MA1B2 Álgebra Lineal - 2008/02
Profesor: Iván Rapaport Z.
Auxiliares: Johan Van der Molen M. - Mónica Carvajal P.

Resmunen Formas Cuadráticas y Cónicas

04 de Diciembre

- Forma Cuadrática: $q(x) = x^t Ax$, con $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica.
- Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ simétrica.
  - A es definida positiva si $\forall x \neq 0, x^t Ax > 0$.
  - A es semidefinida positiva si $\forall x, x^t Ax \geq 0$.
  - A es definida negativa si $\forall x \neq 0, x^t Ax < 0$.
  - A es semidefinida negativa si $\forall x, x^t Ax \leq 0$.
- Son equivalentes:
  - A definida positiva.
  - Los valores propios de A son positivos.
  - $|A^{(1)}| = a_{11} > 0, |A^{(2)}| > 0, \ldots, |A^{(i)}| > 0, \ldots, |A^{(n)}| > 0$, con $A^{(i)}, i = \{1, \ldots, n\}$ definidos como en la figura 1.
  - Al pivotear A **con operaciones del tipo** $E_{pq}(\alpha, 1), p < q$, los pivotes son todos positivos.
- Teo. Sea $x^t Ax$ una forma cuadrática, existe L invertible t.q. si $z = Lx$, entonces $\widehat{q}(z) = z_1^2 + \cdots + z_p^2 - (z_{p+1}^2 + \cdots + z_r^2)$, donde:
  - r rango A número de valores propios $\neq 0$.
  - p número de valores propios > 0.

  En general, esto se hace definiendo $z = Qy$, con $y = P^t x$, donde $A = PDP^t$, luego, $L = QP^t$.

Cónicas:

Una cónica por definición es el conjunto solución de la ecuación:

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dy + fx = e$$

que es equivalente a:

$$(x, y) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d, f) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e = v^t Av + g^t v = e$$

Y como A es simétrica, descomponiéndola, resulta:

$$e = v^t PDP^t v + g^t v = v^t PDP^t v + g^t PP^t v$$

Definiendo $u = P^t v$, la cónica queda:

$$e = u^t D u + \widetilde{g}^t u, \text{ con } \widetilde{g} = P^t g = \begin{pmatrix} \widetilde{f} \\ \widetilde{d} \end{pmatrix}$$

y así

$$e = \lambda_1 u_1^2 + \lambda_2 u_2^2 + \widetilde{f} u_1 + \widetilde{d} u_2$$

Notar que λ_1, λ_2 son los valores propios de A y que u_1, u_2 van en la dirección de la base ortonormal de vectores propios de A.

Ahora los criterios para identificar qué tipo de cónica es, son los siguientes:

I. si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

- **i)** si $d \neq 0, f \neq 0$, la solución es una recta.
- **ii)** si $d = f = e = 0$ la solución es todo $\mathbb{R}^2$.
- **iii)** si $d = f = 0, e \neq 0$, la solución es vacía.

II. si uno de los dos es distinto de cero, esto es, $\lambda_1 \neq 0$ o $\lambda_2 \neq 0$, sin perder generalidad, asumamos que $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$, y definiedo:

$$u_1' = u_1 - \alpha, u_2' = u_2 - \beta$$

y tomando $\beta = \frac{-\widetilde{d}}{2\lambda_2}$ y $\alpha = 0$: la cónica queda:

$$\lambda_2 (u_2')^2 + \widetilde{f} u_1' = \widetilde{e}, \text{ con } \widetilde{e} = e - (\lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2 + \widetilde{f}\alpha + \widetilde{d}\beta)$$

- **i)** si $\widetilde{f} = 0$:
  - **a.** si $\frac{\widetilde{e}}{\lambda_2} > 0$, la solución es un par de rectas paralelas: $u_2' = \pm\sqrt{\frac{\widetilde{e}}{\lambda_2}}$.
  - **b.** si $\frac{\widetilde{e}}{\lambda_2} = 0$, la solución es una sola recta
  - **c.** si $\frac{\widetilde{e}}{\lambda_2} < 0$, la solución es vacía
- **ii)** si $\widetilde{f} \neq 0$: la solución es $u_1' = \frac{\widetilde{e} - \lambda_2 (u_2')^2}{\widetilde{f}}$, que corresponde a una parábola

III. si $\lambda_1 \neq 0 \lambda_2 \neq 0$, tomamos $\alpha = \frac{-\widetilde{f}}{2\lambda_1}$ y $\beta = \frac{-\widetilde{d}}{2\lambda_2}$. Luego, la cónica queda:

$$\lambda_1 (u_1')^2 \lambda_2 (u_2')^2 = \widetilde{e}$$

- **i)** si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \widetilde{e} \geq 0$, o $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \widetilde{e} \leq 0$, la solución es una elipse (una circunferencia si $\lambda_1 = \lambda_2$)
- **ii)** si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \widetilde{e} < 0$, o $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \widetilde{e} > 0$, la solución es vacía
- **iii)** si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, podemos asumir $\widetilde{e} \geq 0$, y la solución es una hipérbola con eje de simetría el eje u_1'.
- **iv)** si $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, $\widetilde{e} \geq 0$, la solución es una hipérbola con eje de simetría en el eje u_2'.

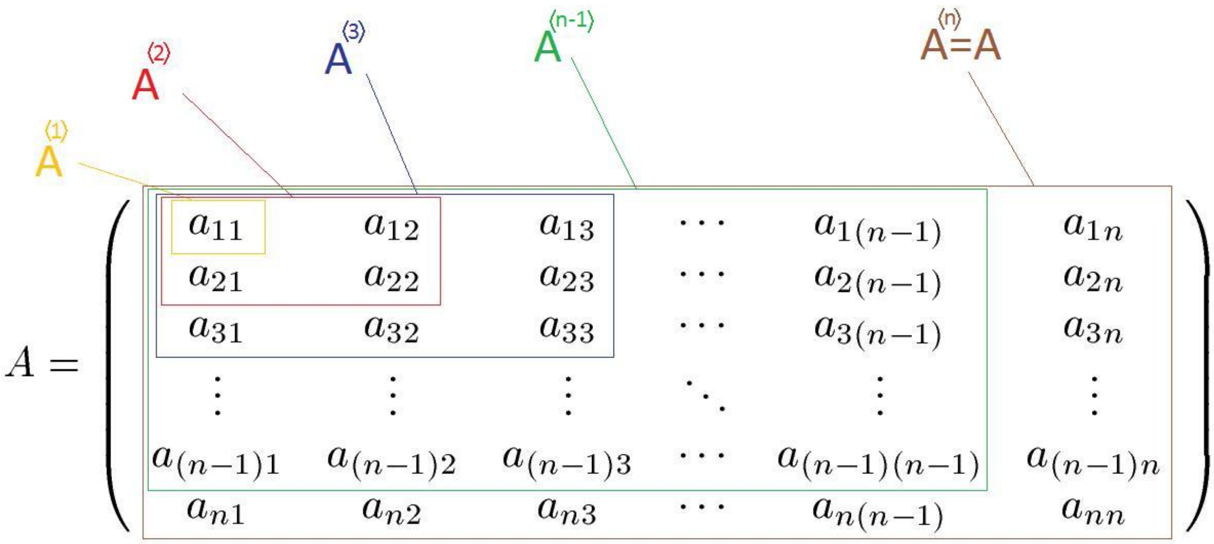

Figura 1: Matrices $A^{(i)}$