

P1. (a) Cálculo de  $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^2(z-3)} dz$ ,  $\gamma: |z-1-i|=r$ , ( $r>0$ ), usando fórmulas de Cauchy

$f(z) = \cos(z)/z^2(z-3)$  tiene polos (singularidades no-reparables) en  $z_1=0$  y  $z_2=3$ , ya que  $\cos(0)=1 \neq 0$  y  $\cos(3) \neq 0$ , y como  $\gamma: |z-z_0|=r$ ,  $z_0=1+i$ , resulta que  $|z_0-z_1|=|1+i|=\sqrt{2}$  y  $|z_0-z_2|=|1-2+i|=\sqrt{5}$ , y por lo tanto,

• Si  $0 < r < \sqrt{2}$ ,  $f$  es holomorfa en  $\gamma \cup D_\gamma$ , y el T. de Cauchy implica que  $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^2(z-3)} dz = 0$

• Si  $\sqrt{2} < r < \sqrt{5}$ ,  $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-3)} = \frac{g(z)}{z^2}$ , donde  $g(z) = \frac{\cos(z)}{(z-3)}$  es holomorfa en  $\gamma \cup D_\gamma$  y  $\int_{\gamma} \frac{g(z)}{z^2} dz$  se puede calcular usando la fórmula:  $g'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z^3} dz$ , y se tiene  $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-3)} dz = \int_{\gamma} \frac{g(z)}{z^2} dz = 2\pi i g'(0) = 2\pi i \left[ \frac{\cos z}{(z-3)} \right]'_{z=0} = 2\pi i \frac{-\sin(z)(z-3) - \cos(z)}{(z-3)^2} \Big|_{z=0} = \boxed{-\frac{2\pi i}{9}}$

• Si  $r > \sqrt{5}$ ,  $\gamma \cup D_\gamma$  contiene a  $z_1=0$  y  $z_2=3$ , y por lo tanto, no es posible aplicar fórmulas de Cauchy para calcular la integral de  $f$  sobre  $\gamma$  ( $D_\gamma$  contiene mas de un polo).

(b) Cálculo de  $\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^2(z-2)} dz$ , mediante T. de los residuos.

T. de residuos:  $\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k: z_k \in D_\gamma} \text{Res}(f, z_k)$ ,  $z_k$  polos de  $f$  contenidos en  $D_\gamma$

Siguiendo un análisis similar para  $r$  que se hizo en (a), se tiene:

• Si  $0 < r < \sqrt{2}$  entonces  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ , porque  $D_\gamma$  no contiene a  $z_1=0$  ni a  $z_2=2$ .

• Si  $\sqrt{2} < r < \sqrt{5}$ , el conjunto  $D_\gamma$  contiene a  $z_1=0$  y no contiene a  $z_2=2$ , y por lo tanto,  $\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-2)} dz = 2\pi i \cdot \text{Res}(f, z_1=0)$ , donde  $\text{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} (z^2 f(z))$

(porque  $z_1=0$  es un polo de orden 2 de  $f$ ), y como  $z^2 f(z) = \frac{\cos(z)}{z-2}$ , se obtiene (usando el cálculo realizado en (a)):  $\text{Res}(f, z_1) = -\frac{1}{9}$ , y por lo tanto,  $\int_{\gamma} f(z) dz = \boxed{-\frac{2\pi i}{9}}$

• Si  $r > \sqrt{5}$ , el conjunto  $D_\gamma$  contiene a  $z_1=0$  y  $z_2=2$ , y por el T. de los residuos,

$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{z^2(z-2)} dz = 2\pi i (\text{Res}(f, z_1) + \text{Res}(f, z_2)) = 2\pi i (-\frac{1}{9} + \text{Res}(f, z_2))$ , y como  $z_2=2$  es un polo de orden 1, se tiene que,

$\text{Res}(f, z_2) = \lim_{z \rightarrow 2} (z-2) f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{\cos z}{z^2} = \frac{\cos 2}{4}$ , y por lo tanto,

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(z)}{z^2(z-2)} dz = 2\pi i \left( -\frac{1}{9} + \frac{\cos(2)}{4} \right) = \boxed{\frac{2\pi i}{36} (-1 + 9\cos(2))}$$

- P3. (a) Por definición, la región de convergencia de una serie de Taylor de  $f$  en torno a  $z_0$  es un disco  $D(z_0, r)$  y tal que  $f$  es holomorfa (analítica) en todo  $z \in D(z_0, r)$  y la región de convergencia de una serie de Laurent de  $f$  en torno a  $z_0$  es un anillo  $A(z_0, r_1, r_2) = \{z: r_1 < |z - z_0| < r_2\}$  y  $f$  es holomorfa en todo  $z \in A(z_0, r_1, r_2)$ .
- 0.6 Como:  $f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)}$ , las regiones de convergencia de las series (de Taylor y Laurent) no deben contener a las singularidades (polos) de  $f$  y que son  $z_1 = 0$  y  $z_2 = i$ .

- 0.7 Caso  $z_0 = i$ .  
Por definición,  $f$  no admite series de Taylor en torno a  $z_0 = i$  (porque  $i$  es un polo de  $f$ ).  
Como,  $z_1 = 0$  y  $z_2 = i$ , son los polos de  $f$ , las regiones de convergencia para las series de Laurent de  $f$  en torno a  $z_0 = i$ , son:  $A(i, 0, 1)$ , y  $A(i, 1, +\infty)$ .
- 0.7 Caso  $z_0 = 1$ .  
En este caso  $f$  admite serie de Taylor en torno a  $z_0 = 1$ , con región de convergencia igual al disco  $D(1, 1)$ , radio  $r = 1$ , porque  $|z_0 - z_1| = |1| = 1$  y  $|z_0 - z_2| = |1 - i| = \sqrt{2}$ .  
Las regiones de convergencia para las series de Laurent de  $f$  en torno a  $z_0 = 1$ , son:  $A(1, 0, 1)$ ;  $A(1, 1, \sqrt{2})$  y  $A(1, \sqrt{2}, +\infty)$ .

