

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FISICAS Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA

Variable Compleja

APUNTES PARA EL CURSO DE
MATEMÁTICAS APLICADAS - MA26B

Felipe Alvarez
Roberto Cominetti

Octubre 2002

Índice general

1. El plano complejo	7
1.1. Estructura algebraica del plano complejo	7
1.2. Estructura métrica del plano complejo	9
1.3. Representación polar y raíces de la unidad	10
2. Continuidad y derivación	13
2.1. Funciones continuas	13
2.2. Derivada compleja: condiciones de Cauchy-Riemann	14
2.3. Ejercicios	19
3. Funciones en serie de potencias	21
3.1. Definiciones y propiedades básicas	21
3.2. Ejemplos de funciones en serie de potencias	23
3.2.1. La función exponencial	23
3.2.2. Funciones hiperbólicas	24
3.2.3. Funciones trigonométricas	25
3.2.4. Función logaritmo	26
3.2.5. Otras funciones	28
3.3. Ejercicios	28
4. Integral en el plano complejo	31
4.1. Definición	31
4.2. Propiedades y ejemplos	32
4.3. El teorema de Cauchy-Goursat	38
4.4. Ejercicios	41

5. Fórmula de Cauchy y consecuencias	43
5.1. La fórmula de Cauchy	43
5.2. Desarrollo en serie de Taylor	44
5.3. Otras consecuencias	46
5.4. Ejercicios	47
6. Teorema de los residuos	49
6.1. Puntos singulares, polos y residuos	49
6.2. El teorema de los residuos	52
6.3. Ejemplos	53
6.4. Ejercicios	58
7. Evaluación de integrales vía residuos	61
7.1. Integrales de funciones trigonométricas	61
7.2. Integrales impropias sobre dominios no acotados	64
7.3. Ejercicios	74

Prefacio

El cálculo diferencial e integral de funciones de variable compleja es una materia fundamental del análisis matemático tanto por su interés en matemáticas puras como por su utilidad para resolver problemas en ingeniería.

El objetivo de estos apuntes es proporcionar los elementos básicos de la teoría de funciones de variable compleja tal como se exponen en el curso de Matemáticas Aplicadas. Esta es una de las asignaturas del segundo año de la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas de la Universidad de Chile.

Estos apuntes se basan en las notas escritas en colaboración con mi colega el Profesor Roberto Cominetti, a quien le agradezco las múltiples e interesantes discusiones que hemos tenido sobre diversos aspectos del curso.

Existe una versión interactiva de este apunte, que hemos llamado libro orgánico, disponible en la página

<http://im.ideamas.cl/usuarios/cpizarro/VariableCompleja/apunte.html>

en la cual hay actividades que esperamos ayuden a comprender los temas del curso.

Mis agradecimientos a Claudio Pizarro quien participó en la elaboración de este apunte, transcribiendo las notas manuscritas, desarrollando los módulos interactivos para la versión orgánica y sugiriendo varias ideas para mejorar su presentación.

Finalmente, agradecemos el financiamiento del proyecto Fondef IDEA+ y del Departamento de Ingeniería Matemática de la Universidad de Chile.

Felipe Alvarez

Capítulo 1

El plano complejo

En este capítulo recordaremos la definición y algunas propiedades básicas de los números complejos. El estudiante familiarizado con estos conceptos puede pasar directamente al capítulo 2.

1.1. Estructura algebraica del plano complejo

La estructura algebraica usual de \mathbb{R}^2 es la de espacio vectorial sobre el cuerpo¹ de los números reales definida por las operaciones de adición

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

y multiplicación por escalar

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b),$$

donde $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$. Desde el punto de vista algebraico, el plano complejo \mathbb{C} no es otra cosa que \mathbb{R}^2 dotado de la operación adicional *producto* definida por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Este producto² entre vectores de \mathbb{R}^2 puede escribirse matricialmente como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd \\ ad + bc \end{pmatrix}.$$

Es fácil verificar que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ resulta ser un cuerpo conmutativo, el cual se denota simplemente por \mathbb{C} . Por otra parte, \mathbb{C} contiene una *copia* isomorfa del cuerpo de los números reales \mathbb{R} . Más precisamente, la función

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ a &\rightarrow h(a) = (a, 0) \end{aligned}$$

¹Para las definiciones de espacio vectorial y de cuerpo, el lector puede ver el apunte del curso de Álgebra.

²No debe confundirse la operación \cdot con el producto interno estándar, también conocido como *producto escalar*, y que se define como $\langle (a, b), (c, d) \rangle = ac + bd$.

es un isomorfismo que permite identificar \mathbb{R} con el eje $\{(a, 0) \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R}\}$.

Históricamente, los números complejos fueron introducidos con el fin de resolver ecuaciones algebraicas que no tienen solución en los números reales. El ejemplo canónico es la ecuación

$$x^2 = -1.$$

Consideremos el complejo $(0, 1)$, el cual satisface

$$(0, 1)^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0).$$

Denotando $i = (0, 1)$ e identificando $(-1, 0)$ con -1 vía el isomorfismo h , podemos escribir

$$i^2 = -1,$$

de modo tal que i es una solución de la ecuación anterior³.

Notemos además que las identificaciones anteriores permiten escribir

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot i = a + ib,$$

donde el producto entre i y b se denota simplemente ib . De ahora en adelante, el número complejo $z = (a, b)$ será denotado $a + ib$, y diremos que su parte real es a y que su parte imaginaria es b , lo que se escribe $a = \text{Re}(z)$ y $b = \text{Im}(z)$ respectivamente.

El *complejo conjugado* de $z = a + ib$ se define por

$$\bar{z} = a - ib,$$

y geométricamente corresponde a reflejar z con respecto al eje horizontal asociado a los números reales. Notemos que:

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$
- $\bar{z} = z$ ssi $z \in \mathbb{R}.$
- $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{(\bar{z})} = z$, y además $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ si $z = a + ib.$
- $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ e $\text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$

Sea $z = a + ib \neq 0$; para determinar su inverso z^{-1} multiplicamos por \bar{z} a ambos lados de la ecuación $z \cdot z^{-1} = 1$, obteniendo así $(z \cdot \bar{z})z^{-1} = \bar{z}$. Pero la condición $z \neq 0$ implica que $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 > 0$, por lo tanto

$$z^{-1} = \frac{1}{z \cdot \bar{z}} \bar{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Ahora bien, dados $z = a + ib \neq 0$ y $w = c + id$, para calcular w/z utilizamos las siguientes identidades:

$$\frac{w}{z} = w \cdot z^{-1} = \frac{w \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{ac + bd}{a^2 + b^2} + i \frac{ad - bc}{a^2 + b^2}.$$

A partir de lo anterior se deducen todas las reglas usuales del álgebra de los números complejos, las cuales se dejan al lector como ejercicio.

³Los números complejos son muy útiles en Ingeniería Eléctrica, donde el símbolo i se reserva para denotar la *corriente* mientras que se usa j para el complejo $(0, 1)$; nosotros utilizaremos i para denotar este último.

1.2. Estructura métrica del plano complejo

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, su *módulo* se define como

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2},$$

y la *distancia* entre dos números complejos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se define como

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Tenemos las siguientes propiedades:

- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| \geq 0, |\bar{z}| = |z|, |Re(z)| \leq |z|$ y $|Im(z)| \leq |z|$.
- $|z| = 0$ ssi $z = 0$. En términos de la función distancia: $d(z_1, z_2) = 0$ ssi $z_1 = z_2$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.
- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. En términos de la función distancia, se obtiene como consecuencia la desigualdad triangular:

$$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, d(z_1, z_2) \leq d(z_1, z_3) + d(z_3, z_2).$$

Observemos que $|a + ib|$ coincide con la norma euclidiana $\|(a, b)\|$ del vector $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, y por lo tanto corresponde a la distancia entre el punto (a, b) y el origen del plano cartesiano. De este modo, \mathbb{C} y \mathbb{R}^2 tienen la misma estructura *topológica*, lo que significa que las nociones de vecindad, conjunto abierto, conjunto cerrado, compacidad y convergencia son las mismas.

En consecuencia:

1. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice *abierto* si para todo punto $z_0 \in A$ existe un radio $\rho > 0$ tal que el *disco*

$$D(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \rho\}$$

está contenido en A (ver figura 1.1).

2. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice *cerrado* si su complemento $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ es abierto. Ejemplo: el *disco cerrado* definido por

$$\overline{D}(z_0, \rho) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \rho\}$$

es un conjunto cerrado pues tiene como complemento al conjunto

$$\overline{D}(z_0, \rho)^c = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > \rho\},$$

y es fácil verificar que este último es abierto.

3. Un conjunto $A \subseteq \mathbb{C}$ se dice *acotado* si existe un radio $\rho_0 > 0$ tal que $A \subseteq D(0, \rho_0)$.

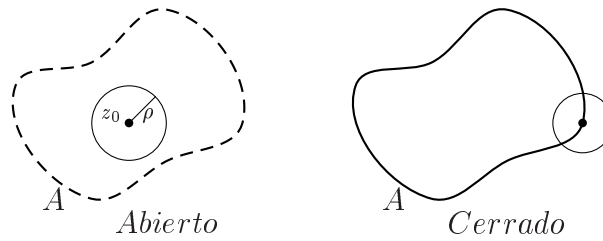


Figura 1.1: Conjunto abierto y cerrado

4. Un conjunto se dice *compacto* si es cerrado y acotado.
5. Una sucesión de números complejos $z_n = a_n + ib_n$ se dice que *converge* al complejo $z = a + ib$, y se escribe $z_n \rightarrow z$, si se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0,$$

o, equivalentemente, si se tiene que $a_n \rightarrow a$ y $b_n \rightarrow b$ como sucesiones de números reales.

Propiedad. Si $(z_n) \subset \mathbb{C}$ es una sucesión acotada entonces admite una subsucesión convergente.

Demostración. Es directo de la compacidad de sucesiones en \mathbb{R}^2 . □

Finalmente, recordemos que un conjunto A se dice *conexo* (o también *conexo por caminos*), si dados dos puntos cualesquiera del conjunto existe una curva regular por trozos que los une y que está completamente contenida en A .

1.3. Representación polar y raíces de la unidad

Sea $z = x + iy$ un número complejo, que como sabemos corresponde a un punto P de coordenadas cartesianas x e y . Pero P también puede describirse en coordenadas polares r y θ . Más precisamente, tenemos

$$z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta,$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ y θ es el ángulo en radianes entre el eje OX y el segmento que une el origen con P ; se dice que θ es el *argumento* de z .

