oplus A(W) = \mathbb{R}^n$, entonces A es invertible.

(b) **(1)** Sea W un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$ y definamos $E = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) | A(\mathbb{R}^n) \subset W\}$. Muestre que E es un s.e.v. de $\mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

(2) Sea $W = \{(t, t) | t \in \mathbb{R}\}$. Calcule la dimensión de $E = \{A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R}) | A(\mathbb{R}^2) \subset W\}$.

P7. Considere los siguientes s.e.v. de $P_4(\mathbb{R})$:

$$W_1 = \{p \in P_4(\mathbb{R}) | \text{ 1 es raíz de p}\}$$

$$W_2 = \{p \in P_4(\mathbb{R}) | \text{ 2 es raíz de p}\}$$

(a) Encuentre las bases para W_1, W_2 y dé su dimensión.

(b) Demuestre que $W_1 + W_2 = P_4(\mathbb{R})$. ¿Es suma directa?