MA-11A Álgebra	15 de Noviembre, 2001

Control 6

Tiempo: 3.0 hrs.

PROBLEMA 1: Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

(i).- (4.0 pts) Encuentre D diagonal y P invertible tal que $A = PDP^{-1}$. Explicite P^{-1}.

(ii).- (2.0 pts) Sea $m > 0$. Verifique que si m es impar, entonces $A^m = A$ y si m es par, entonces

$$A^m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

PROBLEMA 2: Sea $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = \left(A + A^t\right)/2$.

(i).- (2.0 pts) Pruebe que T es lineal. Calcule $\mathbb{K}er(T)$ y $\dim \mathbb{I}m\,(T)$ (rango de T).

(ii).- (2.0 pts) Considere la siguiente base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$:

$$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calcule la matriz representante de T cuando la base en el espacio de partida y de llegada es β.

(iii).- (2.0 pts) Usando matrices de pasaje, encuentre la matriz representante de T cuando la base en el espacio de partida y de llegada es la base canónica.

PROBLEMA 3: Sea $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ matriz simétrica con una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ de vectores propios $v_1, \ldots, v_n$ asociados a los valores propios $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ respectivamente, donde $1 = \lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0$.

(i).- (1.5 pts) Sea $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que $\alpha_i = \langle u, v_i \rangle$, que $\langle u, u \rangle = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2$ y $Au = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i v_i$.

(ii).- (1.5 pts) Sea $u \in \mathbb{R}^n$ y $w = Au - \langle u, v_1 \rangle v_1$. Pruebe que $w \perp v_1$.

(iii).- (1.5 pts) Sea $u \in \mathbb{R}^n$. Pruebe que si $u \perp v_1$, entonces $Au \perp v_1$ y $||Au||^2 \leq \lambda_2^2 ||u||^2$.

(iv).- (1.5 pts) Para w como en (ii), pruebe que $||A^m w|| \leq \lambda_2^m ||w||$ para todo $m \geq 1$. Concluya que si $u \in \mathbb{R}^n$ y $m \geq 0$, entonces

$$||A^{m+1}u - \langle u, v_1 \rangle v_1|| \leq \lambda_2^m ||Au - \langle u, v_1 \rangle v_1|| \longrightarrow 0\,, m \to \infty\,.$$