Una característica importante de θ que puede llevar a confusión es que no está únicamente determinado, pues si θ es un valor para el ángulo entonces para cualquier entero $k \in \mathbb{Z}$, el valor $\theta + 2k\pi$ también es válido para describir el mismo punto. Para evitar esta ambigüedad, se suele restringir el valor de θ al intervalo $]-\pi, \pi]$, en cuyo caso se dice que θ es el *valor principal del argumento* de z y se escribe

$$\theta = \arg z.$$

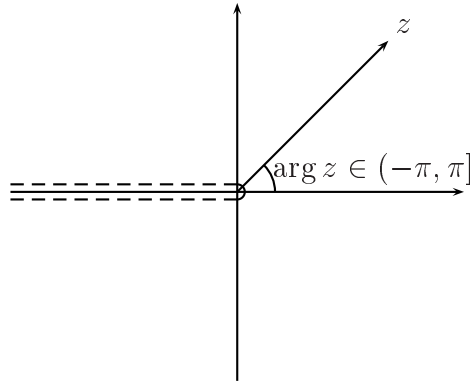


Figura 1.2: Valor principal del argumento

En la sección 3.2.1 veremos que es posible dar un sentido a la función exponencial evaluada en un número complejo, a partir de lo cual es posible obtener la *fórmula de Euler*

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta.$$

Esto permite escribir

$$z = r e^{i\theta} = |z| e^{i \arg(z)}.$$

Más aún, si $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ entonces

- $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$;
- si $r_2 > 0$ entonces $z_1 / z_2 = (r_1 / r_2) e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$.

Así,

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi},$$

y en particular se tiene que multiplicar un complejo por $e^{i\theta}$ corresponde a rotar el segmento que lo une con el origen en θ radianes. Además, como $(e^{i\theta})^n = e^{i\theta} \dots e^{i\theta} = e^{i(\theta + \dots + \theta)} = e^{in\theta}$, se deduce la *fórmula de Moivre*

$$(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta.$$

Por otra parte, dado $k \in \mathbb{N}$, las raíces k -ésimas de la unidad son aquellos complejos que satisfacen $z^k = 1$. Utilizando la representación polar $z = r e^{i\theta}$ se tiene:

$$\begin{aligned} z^k = 1 &\Leftrightarrow r^k e^{ik\theta} = 1 \Leftrightarrow r^k = 1, \quad k\theta = 0 \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow r = 1, \quad \theta = 0, \left(\frac{2\pi}{k}\right), 2\left(\frac{2\pi}{k}\right), \dots, (k-1)\left(\frac{2\pi}{k}\right) \\ &\Leftrightarrow z = 1, e^{i\frac{2\pi}{k}}, e^{2i\frac{2\pi}{k}}, \dots, e^{(k-1)i\frac{2\pi}{k}} \end{aligned}$$

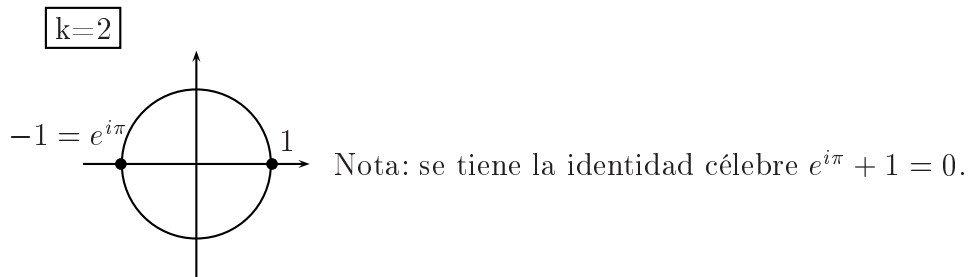


Figura 1.3: Raíz cuadrada de la unidad

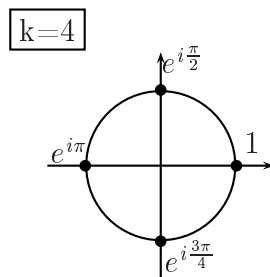
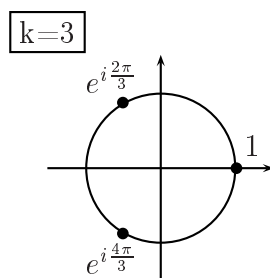


Figura 1.4: Otras raíces de la unidad

Capítulo 2

Continuidad y derivación

En todo lo que sigue, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función definida sobre un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

2.1. Funciones continuas

Definición 2.1.1. Diremos que f es continua en $z_0 \in \Omega$ si para toda sucesión $(z_n)_{n \geq 1} \subseteq \Omega$ tal que $z_n \rightarrow z_0$ se tiene que $f(z_n) \rightarrow f(z_0)$, lo que se escribe de forma compacta como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0),$$

o de manera equivalente

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z) - f(z_0)| = 0.$$

Si lo anterior es cierto para todo $z_0 \in \Omega$, decimos simplemente que f es continua en Ω y escribimos $f \in C(\Omega)$.

Por otra parte, dado $z \in \mathbb{C}$, $f(z)$ tiene una parte real y otra imaginaria; en consecuencia, se puede escribir

$$f(z) = u(z) + iv(z),$$

o bien

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy,$$

donde las funciones¹ $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ son a valores en \mathbb{R} . Es directo verificar que $f = u + iv$ es continua en $z_0 = x_0 + iy_0$ ssi $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son continuas en (x_0, y_0) . En particular, las operaciones de suma, producto, ponderación por escalar, composición y cociente (cuando está bien definido) de funciones continuas preservan la continuidad.

Ejemplos 2.1.1.

¹El dominio de $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ es igual a Ω , visto este último como subconjunto de \mathbb{R}^2 .

1. Si $f(z) = z^2$ entonces

$$f(z) = x^2 - y^2 + i2xy,$$

de modo tal que

$$u(x, y) = x^2 - y^2$$

y

$$v(x, y) = 2xy.$$

Dado que u y v son continuas en \mathbb{R}^2 , $f(z) = z^2$ es continua en \mathbb{C} .

2. Si $f(z) = 1/z$ entonces

$$f(z) = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2},$$

y esta función es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

2.2. Derivada compleja: condiciones de Cauchy-Riemann

Por analogía al caso de una variable real, se introduce la siguiente definición.

Definición 2.2.1. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función.

- Diremos que f es derivable en $z_0 \in \Omega$, si existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

cuyo valor $f'(z_0)$ lo llamaremos la derivada de f en z_0 ,

- Si f es derivable en todo $z_0 \in \Omega$ diremos que es holomorfa en Ω .
- El conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω se denota $H(\Omega)$, es decir

$$H(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa en } \Omega\}.$$

Notemos que si f es derivable en z_0 entonces

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + o(z - z_0),$$

donde

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0.$$

En particular, si f es derivable en z_0 entonces f es continua en z_0 .

Supongamos que $f = u + iv : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$. A continuación relacionaremos la derivada $f'(z_0)$ con las derivadas parciales de $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ en (x_0, y_0) . Comencemos por tomar $z = z_0 + h$, con $h \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0)}{h} - \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

Luego

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h}.$$

Se tendrá en particular que

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Del mismo modo, es posible repetir un análisis similar al anterior para $z = z_0 + ih$ con $h \in \mathbb{R}$. En tal caso tendremos

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \frac{u(x_0, y_0 + h) + iv(x_0, y_0 + h)}{ih} - \frac{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)}{ih} \\ &= \frac{-iu(x_0, y_0 + h) + v(x_0, y_0 + h)}{h} - \frac{-iu(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)}{h}. \end{aligned}$$

De donde

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} - i \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h}.$$

Así,

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Por unicidad del límite en la definición de derivada, debe cumplirse la igualdad de las dos expresiones recién calculadas para $f'(z_0)$. De este modo, igualando las partes real e imaginaria se obtiene

$$(C-R) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0), \end{cases}$$

que se conocen como las *condiciones de Cauchy-Riemann*. Cabe señalar que este desarrollo sólo asegura que estas condiciones son necesarias para la existencia de la derivada de f en z_0 . Veremos a continuación que en realidad estas igualdades resultan ser condiciones **necesarias y suficientes** para la derivabilidad de una función en un punto. Para ello, notemos que, de manera equivalente, f es derivable en z_0 si existe algún complejo $f'(z_0) = a + ib$ tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0) - (a + ib)(z - z_0)|}{|z - z_0|} = 0.$$

Expresando el producto $(a + ib)(z - z_0)$ en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix},$$

vemos que la derivabilidad de f en z_0 equivale a

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{\left\| \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} \right\|} = 0,$$

lo que prueba el siguiente resultado.

Teorema 2.2.1. *Una función de variable compleja $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $z_0 \in \Omega$ ssi es Fréchet-derivable en (x_0, y_0) como función de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^2 y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

En tal caso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Ejemplos 2.2.1.

1. Consideremos

$$f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Las funciones $u(x, y) = x^2 - y^2$ y $v(x, y) = 2xy$ son (Fréchet)-derivables en todo \mathbb{R}^2 pues todas sus derivadas parciales son continuas en \mathbb{R}^2 . Más aún, es directo verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en todo \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 2x = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Luego

$$f'(z_0) = 2x_0 + i2y_0 = 2z_0.$$

2. Sea

$$f(z) = z^3 = (x^3 - 3y^2x, 3x^2y - y^3).$$

Nuevamente por Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= 3(x^2 - y^2) = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -6xy = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}$$

Luego

$$f'(z_0) = 3(x_0^2 - y_0^2) + i6x_0y_0 = 3z_0^2.$$

3. Tomemos ahora

$$f(z) = z^k,$$

con $k > 0$ un entero fijo. Veremos por definición que

$$f'(z_0) = kz_0^{k-1}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |(z_0 + h)^k - z_0^k - kz_0^{k-1}h| &= \left| \sum_{l=2}^k \binom{k}{l} z_0^{k-l} h^l \right| \\ &= |h^2| \left| \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j+2} z_0^{k-2-j} h^j \right| \\ &\leq |h|^2 \sum_{j=0}^{k-2} \frac{k!}{(j+2)!(k-2-j)!} |z_0|^{k-2-j} |h|^j \\ &\leq |h|^2 k(k-1) \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(k-2)!}{j!(k-2-j)!} |z_0|^{k-2-j} |h|^j \\ &= |h|^2 k(k-1)(|z_0| + |h|)^{k-2}. \end{aligned}$$

Luego

$$\left| \frac{(z_0 + h)^k - z_0^k}{h} - kz_0^{k-1} \right| \leq |h| \cdot k(k-1)(|z_0| + |h|)^{k-2} \rightarrow 0.$$

Las reglas usuales para la derivación de sumas, productos, cuocientes, ponderación por escalar y composición de funciones son válidas. A continuación enunciamos estas propiedades, cuyas demostraciones quedan como ejercicio al lector.