- 0.2 (b) El resultado de (a) implica que la serie de Laurent de  $f$  en torno a  $z_0 = 1$  y que converge a  $w_0 = i/4$ , es la que tiene región de convergencia el anillo  $A(1, 1, \sqrt{2})$  i.e. converge en todo  $z$  tal que  $|z - 1| > 1$  y  $|z - 1| < \sqrt{2}$ .
- 1.0 Usando descomposición en fracciones parciales (para  $f$ ) se tiene que:  
$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-i} = \frac{Az(z-i) + B(z-i) + Cz^2}{z^2(z-i)},$$
 y esto implica:  $z^2(A+C) + z(-iA+B) - iB = 1$   
i.e.,  $A+C=0$ ;  $-iA+B=0$ ;  $-iB=1$ , y por lo tanto,  $B=i$ ;  $A=1$  y  $C=-1$ , con lo cual  
$$f(z) = \frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} - \frac{1}{z-i},$$
 y se determinan las series (de Laurent) de  $\frac{1}{z}$ ,  $\frac{i}{z^2}$  y  $\frac{1}{z-i}$  en torno a  $z_0 = 1$  y que converge para  $1 < |z-1| < \sqrt{2}$ .

- 1.2 • Función  $\frac{1}{z}$   
$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = \frac{1}{(z-1)[1+\frac{z-1}{1}]} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{1}} = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{1}\right)^n,$$
 converge si  $|\frac{z-1}{1}| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < 1$   
i.e.  $\frac{1}{z} = \frac{1}{z-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n-1}$

- 0.4 • Función  $\frac{1}{z^2}$ . Como  $\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2}$ , resulta que  $\frac{1}{z^2} = \frac{d}{dz} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n-1} \right)$ , y por lo tanto,  
$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) (z-1)^{-n-2}$$

- 1.2 • Función  $\frac{1}{z-i}$   
$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{1-i+(z-1)} = \frac{1}{(1-i)[1+\frac{z-1}{1-i}]} = \frac{1}{(1-i)} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-1}{1-i}} = \frac{1}{(1-i)} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{1-i}\right)^n,$$
 converge si  $|\frac{z-1}{1-i}| < 1 \Leftrightarrow |z-1| < \sqrt{2}$   
i.e.,  $\frac{1}{z-i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-i)^{-n-1} (z-1)^n,$   
Usando las tres series obtenidas; resulta que  
$$\frac{1}{z^2(z-i)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^{-n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) (z-1)^{-n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-i)^{-n-1} (z-1)^n$$



P4. Probar que  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$ ,  $0 < b < a$ .

Solución. La integral es del tipo  $\int_0^{2\pi} K(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$ , donde  $K$  es una función racional de  $\cos\theta$  y  $\sin\theta$  (i.e., cociente de polinomios en  $\cos\theta$  y  $\sin\theta$ ).

(1.0) Se usa la identificación:  $\cos\theta = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  y  $d\theta = \frac{dz}{iz}$ , con lo cual

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \int_{\gamma} \frac{dz}{iz \left(a + \frac{b}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right)^2} = -i \int_{\gamma} \frac{z dz}{\left(az + \frac{b}{2}(z^2+1)\right)^2} = -4i \int_{\gamma} \frac{z dz}{(bz^2 + 2az + b)^2} \quad (\gamma: |z|=1)$$

(1.5) Para calcular la última integral usando residuos, se deben obtener los polos de la función  $f(z) = z/(bz^2 + 2az + b)^2$  (y sus respectivos órdenes), para lo cual se determinan las raíces del polinomio:  $bz^2 + 2az + b$ , i.e.,

$$bz^2 + 2az + b = 0, \text{ tiene las raíces } z = \frac{-2a \pm \sqrt{4a^2 - 4b^2}}{2b} = -\frac{a}{b} \pm \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}, \text{ y por lo tanto,}$$

las raíces son:  $z_1 = -\frac{a}{b} + \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$  y  $z_2 = -\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$  ( $z_1, z_2$  son polos de orden 2).

(3.0) Además, como  $0 < b < a$ , resulta que  $|z_2| > 1$  (i.e.,  $z_2 \notin \gamma \cup D_\gamma$ ), y  $|z_1| < 1$  ( $z_1 \in D_\gamma$ ) lo que implica

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_1), \text{ donde } f(z) = \frac{z}{b^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$$

y  $\operatorname{Res}(f, z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} [(z-z_1)^2 \cdot f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[ \frac{z}{b^2(z-z_2)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow z_1} \left[ \frac{(z-z_2)^2 - 2z(z-z_2)}{b^2(z-z_2)^3} \right] \cdot \frac{1}{b^2}$ 

$$= \frac{1}{b^2} \cdot \lim_{z \rightarrow z_1} \left[ \frac{(z-z_2) - 2z}{(z-z_2)^3} \right] = -\frac{1}{b^2} \cdot \frac{z_1 + z_2}{(z_1 - z_2)^3} = -\frac{1}{b^2} \cdot \frac{z_1 + z_2}{\left(\frac{2\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)^3} = \frac{a}{4(a^2 - b^2)^{3/2}}$$

(0.5) y por lo tanto,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \frac{a}{4(a^2 - b^2)^{3/2}} = \frac{\pi a i}{2(a^2 - b^2)^{3/2}},$$

y como

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = -4i \int_{\gamma} f(z) dz, \text{ resulta que } \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$