Control 1: MA2A2 - 2008

Pauta Problema 3

(a) Tenemos

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r}-\vec{p}\|}, \quad \vec{r} \neq \vec{p}$$

Tomando un sistema de coordenadas de tipo esféricas pero centrado en $\vec{p}$, es decir

$$\vec{r} = \vec{r}(r,\theta,\varphi) = \vec{p} + r\,\hat{r}, \text{ de modo que } r = \|\vec{r}-\vec{p}\| \text{ y } \hat{r} = \frac{\vec{r}-\vec{p}}{\|\vec{r}-\vec{p}\|}.$$

entonces se tiene que $\psi(\vec{r}) = V(r) = \frac{1}{r}$

luego $$\nabla\psi(\vec{r}) = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} = -\frac{1}{r^2}\hat{r} = -\frac{\vec{r}-\vec{p}}{\|\vec{r}-\vec{p}\|^3}$$ 1.0

Podemos usar la expresión del Laplaciano en esféricas (como la divergencia del gradiente)

$$\Delta\psi = \operatorname{div}\nabla\psi = \frac{1}{r^2 \cancel{\operatorname{sen}\varphi}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\cancel{\operatorname{sen}\varphi}\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\cdot\frac{-1}{\cancel{r^2}}\right) = 0.$$ 1.0

Obs: (1) También es posible, aunque es mucho más largo, pasar todo a cartesianas y calcular $\nabla\psi$ y $\Delta\psi$ en esas coordenadas.

(2) La otra opción es hacer el cambio $\vec{x} = \vec{r} - p$ y razonar en $\vec{x}$ usando regla de la cadena y esféricas centradas en $\vec{O}$.

(b) Consideremos el dominio $\Omega_\delta = \Omega \setminus \overline{B}(\vec{p},\delta)$ orientado según la normal exterior. 0.5

Sea $\vec{F} = \phi\nabla\psi - \psi\nabla\phi$. Notemos que 0.5

$$\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}(\phi\nabla\psi) - \operatorname{div}(\psi\nabla\phi) = \cancel{\nabla\phi\cdot\nabla\psi} + \phi\Delta\psi - \cancel{\nabla\psi\cdot\nabla\phi} - \psi\Delta\phi$$

$$= \phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi$$ 0.5

Como ψ y ϕ son armónicas en $\Omega \setminus \{p\}$,
en particular se tiene entonces que

$$\mathrm{div}\,\vec{F} = \phi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\phi = 0 \text{ en } \Omega_\delta. \quad 0.5$$

Por el Teo. de la Divergencia.

0.5

$$0 = \iiint_{\Omega_\delta} \mathrm{div}\,\vec{F}\,dV = \oiint_{\partial\Omega_\delta} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA$$
, con $\hat{n}$ la normal exterior a Ω_δ

Pero
$$\oiint_{\partial\Omega_\delta} \vec{F}\cdot\hat{n}\,dA = \iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{s} - \iint_{\partial B(\vec{p},\delta)} \vec{F}\cdot d\vec{s} \quad 0.5$$

siempre que en estas últimas integrales se consideren las normales exteriores a Ω y $B(\vec{p},\delta)$ respectivamente. 0.5

De esta forma se concluye que

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_{\partial B(\vec{p},\delta)} \vec{F}\cdot d\vec{s} \quad 0.5$$

<u>Observación</u>: Una alternativa es usar la segunda identidad integral de Green sobre el dominio Ω_δ

$$\iiint_{\Omega_\delta} [\phi\,\Delta\psi - \psi\,\Delta\phi]\,dV = \iint_{\partial\Omega_\delta} [\phi\,\nabla\psi - \psi\,\nabla\phi]\cdot d\vec{s}$$

Esto reemplaza el cálculo de $\mathrm{div}\,\vec{F}$ y el Teo. de la divergencia, es decir 1.5 pts.

<u>Nota</u>: Consultas sobre la pauta a falvarez@dim.uchile.cl