Reglas de derivación:

1. Sean $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ dos funciones derivables en z_0 y sea $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces la función $h = \alpha f + g$ también es derivable en z_0 y se tiene

$$h'(z_0) = (\alpha f + g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + g'(z_0).$$

2. Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son derivables en z_0 entonces el producto fg es derivable en z_0 y se tiene

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

3. Si $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ son derivables en z_0 con $g(z_0) \neq 0$ entonces el cuociente f/g es derivable en z_0 y se tiene

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

4. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en z_0 y $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ es derivable en $f(z_0) \in D$ entonces la composición $g \circ f$ es derivable en z_0 y se tiene

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

En particular, todo polinomio

$$p(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_k z^k$$

es holomorfo en \mathbb{C} con

$$p'(z_0) = c_1 + 2c_2 z_0 + \dots + k c_k z_0^{k-1}.$$

Similarmente,

$$f(z) = \frac{1}{z^k}$$

es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ con

$$f'(z_0) = -\frac{k}{z_0^{k+1}}, \quad \forall z_0 \neq 0.$$

Por otra parte, es evidente que si $f \equiv C$ con $C \in \mathbb{C}$ una constante entonces $f' \equiv 0$. Para la recíproca se tiene:

Proposición 2.2.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa con Ω un conjunto abierto y conexo por caminos. Si $f' \equiv 0$ en Ω entonces f es constante en Ω .*

Demostración. Sea $f = u + iv \in H(\Omega)$ tal que $f' \equiv 0$ en Ω . Por Cauchy-Riemann, se tiene

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Como Ω es conexo por caminos, se deduce que existen dos constantes reales C_1 y C_2 tales que $u \equiv C_1$ y $v \equiv C_2$, y en consecuencia $f \equiv C_1 + iC_2$ en Ω . \square

Diremos que una función holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una *primitiva* de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ si

$$\forall z \in \Omega, \quad F'(z) = f(z).$$

Corolario 2.2.1. *Sean $F, G \in H(\Omega)$ dos primitivas de una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, donde Ω es un abierto conexo por caminos. Entonces existe una constante $C \in \mathbb{C}$ tal que para todo $z \in \Omega$, $F(z) = G(z) + C$.*

Demostración. Basta aplicar la Proposición 2.2.1 a la función $H = F - G$. \square

2.3. Ejercicios

1. Para las siguientes funciones, determine aquellas que son holomorfas en todo \mathbb{C} y calcule su derivada:
 - a) $f(z) = \bar{z}$.
 - b) $f(z) = e^x(\cos y - i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$.
 - c) $f(z) = e^{-x}(\cos y - i \operatorname{sen} y)$, $z = x + iy$.
 - d) $f(z) = (z^3 + 1)e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)$, $z = x + iy$.
2.
 - a) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.
 - b) Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante en Ω entonces f también es constante. Indicación: considere $|f|^2$.
3.
 - a) Sean $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω como subconjunto de \mathbb{C} , entonces $u + iv$ es constante.
 - b) Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$, $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es diferenciable sólo en z_0 .
4. Definamos los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

- a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.
- b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega$, $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$.
- c) Explícite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$.
- d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2 , se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i \Delta v,$$

y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω . Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω . Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω .

5. Sean $u(x, y)$ y $v(x, y)$ dos funciones de clase C^1 en \mathbb{R}^2 . Considere los campos en \mathbb{R}^3 definidos por $\vec{w}(x, y, z) = u(x, y)\hat{i} + v(x, y)\hat{j}$ y $\vec{w}_1(x, y, z) = v(x, y)\hat{i} - u(x, y)\hat{j}$.
 - (i) Pruebe que \vec{w} y \vec{w}_1 son conservativos si y sólo si u y v satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, en cuyo caso decimos que u y v son funciones *conjugadas*.
 - (ii) Pruebe que si $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son conjugadas y de clase C^2 entonces $\Delta u = \Delta v = 0$ (decimos que u y v son *armónicas*) y además $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
 - (iii) Pruebe que si $u(x, y)$ es armónica entonces existe una función $v(x, y)$ conjugada de u . Indicación: note que lo anterior es equivalente a probar que un cierto campo es conservativo.
6. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ y $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Verifique que de tenerse estas condiciones entonces

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) e^{-i\theta}, \quad z = re^{i\theta}.$$

Capítulo 3

Funciones en serie de potencias

3.1. Definiciones y propiedades básicas

Sea $(c_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{C}$ una sucesión de números complejos y $a \in \mathbb{C}$ un punto dado. Dado $z \in \mathbb{C}$ definimos la suma parcial

$$S_N(z) = \sum_{k=0}^N c_k (z - a)^k.$$

Teorema 3.1.1. *Sea*

$$R = 1 / \limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$

con la convención $1/0 = \infty$. Entonces

1. $S_N(z)$ converge si $|z - a| < R$ y diverge si $|z - a| > R$. Al número R se le llama radio de convergencia de la serie.
2. La serie $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$ es holomorfa en $D(a, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$ con

$$S'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1}.$$

Demostración. Supongamos para simplificar que $a = 0$, el caso general se hace igual. Tenemos que:

- Si $|z| < R \Rightarrow \sqrt[k]{|c_k|} |z| \leq \varepsilon < 1$ para todo k suficientemente grande, luego

$$\begin{aligned} |S_{N+m}(z) - S_N(z)| &\leq \sum_{k=N+1}^{N+m} |c_k| |z|^k \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \underbrace{(\sqrt[k]{|c_k|} |z|)^k}_{\leq \varepsilon} \\ &\leq \frac{\varepsilon^{N+1}}{1 - \varepsilon} \rightarrow 0 \text{ cuando } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Luego, $\{S_N(z)\}$ es de Cauchy en \mathbb{C} , y por lo tanto es convergente.

- Supongamos que $|z| > R$. Por una parte, tenemos que

$$|S_N(z) - S_{N-1}(z)| = |c_N||z|^N.$$

Si $S_N(z)$ converge entonces necesariamente $|S_N(z) - S_{N-1}(z)| \rightarrow 0$. Escojamos una subsucesión N_k tal que

$$\sqrt[N_k]{|c_{N_k}|} \rightarrow 1/R.$$

En particular, dado $\varepsilon > 0$ se tendrá que para todo k suficientemente grande

$$\sqrt[N_k]{|c_{N_k}|} > 1/(R + \varepsilon),$$

y en consecuencia

$$|c_{N_k}||z|^{N_k} > [|z|/(R + \varepsilon)]^{N_k}.$$

Escogiendo $\varepsilon > 0$ tal que $R + \varepsilon < |z|$ (esto es posible pues hemos supuesto que $|z| > R$), se deduce que

$$|c_{N_k}||z|^{N_k} > \theta^{N_k} \text{ con } \theta > 1.$$

Luego, $|S_{N_k}(z) - S_{N_k-1}(z)| \geq \theta^{N_k} \rightarrow \infty$, y por lo tanto $S_N(z)$ no converge.

Demostremos ahora que la serie $S(z)$ es derivable término a término tal como se establece en el enunciado. Comencemos por notar que como $\limsup_k \sqrt[k-1]{k|c_k|} = \limsup_k \sqrt[k]{|c_k|}$, entonces ambas series tienen el mismo radio de convergencia. Sea $z_0 \in D(0, R)$ y $h \in \mathbb{C}$ pequeño de modo tal que $|z_0| + |h| \leq R - \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \left| \frac{S(z_0 + h) - S(z_0)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z_0^{k-1} \right| &= \left| \sum_{k=2}^{\infty} c_k \left[\frac{(z_0 + h)^k - z_0^k}{h} - k z_0^{k-1} \right] \right| \\ &\leq |h| \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |c_k| (|z_0| + |h|)^{k-2} \\ &\leq |h| \cdot \underbrace{\left[\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) |c_k| (R - \varepsilon)^{k-2} \right]}_{\text{convergente a un } M < +\infty} \\ &= M|h| \rightarrow 0 \text{ cuando } h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Observación. Si $|z - a| = R$ entonces puede o no haber convergencia, lo que dependerá de cada serie en particular.

Corolario 3.1.1. *Bajo las condiciones del teorema anterior, la serie*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

tiene derivadas de todos los órdenes en $D(a, R)$, lo que escribimos $S \in C^\infty(D(a, R))$, y más aún

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) c_k (z-a)^{k-n}.$$

En particular,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad c_k = \frac{S^{(k)}(a)}{k!}.$$

3.2. Ejemplos de funciones en serie de potencias

3.2.1. La función exponencial

Definimos la exponencial compleja de $z \in \mathbb{C}$ mediante la serie de potencias

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

El radio de convergencia de esta serie es

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\frac{1}{k!}} = 1/0 = \infty,$$

de modo que la exponencial queda bien definida para todo $z \in \mathbb{C}$, es decir

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Veamos algunas propiedades básicas de la función exponencial.

Propiedades.

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x.$
- $\forall y \in \mathbb{R}, \exp(iy) = \cos y + i \operatorname{sen} y.$

En efecto, desarrollando la serie de potencias e identificando sus partes real e imaginaria se obtiene

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \\ &= \left[1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots \right] + i \left[y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots \right] \\ &= \cos y + i \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

- $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} z_1^{k-j} z_2^j = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \frac{z_1^{k-j}}{(k-j)!} \frac{z_2^j}{j!} = \exp(z_1) \exp(z_2). \end{aligned}$$

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

- $\forall z_0 \in \mathbb{C}, \exp'(z_0) = \exp(z_0)$.

Ejercicio: verificarlo usando Cauchy-Riemann.

- $\forall z \in \mathbb{C}, \exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)$, es decir $\exp(\cdot)$ es $2\pi i$ -periódica.

- $\exp(\cdot)$ no tiene ceros; más aún, si $z \in \mathbb{C}$ es tal que $z = x + iy$, entonces $|\exp(z)| = e^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

3.2.2. Funciones hiperbólicas

Una vez definida la función exponencial, podemos definir las funciones coseno y seno hiperbólico de una variable compleja de manera similar a como se definen las funciones hiperbólicas de una variable real.

El *coseno hiperbólico* es la función holomorfa en \mathbb{C}

$$\cosh : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\begin{aligned} \cosh(z) &= \frac{\exp(z) + \exp(-z)}{2} \\ &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \\ &= \cosh(x) \cos y + i \operatorname{senh}(x) \operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

El *seno hiperbólico* es la función holomorfa en \mathbb{C}

$$\operatorname{senh} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\begin{aligned}\sinh(z) &= \frac{\exp(z) - \exp(-z)}{2} \\ &= z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \\ &= \sinh(x) \cos y + i \cosh(x) \sin y.\end{aligned}$$

Propiedades.

- $\cosh(-z) = \cosh(z)$ (función par).
- $\sinh(-z) = -\sinh(z)$ (función impar).
- Ambas son $2\pi i$ -periódicas.
- $\cosh'(z) = \sinh(z)$.
- $\sinh'(z) = \cosh(z)$.
- $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.
- $\cosh(z) = 0 \Leftrightarrow z = (\frac{\pi}{2} + k\pi)i, k \in \mathbb{Z}$.
- $\sinh(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

3.2.3. Funciones trigonométricas

Por analogía con el caso real, las funciones trigonométricas coseno y seno de una variable compleja se definen a partir de sus series de potencias¹

El *coseno* es la función holomorfa en \mathbb{C}

$$\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\begin{aligned}\cos(z) &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \\ &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \\ &= \cosh(iz) \\ &= \cosh(y) \cos x - i \sinh(y) \sin x.\end{aligned}$$

El *seno* es la función holomorfa en \mathbb{C}

$$\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

¹Las series de potencias del seno y del coseno tienen ambas radio de convergencia igual a infinito.

definida por

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(z) &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \\
 &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \\
 &= \frac{1}{i} \operatorname{senh}(iz) \\
 &= \cosh(y) \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh}(y) \cos x.
 \end{aligned}$$

Propiedades.

