La divergencia: Una manera de medir variaciones de magnitudes.

Sabemos que en una dimensión la derivada permite estudiar la variación de una magnitud unidimensional, aquí buscaremos un sustituto razonable de la derivada que permita estudiar las variaciones de las magnitudes en mas de una dimensión.
Hay muchas posibilidades *a priori* de encontrar está sustitución de la derivada, pero veremos que la Física Matemática ha tenido en cuenta algunas por ser más naturales y por tanto más útiles.
Para precisar las ideas consideremos el campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

$$\vec{F}(x,y,z) = u(x,y,z)\hat{\imath} + v(x,y,z)\hat{\jmath} + w(x,y,z)\hat{\mathrm{k}}$$

Para que resulte más intuitivo supóngase que $\vec{F}$ es, por ejemplo, el campo de velocidades de un fluido, es decir, en cada punto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se tiene que el vector velocidad $\vec{F}(x,y,z)$. Supongamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es acotado. ¿Cómo cambia el volumen de Ω al desplazarse por el flujo del fluido? ¿Se producen giros en el movimiento?. Responderemos estas preguntas usando el teorema del valor medio. Para ello supondremos regularidad suficiente del campo vectorial $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; más concretamente supondremos $\vec{F} \in \mathcal{C}^1$, es decir $\vec{F}$ y todas sus derivadas primeras son continuas. Usando el Teorema de Taylor, escribimos entonces,

$$\vec{F}(\vec{x}+\vec{h}) = \vec{F}(\vec{x}) + J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x})\vec{h} + o(|\vec{h}|) \quad \text{para} \quad \vec{h} \to 0$$

donde $\vec{x} = (x,y,z)$, $\vec{h} = (h_1,h_2,h_3)$ y $J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x})$ es el jacobiano de $\vec{F}$ en el punto $\vec{x}$. Si $|\vec{h}|$ es pequeño se puede tomar como valor aproximado de $\vec{F}(\vec{x}+\vec{h})$ el término

$$\vec{F}(\vec{x}) + J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x}) \tag{1}$$

El primer sumando representa una traslación. analizaremos a continuación el segundo sumando. Escrito en detalle el segundo sumando es;

$$J_{\vec{x}}\vec{F}(\vec{x})\vec{h} = \begin{pmatrix} u_x & \frac{1}{2}(u_y+v_x) & \frac{1}{2}(u_z+w_y) \\ \frac{1}{2}(u_y+v_x) & v_y & \frac{1}{2}(v_z+w_y) \\ \frac{1}{2}(u_z+w_x) & \frac{1}{2}(v_z+w_y) & w_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \equiv A\vec{h}$$

Consideremos ahora las siguientes matrices

$$D = \tfrac{1}{2}(A + A^t) \quad \text{y} \quad R = \tfrac{1}{2}(A - A^t)$$

es decir, D es la parte simétrica de A y R es la parte antisimétrica de A. Así se puede expresar (1) como

$$\vec{F}(\vec{x}) + D\vec{h} + R\vec{h}. \tag{2}$$

Además

$$D = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{pmatrix}$$

con lo que

$$\text{Traza}(D) = u_x + v_y + w_z.$$

La expresión anterior corresponde por tanto a la *divergencia* de $\vec{F}$, *i.e*

$$\text{Traza}(D) = \text{div}\vec{F}.$$

Si se hace un cambio de coordenadas ortogonal podemos transformar D en una matriz diagonal $\tilde{D}$. De esta forma,

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$$

y se tiene que Traza$\tilde{D} = \text{div}\vec{F}$, pues la traza es invariante bajo cambio de coordenadas ortogonal.

Podemos interpretar el sumando $D\vec{h}$ de (2) como sigue. Sea P_0 un paralelepípedo y $P(t)$ la evolución de P_0 en el tiempo t, es decir, si $\vec{h}(t) = (h_1(t), h_2(t), h_3(t))^t$ son los lados de $P(t)$ y $\vec{h}_0 = (h_{01}(t), h_{02}(t), h_{03}(t))^t$ son los lados de P_0 se verifica

$$\begin{cases} \frac{d\vec{h}}{dt}(t) & = D\vec{h}(t) \\ \vec{h}(0) & = \vec{h}_0 \end{cases}$$

Llamando $\tilde{h}_i$, $i = 1, 2, 3$ los transformados de los h_i por el cambio de coordenadas ortogonal, resulta:

$$\frac{d\tilde{h}_i(t)}{dt} = d_i \tilde{h}_i(t), \quad i = 1, 2, 3$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dt}\text{Vol}(P(t)) = \frac{d}{dt}(\tilde{h}_1(t)\tilde{h}_2(t)\tilde{h}_3(t)) = (\sum_{i=1}^{i=3} d_i)(\tilde{h}_1(t)\tilde{h}_2(t)\tilde{h}_3(t)) = (\text{div}\vec{F})\text{Vol}(P(t))$$

Así, tenemos que la divergencia mide la tasa de cambio de volumen asociado al campo $\vec{F}$. El argumento expuesto se refiere a la aproximación lineal del campo y da una idea muy intuitiva de lo que significa la divergencia.

Por otra parte, consideramos la parte antisimétrica

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}(u_y - v_x) & \frac{1}{2}(u_z - w_x) \\ -\frac{1}{2}(u_y - v_x) & 0 & \frac{1}{2}(v_z - w_y) \\ -\frac{1}{2}(u_z - w_x) & -\frac{1}{2}(v_z - w_y) & 0 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}$$

y observamos que el vector $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ es precisamente el rotor del campo $\vec{F}$, es decir,

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\xi}.$$

Si se consideran las soluciones del sistema lineal con coeficientes constantes,

$$\frac{d}{dt}\vec{h}(t) = R\vec{h(t)},$$

módulo un cambio de coordenadas dado por una matriz P cambio de base, resultan ser

$$\vec{h}(t) = P \begin{pmatrix} \cos|\xi|t & \sin|\xi|t & 0 \\ -\sin|\xi|t & \cos|\xi|t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}\vec{h}(0)$$

que representa una rotación en $\mathbb{R}^3$, donde $|\xi| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 |\xi_i|^2}$. Con todo lo anterior se ha establecido el siguiente resultado:
Un campo de vectores continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^3$ se descompone localmente en una traslación, una dilatación y un giro.

Como se ve la divergencia aparece de manera natural cuando se intenta medir la variación de volumen que produce un campo; el rotor entrega la parte del campo que produce giros, de ahí su nombre.