

# Control 2 MA26B Matemáticas Aplicadas

## Semestre 2004-2

7 de octubre de 2004

Profesores: I. Guerra, P. Guiraud, J. Dávila

**Problema 1.** a) (3 pts) Estudie en qué puntos del plano complejo son derivables las siguientes funciones:

$$i) \quad f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y), \quad ii) \quad f(z) = (z - i)\bar{z}, \quad z = x + iy$$

y calcule sus derivadas donde éstas existan.

b) (3 pts) Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Encuentre el radio de convergencia  $R$  de la serie de potencias  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$  donde  $c_k = a + 1$  si  $k$  es par y  $c_k = 1$  si  $k$  es impar. Compruebe que

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k = \frac{a+1+z}{1-z^2} \quad \forall |z| < R.$$

Indicación. Recuerde la serie geométrica  $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k = \frac{1}{1-\rho}$  si  $|\rho| < 1$ ,  $\rho \in \mathbb{C}$ .

**Problema 2.** (2 pts c/u) Calcule

$$a) \quad \oint_{|z|=2} \frac{e^{\pi z}}{z^3 + z} dz, \quad b) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + a^2)} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad c) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 + 3 \cos \theta)^2}.$$

**Problema 3.** a) Sea  $f$  una función meromorfa en  $\mathbb{C}$  con un número finito de polos tal que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p} \quad \forall |z| \geq M$$

donde  $p > 1$  y  $M, K > 0$  son constantes. Denotemos por  $z_1, \dots, z_m$  los polos de  $f$ . Supongamos además que  $z_j \notin \{k/2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$  para todo  $j = 1, \dots, m$  y que  $f(k) \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$ . El objetivo es probar que bajo estas hipótesis se cumple

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(\pi f(z) \cotg(\pi z), z_j). \quad (1)$$

i) (1.5 pts) Muestre que  $z_j$  es un polo de  $\pi f(z) \cotg(\pi z)$  y que todo entero  $k \in \mathbb{Z}$  es un polo simple de  $\pi f(z) \cotg(\pi z)$ .

ii) (1.5 pts) Para  $N \in \mathbb{N}$  sea  $\gamma_N$  el camino correspondiente al borde del cuadrado de vértices:

$$(N + \frac{1}{2})(-1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 - i), (N + \frac{1}{2})(1 + i), (N + \frac{1}{2})(-1 + i).$$

Demuestre que si  $N$  es suficientemente grande entonces

$$\left| \oint_{\gamma_N} \pi f(z) \cotg(\pi z) dz \right| \leq \frac{\pi A K (8N + 4)}{N^p}$$

donde  $A$  es una constante independiente de  $N$  tal que  $|\cotg(\pi z)| \leq A$ ,  $\forall z \in \gamma_N$ . (Puede usar esta última afirmación sin necesidad de probarla.)

iii) (1.5 pts) Deduzca la fórmula (1).

b) (1.5 pts) Pruebe que para  $a > 0$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

**TIEMPO: 3 HORAS.**