- $\cos(-z) = \cos(z)$ (función par).
- $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen}(z)$ (función impar).
- Ambas son 2π -periódicas.
- $\cos'(z) = -\operatorname{sen}(z)$.
- $\operatorname{sen}'(z) = \cos(z)$,
- $\cos^2(z) + \operatorname{sen}^2(z) = 1$.
- $\cos(z) = 0 \Leftrightarrow z = (\frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$.
- $\operatorname{sen}(z) = 0 \Leftrightarrow z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

3.2.4. Función logaritmo

Aunque nos gustaría definir la función logaritmo de un número complejo $\log(z)$ simplemente como la función inversa de $\exp(z)$, hay dos inconvenientes que nos lo impiden:

1. $\exp(z)$ no es epiyectiva pues $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. $\exp(z)$ no es inyectiva pues es $2\pi i$ -periódica.

La primera dificultad es simple de resolver pues basta restringir el dominio del logaritmo al rango de la exponencial, esto es, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Aunque el segundo inconveniente es más delicado, veremos a continuación que sí es posible definir

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

de modo tal que se tenga la propiedad

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exp(\log(z)) = z.$$

En efecto, sea $z = re^{i\theta}$ con $r = |z| > 0$ de modo que $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Para resolver la ecuación $\exp(w) = z$ tomemos $w = x + iy$ de modo que $\exp(w) = e^x e^{iy}$, y así la ecuación $e^x e^{iy} = re^{i\theta}$

3.2. EJEMPLOS DE FUNCIONES EN SERIE DE POTENCIAS 27

tiene como solución $x = \ln r$, $y = \theta \pmod{2\pi}$. Luego, el conjunto solución está dado por $\{\ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) | k \in \mathbb{Z}\}$, donde $\arg z \in (-\pi, \pi]$ es el valor principal del argumento de z definido en la sección 1.3.

Así, para cada $k \in \mathbb{Z}$ tenemos la determinación k -ésima de la función logaritmo $\log^k : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\log^k(z) = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi)$. La *determinación principal* del logaritmo complejo es la función

$$\log : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$\log(z) = \ln |z| + i \arg z.$$

Como la función $\arg z$ es discontinua en \mathbb{R}_- pues pasa de $-\pi$ a π , no podemos esperar que $\log(z)$ sea holomorfa en todo $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Propiedades.

- $\exp(\log(z)) = e^{\ln |z|} e^{i \arg z} = z$.
- $\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \pmod{2\pi i}$.
- $\log(z)$ es discontinua en \mathbb{R}_- .
- $\log(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y más aún

$$\log'(z_0) = \frac{1}{z_0}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \frac{\log(z_0 + h) - \log(z_0)}{h} &= \frac{1}{z_0} \frac{\log(1 + \frac{h}{z_0})}{(\frac{h}{z_0})} \\ &= \frac{1}{z_0} \frac{w}{\exp(w) - \exp(0)} \rightarrow \frac{1}{z_0} \frac{1}{\exp'(0)} = \frac{1}{z_0} \end{aligned}$$

donde $w = \log(1 + \frac{h}{z_0}) \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$.

- Desarrollo en serie en torno a $a = 1$:
Como

$$\frac{1}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - z)^k \quad \text{si } |z - 1| < 1$$

entonces

$$\log'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - z)^k \quad \text{si } |z - 1| < 1,$$

y dado que $\log(1) = \ln 1 + i0 = 0$, en virtud del corolario 2.2.1 se tiene

$$\log(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} (z - 1)^{k+1}$$

siempre que $|z - 1| < 1$.

- Desarrollo en serie en torno a $z_0 \notin \mathbb{R}_-$:

Como

$$\frac{z_0}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_0}\right)^k$$

siempre que $|z - z_0| < |z_0|$ entonces para todo z en la *componente conexa por caminos* del conjunto $D(z_0, |z_0|) \setminus \mathbb{R}_-$ que contiene a z_0 se tiene

$$\log(z) = \log(z_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)z_0^{k+1}} (z - z_0)^{k+1}.$$

3.2.5. Otras funciones

- La *tangente hiperbólica* es la función definida por

$$\tanh(z) = \frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$$

que resulta ser holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{(\frac{\pi}{2} + k\pi)i : k \in \mathbb{Z}\}$

- La *tangente* es la función definida por

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$$

que resulta ser holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$.

- Dado $\alpha \in \mathbb{C}$, el *valor principal de la función potencia* está dado por

$$z^\lambda = \exp(\lambda \log(z)),$$

el cual es una función holomorfa en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Un caso particular importante es el valor principal de la raíz cuadrada:

$$\sqrt{z} = z^{1/2} = \sqrt{|z|} e^{i \arg(z)/2}.$$

3.3. Ejercicios

1. Sabiendo que la serie $S(z) = \sum c_k (z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $R_0 > 0$, determine el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\sum c_k (z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k} (z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2 (z - z_0)^k.$$

2. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando $|z| = 1$:

$$\sum z^k, \quad \sum \frac{z^k}{k}, \quad \sum \frac{z^k}{k^2}.$$

3. Pruebe que:

$$a) \quad \frac{1}{z^2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)(z+1)^k, \text{ cuando } |z+1| < 1.$$

$$b) \quad \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (k+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^k, \text{ cuando } |z-2| < 2.$$

4. Pruebe que:

$$a) \quad \begin{aligned} \operatorname{sen}(iz) &= i \operatorname{senh}(z), \quad \operatorname{senh}(iz) = i \operatorname{sen}(z), \\ \cos(iz) &= \cosh(z), \quad \cosh(iz) = \cos(z). \end{aligned}$$

$$b) \quad \overline{\operatorname{sen}(z)} = \operatorname{sen}(\overline{z}), \quad \overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z}).$$

$$c) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} \operatorname{sen}(x + iy) = \frac{1}{2} [\operatorname{sen} x + i \cos x].$$

$$d) \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \tan(x + iy) = i.$$

5. Demostrar que $f(z) = \exp(z^2) + \cos(z)$ es holomorfa y encontrar su serie de potencias.

6. Considere la serie $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ con $a_k = 2$ si k es par y $a_k = 1$ si k es impar. Determine el radio de convergencia R de esta serie y pruebe que ella converge para $|z| < R$ y diverge para $|z| \geq R$. Compruebe que para $|z| < R$ se tiene

$$S(z) = \frac{2+z}{1-z^2}.$$

7. Dado $\lambda \in \mathbb{C}$, definimos $p^\lambda : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$p^\lambda(z) = \exp(\lambda \log(z)), \quad z \neq 0.$$

(i) Muestre que $p^i(i) = e^{-\pi/2}$ y que para todo $k \in \mathbb{Z}$, $p^k(z) = z^k$.

(ii) Dado $\lambda = \alpha + i\beta$, pruebe que para todo $t > 0$ real,

$$p^\lambda(t) = t^\alpha [\cos(\beta \log t) + i \sin(\beta \log t)].$$

(iii) Dados $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, verifique que $p^{\lambda+\mu}(z) = p^\lambda(z) \cdot p^\mu(z)$. Determine además el dominio donde $p^\lambda(z)$ es holomorfa y pruebe que

$$(p^\lambda)'(z) = \lambda p^{\lambda-1}(z).$$

Nota: todo lo anterior justifica que la función $p^\lambda(z)$ se llame función potencia generalizada y que se denote más simplemente por z^λ . Así, en (i) se probó que $i^i = e^{-\pi/2}$.

Capítulo 4

Integral en el plano complejo

4.1. Definición

Un *camino* Γ en \mathbb{C} es una curva regular por trozos parametrizada por una función continua y diferenciable por trozos $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$. Se dice que el camino Γ es *cerrado* si $\gamma(a) = \gamma(b)$. En algunas ocasiones, denotaremos por γ^* a la curva Γ como conjunto imagen de $[a, b]$ vía la parametrización γ , es decir

$$\gamma^* = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}.$$

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Dado un camino $\Gamma \subseteq \Omega$ parametrizado por $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$, definimos la integral compleja de f sobre Γ mediante

$$\int_{\Gamma} f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt.$$

Cuando Γ es un camino cerrado se suele escribir

$$\oint f(z)dz,$$

para denotar la integral de f sobre Γ .

Más explícitamente, tenemos que si $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ y $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, entonces se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z)dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t))\dot{x}(t) - v(x(t), y(t))\dot{y}(t)]dt \\ &\quad + i \int_a^b [u(x(t), y(t))\dot{y}(t) + v(x(t), y(t))\dot{x}(t)]dt. \end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r}.$$

Esto muestra que $\int_{\Gamma} f(z)dz$ se calcula a partir de dos integrales de trabajo sobre Γ , vista esta última como una curva en \mathbb{R}^2 .

En particular resulta que la integral compleja es invariante bajo reparametrizaciones regulares de Γ que preservan la orientación; en caso que dos parametrizaciones regulares del camino Γ lo recorran en sentido opuesto, el valor de la integral sólo cambia de signo.

4.2. Propiedades y ejemplos

La siguiente proposición resume algunas de las principales propiedades de la integral compleja.

Proposición 4.2.1. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino parametrizado por $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$. Se tiene:*

$$1. \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \forall f, g \in C(\Omega)$$

$$\int_{\Gamma} [\alpha f(z) + \beta g(z)]dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z)dz + \beta \int_{\Gamma} g(z)dz.$$

$$2. \quad \forall f \in C(\Omega)$$

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq L(\Gamma) \sup_{z \in \Gamma} |f(z)|,$$

donde $L(\Gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|dt$ es la longitud del camino Γ .

$$3. \quad \text{Si } f \in C(\Omega) \text{ admite primitiva, i.e. } \exists F \in H(\Omega) \text{ tal que } F'(z) = f(z), \text{ entonces}$$

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

y en consecuencia el valor de la integral sólo depende de los extremos del camino pero no de la trayectoria recorrida. En particular, si Γ es un camino cerrado entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 0.$$

1. Directo.
2. Comencemos por observar que si $H(t) = U(t) + iV(t)$ entonces

$$\left| \int_a^b H(t) dt \right| = \left| \int_a^b U(t) dt + i \int_a^b V(t) dt \right| \leq \int_a^b |H(t)| dt.$$

En efecto, sean r_0 y θ_0 tales que $r_0 e^{i\theta_0} = \int_a^b H(t) dt$, de modo que $r_0 = \left| \int_a^b H(t) dt \right|$.

Luego,

$$r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b H(t) dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} H(t) dt,$$

y dado que r_0 es real,

$$\begin{aligned} r_0 = \operatorname{Re} \int_a^b e^{-i\theta_0} H(t) dt &= \int_a^b \operatorname{Re}[e^{-i\theta_0} H(t)] dt \\ &\leq \int_a^b |\operatorname{Re}[e^{-i\theta_0} H(t)]| dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-i\theta_0} H(t)| dt \\ &= \int_a^b |H(t)| dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $|e^{-i\theta_0}| = 1$, probando así nuestra primera afirmación. Utilizando lo anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\dot{\gamma}(t)| dt \leq \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| \int_{\Gamma} |\dot{\gamma}(t)| dt \\ &= \sup_{z \in \Gamma} |f(z)| L(\Gamma). \end{aligned}$$

3. Sea F tal que $F' = f$. Entonces

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b F'(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} [F(\gamma(t))] dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Como consecuencia tenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.2.1. *Si Γ es un camino cerrado en \mathbb{C} y $z_0 \notin \Gamma$ entonces*

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^k dz = 0 \text{ para todo } k \neq -1.$$

Demostración. Basta con observar que si $k \neq -1$ entonces $F'(z) = (z - z_0)^k$ con

$$F(z) = \frac{1}{k+1} (z - z_0)^{k+1}.$$

□

En el caso $k = -1$ se tiene un problema cuando el camino encierra al punto z_0 pues $\log(z - z_0)$ es primitiva de $(z - z_0)^{-1}$ pero sólo para $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0 + \mathbb{R}_-\}$ y por lo tanto no podemos aplicar la proposición 4.2.1 cuando $\Gamma \cap \{z_0 + \mathbb{R}_-\} \neq \emptyset$ como en la figura 4.1.

