

## Guía 5, Complejos I

MA26B - Matemáticas Aplicadas

Semestre 95/2

Profs. P. Felmer, R. Gormaz

Auxs. J. Correa, R. Gonzalez, A. Moreira, M. Reyes

1. Sea  $f : D \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  con  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ .

i) Demostrar que si  $f$  y  $f^2$  son armónicas, entonces  $f$  o  $\bar{f}$  es analítica.

Observación.  $f = u + iv$  es armónica ssi  $\Delta u = 0$  y  $\Delta v = 0$ .

ii) Demostrar que si  $u + iv$  y  $v + iu$  son analíticas entonces  $u + iv$  es constante.

2. Escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

Solución.  $\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r}$  y  $\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$ .

3. Encontrar la función arco-coseno de un complejo. Solución  $\arccos z = -i \log[z + \sqrt{z^2 - 1}]$ .

4. Calcule las siguientes integrales complejas sobre los caminos que se indican

$$\begin{array}{lll} \int_C \bar{z} dz & \int_C \frac{dz}{z} & C : |z| = R \\ \int_C (1 + z^2) dz & C : [0, 1 + i] & C : [0, 1] \cup [1, 1 + i] \end{array}$$

5. Sea  $D \subset \mathbb{C}$  conexo por arcos, es decir que para todo par de puntos  $z_1, z_2 \in D$  existe una curva regular  $\gamma$  en  $C$  que los une. Demostrar que si una función  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  analítica en  $D$  cumple  $f'(z) = 0$ , para todo  $z \in D$ , entonces  $f$  es constante en  $D$ .