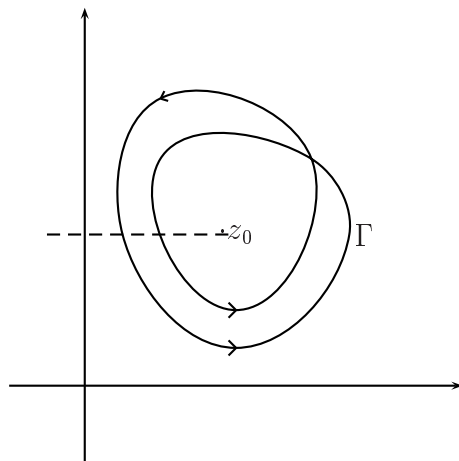


Figura 4.1: Camino cerrado en torno a un punto

Definición 4.2.1. *Dado $z_0 \notin \Gamma$ con Γ un camino cerrado, se define la indicatriz de Γ en z_0 mediante*

$$Ind_{\Gamma}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Para evaluar $Ind_{\Gamma}(z_0)$, parametricemos Γ en coordenadas polares relativas a un origen en el punto z_0 mediante

$$\gamma(t) = z_0 + r(t)e^{i\theta(t)}, \quad t \in [a, b],$$

para algunas funciones $t \in [a, b] \mapsto r(t) > 0$ y $t \in [a, b] \mapsto \theta(t) \in \mathbb{R}$. Luego

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{r(t)e^{i\theta(t)}} [\dot{r}(t)e^{i\theta(t)} + \dot{r}(t)ie^{i\theta(t)}\dot{\theta}(t)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\int_a^b \frac{\dot{r}(t)}{r(t)} dt + i \int_a^b \dot{\theta}(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left[\ln \left(\frac{r(b)}{r(a)} \right) + i[\theta(b) - \theta(a)] \right] \end{aligned}$$

Como la curva es cerrada $r(a) = r(b)$ de modo que $\ln(r(b)/r(a)) = \ln(1) = 0$ y así

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\Gamma}(z_0) &= \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi} \\ &= \text{número de vueltas de } \Gamma \text{ en torno a } z_0 \text{ en sentido antihorario.} \end{aligned}$$

Un ejemplo de los valores que puede tomar la indicatriz de una curva cerrada se ilustra en la figura 4.2

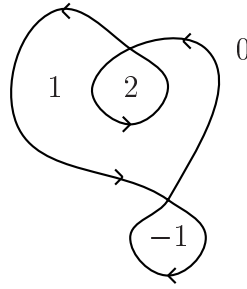


Figura 4.2: Función indicatriz de una curva cerrada

En el caso de una función que es expresable como una serie de potencias en un disco se tiene:

Corolario 4.2.2. *Para una serie de potencias*

$$S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

con radio de convergencia R se tiene

$$\oint_{\Gamma} S(z) dz = 0$$

para todo camino cerrado Γ contenido en $D(z_0, R)$.

Demostración. Basta con observar que la serie de potencias $S(z)$ tiene como primitiva en $D(z_0, R)$ a la función

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k+1} (z - z_0)^{k+1}.$$

□

Resultados como el corolario 4.2.2 pueden ser muy útiles para evaluar integrales reales en base a métodos de variable compleja. El siguiente ejemplo es una ilustración célebre de esta clase de técnica.

Ejemplo 4.2.1 (Integrales de Fresnel).

Las siguientes identidades se conocen como las *integrales de Fresnel*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(x^2) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (4.1)$$

Para probar (4.1) tomemos $R > 0$ y consideremos el camino

$$\Gamma(R) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$

tal como se ilustra en la figura 4.3.

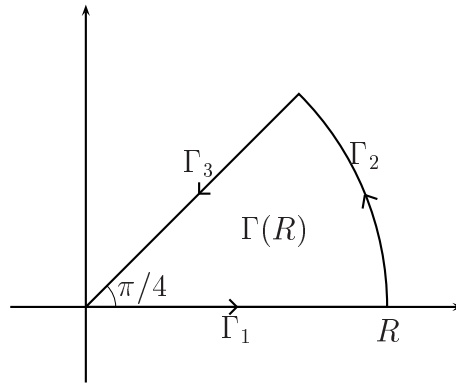


Figura 4.3: Camino para las integrales de Fresnel

Consideremos la función

$$f(z) = \exp(iz^2).$$

Como se trata de la función exponencial, la cual se define como una serie de potencias de radio de convergencia infinito, compuesta con el polinomio $p(z) = iz^2$, se deduce que $f(z)$ admite un desarrollo en serie de potencias, cuyo radio de convergencia también es infinito.

Luego,

$$\oint_{\Gamma(R)} \exp(iz^2) dz = 0. \quad (4.2)$$

Por otra parte,

$$\oint_{\Gamma(R)} \exp(iz^2)dz = \int_{\Gamma_1} \exp(iz^2)dz + \int_{\Gamma_2} \exp(iz^2)dz + \int_{\Gamma_3} \exp(iz^2)dz.$$

Estudiemos el comportamiento de cada una de estas integrales cuando $R \rightarrow \infty$:

■ Tenemos

$$\int_{\Gamma_1} \exp(iz^2)dz = \int_0^R \exp(ix^2)dx = \int_0^R \cos(x^2)dx + i \int_0^R \sin(x^2)dx,$$

luego

$$\int_{\Gamma_1} \exp(iz^2)dz \rightarrow \int_0^\infty \cos(x^2)dx + i \int_0^\infty \sin(x^2)dx, \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

■ Tenemos

$$\int_{\Gamma_3} \exp(iz^2)dz = \int_R^0 \exp(ir^2 e^{i\pi/2})e^{i\pi/4}dr = -e^{i\pi/4} \int_0^R e^{-r^2}dr,$$

luego

$$\int_{\Gamma_3} \exp(iz^2)dz \rightarrow -e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{1}{2}(\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}), \text{ cuando } R \rightarrow \infty.$$

■ Finalmente

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_2} \exp(iz^2)dz \right| &= \left| \int_0^{\pi/4} \exp(iR^2 e^{2i\theta}) R i e^{i\theta} d\theta \right| \\ &= R \left| \int_0^{\pi/4} e^{iR^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)} e^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\theta} d\theta \\ &\leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \frac{2}{\pi} 2\theta} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{4R} e^{-\left(\frac{4R^2 \theta}{\pi}\right)} \Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\pi}{4R} [1 - e^{-R^2}] \rightarrow 0, \text{ cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Para la segunda desigualdad hemos usado que

$$\forall \alpha \in [0, \pi/2], \quad \sin \alpha \geq 2\alpha/\pi.$$

Por lo tanto, haciendo $R \rightarrow \infty$ en (4.2) se obtiene

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \int_0^\infty \sin(x^2) dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

y por un argumento de paridad se deduce que se tiene (4.1).

4.3. El teorema de Cauchy-Goursat

Una pregunta interesante es saber si un resultado similar al corolario 4.2.2 es cierto pero sólo bajo el supuesto que f es holomorfa en un dominio Ω , sin saber *a priori* si es o no expresable como una serie de potencias. Un resultado fundamental de la teoría de funciones de variable compleja establece que esto es así siempre que se asuma una propiedad adicional sobre el dominio.

Definición 4.3.1. *Un subconjunto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ abierto y conexo por caminos se dice que es simplemente conexo si todo camino cerrado contenido en Ω encierra solamente puntos de Ω .*

Dicho de otra forma, un conjunto simplemente conexo no tiene *agujeros*.

Definición 4.3.2. *Un camino cerrado simple es un camino que genera dos conjuntos disjuntos abiertos y conexos, uno acotado y el otro no acotado, y ambos conjuntos tienen al camino como frontera.*

En otros términos, un camino cerrado simple es aquél que siendo cerrado no se corta a sí mismo.

Teorema 4.3.1 (Cauchy-Goursat). *Si f es una función holomorfa en un abierto simplemente conexo Ω entonces*

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

para todo camino cerrado y simple Γ contenido en Ω .

Demostración. Para simplificar, sólo daremos la demostración en el caso en que se supone además que $f'(z)$ es continua¹ en Ω . Sea $D \subseteq \mathbb{C}$ la región encerrada por el camino Γ . Si $f = u + iv$ entonces se tiene que

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} f(z)dz &= \oint_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} + i \oint_{\Gamma} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot d\vec{r} \\ &= \iint_D \underbrace{\left[\frac{\partial(-v)}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right]}_0 dx dy + i \iint_D \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right]}_0 dx dy,\end{aligned}$$

esto último en virtud del teorema de Green en el plano (suponiendo que Γ se recorre en sentido antihorario), el cual se puede aplicar pues las derivadas parciales de u y v son continuas. Finalmente, de las condiciones de Cauchy-Riemann se deduce que los integrandos de las dos integrales dobles son nulos en D , lo que prueba el resultado. \square

Observación. El teorema 4.3.1 fue demostrado originalmente por A. Cauchy bajo la hipótesis adicional de que $f'(z)$ es continua en Ω , lo que asumimos en la demostración sólo para simplificar el análisis pues nos permite aplicar directamente el teorema de Green en el plano.

Es generalmente reconocido que el primero en dar una demostración sin asumir la continuidad de $f'(z)$ fue E. Goursat. Esto último es muy importante pues nos permitirá probar que toda función holomorfa es expresable, al menos localmente, como una serie de potencias (ver el teorema 5.2.1).

El resultado anterior puede extenderse a situaciones más generales. Un ejemplo lo constituye el siguiente teorema:

Teorema 4.3.2. *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto y conexo, y consideremos*

$$f : \Omega \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

una función holomorfa, donde $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \Omega$. Sea $\Gamma \subseteq \Omega$ un camino cerrado, simple y recorrido en sentido antihorario y sea D la región encerrada por Γ . Supongamos que $\{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq D \subseteq \Omega$ y escojamos $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño de modo tal que los discos cerrados $\overline{D}(p_j, \varepsilon)$ estén contenidos en D y no se intersecten entre sí. Sea $\gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$. Entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz$$

Demostración. Para $\varepsilon > 0$ como en el enunciado, definamos

$$D_{\varepsilon} = D \setminus \bigcup_{i=1}^n \overline{D}(p_j, \varepsilon).$$

¹Para una demostración en el caso general el lector puede referirse por ejemplo a *Teoría de Funciones de Variable Compleja*, R.V. Churchill, McGraw-Hill, New York, 1966.

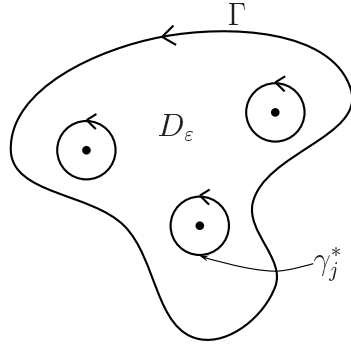


Figura 4.4: Curva cerrada que encierra circunferencias

Introduzcamos un segmento rectilíneo $L_1 \subseteq D_\varepsilon$, o en caso de ser necesario una cadena continua y finita de tales segmentos, que una el camino Γ con γ_1^* . Similarmente, sea $L_2 \subseteq D_\varepsilon$ otro segmento (o cadena) rectilíneo que una γ_1^* con γ_2^* , y así sucesivamente hasta L_{n+1} uniendo γ_n^* con Γ .

De este modo, podemos dividir D_ε en dos subdominios simplemente conexos D'_ε y D''_ε donde f es holomorfa, los cuales corresponden a regiones encerradas por los segmentos L_j y arcos de Γ y γ_j^* . Sobre ambos dominios podemos aplicar el teorema de Cauchy-Goursat para f , para deducir que

$$\oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz = 0 = \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz,$$

donde $\partial D'_\varepsilon$ y $\partial D''_\varepsilon$ denotan los caminos que encierran a D'_ε y D''_ε respectivamente. En particular, la suma de estas integrales es nula, y si ambos caminos se recorren en sentido antihorario entonces las integrales en sentidos opuestos a lo largo de los segmentos L_j se cancelan mutuamente.

Luego, si denotamos por $(\gamma_j^*)^-$ el camino γ_j^* recorrido en sentido horario, se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial D'_\varepsilon} f(z)dz + \oint_{\partial D''_\varepsilon} f(z)dz \\ &= \oint_{\Gamma} f(z)dz + \sum_{j=1}^n \oint_{(\gamma_j^*)^-} f(z)dz + \text{Integrales sobre los } L_j \text{'s} \\ &= \oint_{\Gamma} f(z)dz - \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz, \end{aligned}$$

lo que prueba el teorema. □

4.4. Ejercicios

1. Calcule directamente el valor de las siguientes integrales:

$$\int_{[0, z_0]} \operatorname{Re}(z) dz, \quad \int_{|z|=1} \operatorname{Im}(z) dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}, \quad \int_{|z|=1} \bar{z}^n dz$$

2. Pruebe que la función $z \rightarrow z \log(z)$ tiene una primitiva en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$, y calcule el valor de la integral

$$\int_{[0, i]} z \log(z) dz$$

3. Pruebe que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{z}{z^3 + 1} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, -R+i]} \frac{z^2 \exp(z)}{z + 1} dz = 0$$

4. Pruebe que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx) dx &= e^{-b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\ \int_0^\infty e^{-x^2} \sin(2bx) dx &= e^{-b^2} \int_0^b e^{x^2} dx \end{aligned}$$

Ind.: Integre $f(z) = \exp(-z^2)$ en un contorno rectangular adecuado.

5. a) Pruebe que para $b \in]-1, 1[$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1 - b^2 + x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Indicación: Integre $f(z) = \frac{1}{1 + z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.

- b) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2 x^2} dx = \frac{1}{4b} \ln \frac{1 + b}{1 - b}$$

6. Pruebe que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \operatorname{Im}(e^{-2ix} p(x + i)) dx = 0$$

para cualquier polinomio $p(z)$ a coeficientes reales.

Indicación: Considere $f(z) = \exp(-z^2)p(z)$.

Capítulo 5

Fórmula de Cauchy y consecuencias

5.1. La fórmula de Cauchy

El siguiente resultado, que básicamente es una consecuencia del teorema 4.3.1 de Cauchy-Goursat, es fundamental para el desarrollo de la teoría de funciones de variable compleja.

Teorema 5.1.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in D(p, r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz,$$

donde $\partial D(p, r)$ es la circunferencia de centro p y radio $r > 0$ recorrida en sentido antihorario.

Demostración. Supongamos $z_0 \neq p$ (el caso $z = p$ es análogo y se deja como ejercicio al lector). En virtud del teorema 4.3.2, que a su vez es una consecuencia del teorema 4.3.1, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño se tiene

$$\oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\partial D(p, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (5.1)$$

La primera integral del lado derecho tiende a 0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$; en efecto, por la Proposición 4.2.1 se tiene

$$\left| \oint_{\partial D(p, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq 2\pi\varepsilon \sup_{z \in \partial D(p, \varepsilon)} \frac{|f(z)|}{|z - z_0|} \leq 2\pi M\varepsilon,$$

donde $M = \sup\{|f(z)|/|z - z_0| : z \in \partial D(p, \varepsilon)\}$ es finito debido a la continuidad de f y a que z_0 no pertenece al conjunto cerrado $\partial D(p, \varepsilon)$ de modo que $\exists \alpha > 0$, $\forall z \in \partial D(p, \varepsilon)$, $|z - z_0| \geq \alpha$.

Por otra parte, para la segunda integral del lado derecho en (5.1) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt \\ &= \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) i dt. \end{aligned}$$

De la continuidad de f se deduce que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) i dt = 2\pi f(z_0). \quad (5.2)$$

En efecto, dado $\eta > 0$, la continuidad de f en z_0 permite asegurar que existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| \leq \delta$ entonces $|f(z) - f(z_0)| < \eta$. Luego, si $\varepsilon \leq \delta$ entonces $|z_0 + \varepsilon e^{it} - z_0| = \varepsilon \leq \delta$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) i dt - 2\pi f(z_0) \right| &= \left| \int_0^{2\pi} [f(z_0 + \varepsilon e^{it}) - f(z_0)] i dt \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |f(z_0 + \varepsilon e^{it}) - f(z_0)| dt \\ &\leq 2\pi\eta, \end{aligned}$$

y como $\eta > 0$ es arbitrario, esto implica que se tiene (5.2).

Finalmente, observando que el lado izquierdo en (5.1) no depende de ε y haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ en esta igualdad se obtiene

$$\oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(z)}{z - p} dz = 2\pi i f(p),$$

lo que prueba el resultado. □

5.2. Desarrollo en serie de Taylor

Teorema 5.2.1. *Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua en un abierto Ω y holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{D}(p, r) \subseteq \Omega$. Entonces existe una sucesión de constantes $c_0, c_1, c_2, \dots \in \mathbb{C}$ tales que*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - p)^k, \quad \forall z \in D(p, r),$$

y más aún

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw,$$

donde $\partial D(p, r)$ está parametrizado en sentido antihorario.

Demostración. Dado $z \in D(p, r)$, en virtud de la fórmula de Cauchy se obtiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-p}{w-p}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-p)^k}{(w-p)^{k+1}} dw \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}} dw \right) (z-p)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-p)^k. \end{aligned}$$

El intercambio $\int \sum = \sum \int$ se justifica como sigue

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\partial D} \sum_{k=0}^{\infty} (\%) - \sum_{k=0}^N \oint_{\partial D} (\%) \right| &= \left| \oint_{\partial D} \sum_{k=N+1}^{\infty} (\%) \right| \\ &\leq 2\pi r \sup_{w \in \partial D} \left| \sum_{N+1}^{\infty} \frac{f(w)(z-p)^k}{(w-p)^{k+1}} \right| \\ &\leq 2\pi r \underbrace{\sup_{w \in \partial D} |f(w)|}_M \cdot \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|z-p|^k}{r^{k+1}} \\ &\leq 2\pi M \sum_{N+1}^{\infty} \left(\frac{|z-p|}{r} \right)^k \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Esto último se tiene pues se trata de la *cola* de la serie geométrica $\sum a^k$ con $a = |z-p|/r < 1$ pues $z \in D(p, r)$.

Finalmente, la igualdad $f^{(k)}(p) = k!c_k$ es consecuencia de que la serie se puede derivar término a término y luego evaluar en $z = p$ de manera iterativa (ver el teorema 3.1.1 y el corolario 3.1.1). \square

Corolario 5.2.1. Si $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua en un abierto Ω , y holomorfa en Ω salvo en a lo más un número finito de puntos, entonces f es holomorfa en todo Ω y, más aún, f es infinitamente derivable en Ω .

5.3. Otras consecuencias

Corolario 5.3.1 (Desigualdades de Cauchy). Sea Ω abierto, $f \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{D}(p, r) \subseteq \Omega$. Si definimos $M_r = \sup_{\partial D(p, r)} |f(z)|$ entonces

$$\forall k \geq 0, \quad |f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! M_r}{r^k}$$

Demostración. Del teorema 5.2.1, se deduce que

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw$$

de modo que:

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(p)| &\leq \frac{k!}{2\pi} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{|f(w)|}{r^{k+1}} dw \leq \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(p + re^{i\theta})|}{r^{k+1}} |rie^{i\theta}| d\theta \\ &\leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{r^k} \int_0^{2\pi} |f(p + re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{k!}{2\pi} \frac{1}{r^k} M_r 2\pi = \frac{k! M_r}{r^k}. \end{aligned}$$

□

Corolario 5.3.2 (Teorema de Liouville). Si $f \in H(\mathbb{C})$ es una función acotada entonces f constante en \mathbb{C} .

Demostración. Por hipótesis, existe una constante $M > 0$ tal que $\forall z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq M$. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$. Dado $r > 0$, obviamente $\overline{D}(z_0, r) \subseteq \mathbb{C}$ que es la región en donde f es holomorfa. Por el corolario anterior, se tiene que para $k = 1$, $|f'(z_0)| \leq M/r$, pues $M_r = \sup_{z \in \partial D(z_0, r)} |f(z)| \leq M$. Como $r > 0$ es arbitrario, podemos hacer $r \rightarrow \infty$ para deducir que $|f'(z_0)| = 0$, y como z_0 también es arbitrario, tenemos que $f' \equiv 0$ en \mathbb{C} , de donde se sigue que f es constante. □

Corolario 5.3.3 (Teorema de d'Alembert o Teorema Fundamental del Algebra). Si f es un polinomio no constante entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. En consecuencia, todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces.

Demostración. La demostración de este resultado mediante métodos puramente algebraicos es algo dificultosa. Sin embargo, puede deducirse con relativa facilidad a partir del teorema de Liouville.

Argumentando por contradicción, supongamos que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) \neq 0$ con $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$. Obviamente $f \in H(\mathbb{C})$ y además podemos definir $g \in H(\mathbb{C})$ mediante $g(z) = 1/f(z)$. Si g fuese acotada entonces, por el teorema de Liouville, se tendría $g \equiv C$ para alguna constante $C \in \mathbb{C}$. Pero en tal caso, f también sería constante, lo que

contradice la hipótesis. Veamos ahora que efectivamente g es una función acotada bajo la condición $\forall z \in \mathbb{C}, f(z) \neq 0$; en efecto

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n} \\ &= \frac{1}{a_n z^n} \left(\frac{1}{\frac{b_0}{z^n} + \frac{b_1}{z^{n-1}} + \dots + \frac{b_{n-1}}{z} + 1} \right) \end{aligned}$$

donde $b_i = a_i/a_n, \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Notemos que $|g(z)| \rightarrow 0$ cuando $|z| \rightarrow \infty$. En particular, $\exists r > 0$ tal que $|z| > r \Rightarrow |g(z)| \leq 1$. Para $|z| \leq r$, notemos que g es continua de modo que es acotada en el compacto $\overline{D}(0, r)$. Tomando $M = \max\{1, \sup_{z \in \overline{D}(0, r)} |g(z)|\} < \infty$ se tiene que $\forall z \in \mathbb{C}, |g(z)| < M$.

El resto de la demostración es algebraica. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un polinomio de grado $n \geq 1$. Como f no es constante, se tiene que $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. Así, resulta que $(z - z_0)$ divide a f luego podemos escribir $f(z) = (z - z_0)f_1(z)$. Notemos que $f_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es necesariamente un polinomio de grado $n-1$. Si $n-1 > 0$, podemos aplicar el mismo razonamiento, para obtener un $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $f_1(z_1) = 0$. Ahora bien, $(z - z_1)$ divide a f_1 , de donde se tiene que $f_1 = (z - z_1)f_2$, y por consiguiente $f(z) = (z - z_0)(z - z_1)f_2(z)$. Repetimos el argumento n veces, hasta obtener una secuencia $\{z_i\}_{i \in \{0, 1, \dots, n-1\}}$ tal que $f(z) = (z - z_0)(z - z_1) \dots (z - z_{n-1})f_n(z)$. Notando que f_n es de grado 0, es decir $f_n \equiv \text{constante}$, se concluye el teorema. \square

5.4. Ejercicios

1. Pruebe que si $f \in H(D(z_0, R))$ entonces para todo $r \in]0, R[$ se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Deduzca que para $0 < r < 1$

$$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta}) d\theta = 0,$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2.$$

2. Pruebe que para todo $k \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^{\pi} e^{k \cos \theta} \cos(k\theta) d\theta = \pi.$$

3. Desarrollar $f(z) = \sinh z$ en serie de Taylor en torno al punto $z = \pi i$.

Capítulo 6

Teorema de los residuos

6.1. Puntos singulares, polos y residuos

Sea $f(z)$ una función de variable compleja. Se dice que $p \in \mathbb{C}$ es un *punto singular aislado* de $f(z)$ si existe un radio $R > 0$ tal que $f \in H(D(p, R) \setminus \{p\})$ pero f no es holomorfa en p .

Ejemplo 6.1.1. El complejo $p = 0$ es un punto singular aislado de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}.$$

□

Se dice que p es un *punto singular evitable* si, junto con ser punto singular aislado, el siguiente límite existe

$$L_0(p) = \lim_{z \rightarrow p} f(z).$$

Notemos que en este caso podemos extender la definición de f a todo el disco $D(p, R)$ de la siguiente forma:

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in D(p, R) \setminus \{p\}, \\ L_0(p) & \text{si } z = p. \end{cases}$$

La función \widehat{f} así definida coincide con f en $D(p, R) \setminus \{p\}$ y evidentemente es continua en todo $D(p, R)$. Como $f \in H(D(p, R) \setminus \{p\})$, por el corolario 5.2.1 se tiene $\widehat{f} \in H(\Omega)$. Esto justifica la terminología de punto singular evitable.

Ejemplo 6.1.2. El complejo $p = 0$ es un punto singular evitable de la función

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z},$$

pues de la serie de potencias de $\operatorname{sen} z$ se deduce que

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} = 1.$$

De este modo, la función $\widehat{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$\widehat{f}(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} z}{z} & \text{si } z \neq 0, \\ 1 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

es holomorfa en todo \mathbb{C} . Por otra parte, $p = 0$ es un punto singular no evitable de la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z}.$$

□

Se dice que $p \in \mathbb{C}$ es un *polo* de $f(z)$ si p es un punto singular aislado de $f(z)$ y además existe un entero $m \geq 1$ tal que el límite

$$L_m(p) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z)$$

existe y es no nulo, i.e. $L_m(p) \neq 0$. El menor $m \geq 1$ con dicha propiedad se llama *orden* del polo p . Diremos que p es un *polo simple* cuando sea un polo de orden $m = 1$.

Ejemplo 6.1.3. El complejo $p = 0$ es un polo simple de la función

$$f(z) = \frac{\cos z}{z},$$

pues

$$L_1(0) = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \frac{\cos z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = \cos(0) = 1.$$

□

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto abierto, p un punto en Ω y supongamos que $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Si p es un polo de $f(z)$ entonces p no puede ser un punto singular evitable de $f(z)$, pues en caso contrario se tendría

$$\lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m \lim_{z \rightarrow p} f(z) = 0L_0 = 0,$$

para todo entero $m \geq 1$, lo que contradice la definición de polo. Luego, un polo es una verdadera singularidad de la función en el sentido que no es posible *repararla* en p por continuidad.

Supongamos que p es un polo de $f(z)$ de orden $m \geq 1$. Si consideramos

$$g(z) = (z - p)^m f(z)$$

entonces p resulta ser un punto singular evitable de $g(z)$ y en consecuencia la función

$$\widehat{g}(z) = \begin{cases} (z - p)^m f(z) & \text{si } z \in \Omega \setminus \{p\}, \\ \lim_{z \rightarrow p} (z - p)^m f(z) & \text{si } z = p. \end{cases}$$

es holomorfa en todo Ω . De acuerdo al teorema 5.2.1, si $r > 0$ es tal que $\overline{D(p, r)} \subseteq \Omega$ entonces $\widehat{g}(z)$ admite una expansión en serie de Taylor en $D(p, r)$ y en particular se tiene

$$\forall z \in D(p, r) \setminus \{p\}, \quad (z - p)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{c}_k (z - p)^k,$$

donde

$$\begin{aligned} \widehat{c}_k &= \frac{\widehat{g}^{(k)}(p)}{k!} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{\widehat{g}(w)}{(w - p)^{k+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k-m+1}} dw, \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene para $f(z)$ el siguiente desarrollo en serie de potencias (con potencias negativas) para todo $z \in D(p, r) \setminus \{p\}$:

$$f(z) = \frac{\widehat{c}_0}{(z - p)^m} + \frac{\widehat{c}_1}{(z - p)^{m-1}} + \dots + \frac{\widehat{c}_{m-1}}{(z - p)} + R(z), \quad (6.1)$$

donde el resto

$$R(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \widehat{c}_k (z - p)^{k-m}$$

es una función holomorfa en $D(p, r)$ por tratarse de una serie de potencias usual. El desarrollo (6.1) puede escribirse como

$$\begin{aligned} f(z) &= c_{-m}(z - p)^{-m} + \dots + c_{-1}(z - p)^{-1} + c_0 + c_1(z - p) + \dots \\ &= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k (z - p)^k, \end{aligned}$$

donde para todo $k \geq -m$ se tiene

$$c_k = \widehat{c}_{k+m} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw.$$

Esto se trata de un caso particular de lo que se conoce como expansión en *serie de Laurent* de $f(z)$, la cual constituye una generalización de la serie de Taylor al caso de funciones con singularidades aisladas. En el caso más general, la serie de Laurent puede admitir infinitos términos no nulos asociados a potencias negativas (en lugar de sólo un número finito como ocurre en el caso de un polo), en cuyo caso decimos que se trata de una *singularidad esencial* de $f(z)$. En este apunte, no abordaremos el caso de singularidades esenciales.

Como veremos en la siguiente sección, el coeficiente \widehat{c}_{m-1} (o equivalentemente, el coeficiente c_{-1}) en el desarrollo de Laurent (6.1) de $f(z)$ en torno a p juega un rol muy importante en

la teoría de funciones de variable compleja. A este coeficiente se le llama *residuo de f en p* y se denota por $\text{Res}(f, p)$. Tenemos que

$$\text{Res}(f, p) = \frac{\widehat{g}^{(m-1)}(p)}{(m-1)!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D(p, r)} f(w) dw.$$

Una expresión para $\text{Res}(f, p)$ que es muy útil en cálculos específicos se obtiene al notar que todas las derivadas de \widehat{g} son continuas de modo tal que, recordando que $\widehat{g}(z) = (z-p)^m f(z)$ si $z \neq p$:

$$\boxed{\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-p)^m f(z)]},$$

donde $\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}$ denota la derivada de orden $m-1$.

6.2. El teorema de los residuos

Sea $f \in H(\Omega \setminus \{p\})$. Supongamos primero que p es un punto singular evitable de f , de modo que la extensión \widehat{f} de f a todo Ω por continuidad satisface $\widehat{f} \in H(\Omega)$. Si Ω es simplemente conexo y $\Gamma \subseteq \Omega \setminus \{p\}$ es un camino cerrado simple entonces podemos aplicar el teorema 4.3.1 de Cauchy-Goursat a \widehat{f} para deducir que

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (6.2)$$

donde hemos usado que \widehat{f} coincide con f en $\Omega \setminus \{p\}$ y que el camino Γ no pasa por p .

Supongamos ahora que p es un polo de f de orden m . Como en este caso no es posible extender f a todo Ω de modo que la extensión sea continua, nada asegura que (6.2) sea válido. De hecho, si suponemos que el camino cerrado simple Γ está contenido en $D(p, r) \setminus \{p\}$ con $r > 0$ de modo tal que el desarrollo (6.1) es válido para todo $z \in D(p, r) \setminus \{p\}$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \oint_{\Gamma} \left[\frac{\widehat{c}_0}{(z-p)^m} + \dots + \frac{\widehat{c}_{m-1}}{(z-p)} + R(z) \right] dz \\ &= \widehat{c}_{m-1} \oint_{\Gamma} \frac{1}{z-p} dz \\ &= \text{Res}(f, p) 2\pi i \text{Ind}_{\Gamma}(p) \\ &= 2\pi i \text{Res}(f, p), \end{aligned}$$

siempre que Γ se recorra en sentido antihorario. Esta propiedad explica el nombre de *residuo* dado al coeficiente \widehat{c}_{m-1} , y puede extenderse a situaciones más generales. Introduzcamos primero la siguiente definición.

Definición 6.2.1. Una función f se dice meromorfa en un abierto Ω si existe un conjunto $P \subseteq \Omega$ finito o numerable tal que

- (1) $f \in H(\Omega \setminus P)$.
- (2) f tiene un polo en cada punto $p \in P$.
- (3) P no posee puntos de acumulación.

Teorema 6.2.1 (de los residuos de Cauchy). *Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y sea P el conjunto de todos sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, que encierra una región $D \subseteq \Omega$ y tal que $\Gamma \cap P = \emptyset$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f , digamos $P \cap D = \{p_1, \dots, p_n\}$ y más aún*

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, p_j). \quad (6.3)$$

Demostración. Comencemos por notar que si bien P puede ser infinito, sabemos que D es acotado, y como P no tiene puntos de acumulación en Ω se sigue que $P \cap D$ es finito. Ahora bien, de acuerdo con el teorema 4.3.2, para $\varepsilon > 0$ pequeño se tiene

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{j=1}^n \oint_{\gamma_j^*} f(z)dz, \quad \gamma_j(t) = p_j + \varepsilon e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

En torno a cada polo p_j la función f admite un desarrollo del tipo (6.1) de modo tal que

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma_j} f(z)dz &= \oint_{\gamma_j^*} \left[c_{-m_j}^j (z - p_j)^{-m_j} + \dots + c_{-1}^j (z - p_j)^{-1} + R_j(z) \right] dz \\ &= c_{-1}^j \oint_{\gamma_j^*} \frac{1}{z - p_j} dz \\ &= 2\pi i \text{Res}(f, p_j), \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado. □

6.3. Ejemplos

Una primera regla de cálculo sencilla para evaluar el residuo de una función de la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

que tiene un **polo simple** en p , donde $g(p) \neq 0$ y $h(p) = 0$ consiste en la fórmula

$$\text{Res} \left(\frac{g(z)}{h(z)}, p \right) = \frac{g(p)}{h'(p)}. \quad (6.4)$$

La demostración de (6.4) es directa de la definición de residuo con orden $m = 1$ por ser p un polo simple.

Ejemplo 6.3.1. *Calcular:*

$$\oint_{\partial D(0,2)} \frac{1}{1+z^2} dz.$$

Solución. Comencemos por notar que los polos de

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

están dados por $p_1 = i$ y $p_2 = -i$, y ambos son polos simples y están encerrados por $\partial D(0, 2)$.

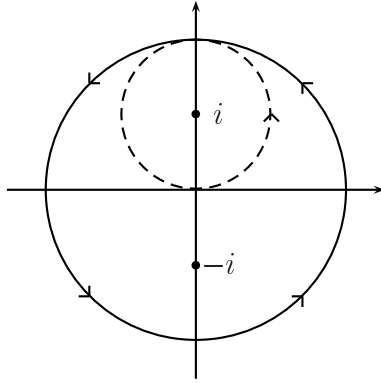


Figura 6.1: Circunferencia centrada en el origen

Los residuos correspondientes son:

$$\text{Res}(f, i) = \frac{1}{2i},$$

y

$$\text{Res}(f, -i) = -\frac{1}{2i}.$$

Luego

$$\oint_{\partial D(0,2)} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} \right] = 0.$$

Por otra parte, si consideramos la circunferencia centrada en i y de radio 1, entonces

$$\oint_{\partial D(i,1)} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \left[\frac{1}{2i} \right] = \pi.$$

□

Antes de ver otro ejemplo, demostremos el siguiente resultado que es bastante útil para el cálculo de polos y residuos.

Proposición 6.3.1 (Regla de l'Hôpital). Sean $f, g \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $n \geq 1$ tales que

$$g(p) = \dots = g^{(n-1)}(p) = 0 \neq g^{(n)}(p).$$

Entonces

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \text{no existe} & \text{si } f^{(k)}(p) \neq 0 \text{ para algún } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \\ \frac{f^{(n)}(p)}{g^{(n)}(p)} & \text{si } f^{(k)}(p) = 0 \text{ para todo } k \in \{0, 1, \dots, n-1\} \end{cases}$$

Demostración. Consideremos el desarrollo de Taylor de g en torno a p

$$g(z) = \sum_{k \geq n} \frac{g^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^k = \frac{g^{(n)}(p)}{n!} (z-p)^n + \frac{g^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} (z-p)^{n+1} + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow p} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(p)}{k!} (z-p)^{k-n}}{\frac{g^{(n)}(p)}{n!} + \frac{g^{(n+1)}(p)}{(n+1)!} (z-p) + \dots}$$

El denominador tiende hacia $\frac{g^{(n)}(p)}{n!}$. El numerador sólo converge cuando $f^{(k)}(p) = 0$ para todo $k < n$, y en tal caso tiende a $\frac{f^{(n)}(p)}{n!}$, lo que permite concluir. \square

Ejemplo 6.3.2. *Evaluar*

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z \operatorname{sen} z},$$

donde Γ es el camino de la figura 6.2.

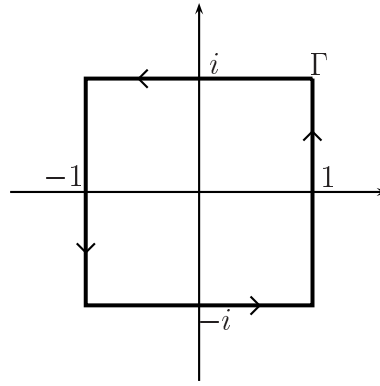


Figura 6.2: Cuadrado centrado en el origen

Solución. La función

$$f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen} z}$$

tiene como candidatos a ser polos todos los puntos del tipo $p_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Si $k = 0$ entonces $p_0 = 0$ es polo de orden 2; en efecto

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^2 f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{\operatorname{sen} z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\cos z} = 1,$$

mientras que el limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} z f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} z}$$

no existe. Si $k \neq 0$ entonces p_k no pertenece a la región encerrada por Γ , y por lo tanto estos puntos no son relevantes para el cálculo de la integral.

Residuo:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{1!} \frac{d^1}{dz^1} (z^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{\sin z} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z \cos z}{\sin^2 z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z - \cos z + z \sin z}{2 \sin z \cos z} = 0. \end{aligned}$$

Luego

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z \sin z} = 0.$$

Notemos que en este caso el residuo resultó ser 0, lo que no es posible cuando el polo es simple.

□

Ejemplo 6.3.3. Calcular

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3}{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2} dz,$$

donde Γ es el camino de la figura 6.3.

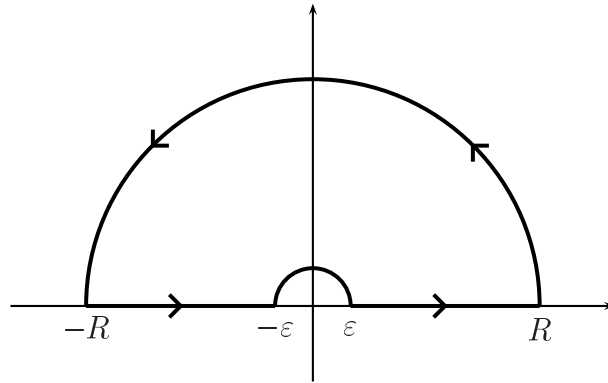


Figura 6.3: Camino que evita al origen

Solución. Para determinar los polos de la función

$$f(z) = \frac{z^3}{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2},$$

veamos donde se anula el denominador:

$$\begin{aligned} e^{3iz} - 3 \underbrace{e^{iz}}_w + 2 &= 0 \Leftrightarrow w^3 - 3w + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (w - 1)^2(w + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow w = 1 \text{ o bien } w = -2 \\ &\Leftrightarrow iz = \log(1) \text{ o bien } iz = \log(-2) = \ln 2 + i\pi \\ &\Leftrightarrow z = 0 \text{ o bien } z = \pi - i \ln 2. \end{aligned}$$

Como ninguno de estos puntos está encerrado por Γ , entonces

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

Si en lugar del camino anterior se considera la circunferencia centrada en el origen y de radio $R > 0$ suficientemente grande, entonces ambos puntos son relevantes.

- $p = 0$: desarrollando las exponenciales en serie de potencias se tiene

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z^3}{(1 + (3iz) + \frac{(3iz)^2}{2!} + \frac{(3iz)^3}{3!} + \dots) - 3(1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots) + 2} \\ &= \frac{z^3}{(-\frac{9}{2}z^2 - \frac{27}{6}iz^3 + \dots) - (-\frac{3}{2}z^2 - \frac{iz^3}{6} + \dots)} \\ &= \frac{z^3}{-3z^2 + o(z^2)} \rightarrow 0 \Rightarrow p = 0 \text{ no es polo.} \end{aligned}$$

- $p = \pi - i \ln 2$:

$$f(z) = \frac{z^3}{(e^{iz} - 1)^2(e^{iz} + 2)} = \frac{z^3}{(e^{iz} - 1)^2} \frac{1}{e^{iz} - e^{ip}},$$

luego

$$\lim_{z \rightarrow p} \frac{z^3}{(e^{iz} - 1)^2} \frac{z - p}{e^{iz} - e^{ip}} = \frac{p^3}{(e^{ip} - 1)^2} \frac{1}{ie^{ip}} = \frac{p^3}{9} \frac{1}{i(-2)} = \frac{i(\pi - i \ln 2)^3}{18} \neq 0,$$

de modo que $p = \pi - i \ln 2$ es un polo simple. En este caso, el residuo coincide con el límite que acabamos de calcular, es decir

$$\text{Res}(f, p) = \lim_{z \rightarrow p} (z - p) f(z) = \frac{i(\pi - i \ln 2)^3}{18},$$

y en consecuencia

$$\oint_{\partial D(0, R)} f(z) dz = -\frac{\pi}{9} (\pi - i \ln 2)^3.$$

□

Una consecuencia interesante del teorema de los residuos es la siguiente:

Proposición 6.3.2. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa y Γ una curva simple, cerrada y recorrida en sentido antihorario la cual encierra una región $D \subseteq \Omega$. Si f tiene un número finito de ceros al interior de D y no tiene ceros en Γ entonces

$$\text{Ind}_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \text{número total de ceros de } f \text{ en } D,$$

donde en este número se incluye la multiplicidad de los ceros.

Demostración. Tenemos que $f(\Gamma)$ es una curva cerrada que por hipótesis no pasa por 0, y que si Γ está parametrizada por $\gamma : [a, b] \rightarrow \Gamma$ entonces $f(\Gamma)$ lo está por $\gamma \circ f$. Luego,

$$\text{Ind}_{f(\Gamma)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(\Gamma)} \frac{1}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{1}{f(\gamma(t))} f'(\gamma(t)) \frac{d\gamma}{dt}(t) dt = \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Por otra parte, definamos

$$g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

y sea p un cero de f . Como f es holomorfa, podemos encontrar $r > 0$, $m \geq 1$ y una función $f_0(z)$ holomorfa en $D(p, r)$ tales que para todo $z \in D(p, r)$, $f(z) = (z-p)^m f_0(z)$ con $f_0(p) \neq 0$ (m es la multiplicidad de p). De este modo, para $z \in D(p, r)$ podemos escribir

$$g(z) = \frac{m(z-p)^{m-1} f_0(z) + (z-p)^m f_0'(z)}{(z-p)^m f_0(z)} = \frac{m}{z-p} + \frac{f_0'(z)}{f_0(z)},$$

y en consecuencia p es un polo simple de g y más aún $\text{Res}(g, p) = m$. Repitiendo esto para cada uno de los ceros de f , deducimos del teorema de los residuos que

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} g(z) dz = \sum_{p \in D} m_p = \text{número total de ceros de } f \text{ en } D.$$

□

6.4. Ejercicios

1. Probar que si $f(z) = (e^{kz} - 1)/z$ cuando $z \neq 0$ y $f(0) = k$ entonces $f \in H(\mathbb{C})$.
2. Determine los cinco primeros términos de la serie de Laurent de

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 1)}$$

en torno a $z_0 = 0$.

3. Explique por qué el residuo en un polo simple no puede ser 0.
4. Sea $p \in \mathbb{C}$ un polo de $g(z)$ y $h(z)$ y considere $f(z) = g(z) + h(z)$. Pruebe que

$$\text{Res}(f, p) = \text{Res}(g, p) + \text{Res}(h, p).$$

5. Considere una función de la forma

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$$

y asuma que $f(z)$ tiene un polo en $p \in \mathbb{C}$ con $g(z)$ y $h(z)$ funciones holomorfas en una vecindad de p . Suponga que

$$g(p) \neq 0, \quad h(p) = h'(p) = 0, \quad h''(p) \neq 0.$$

Verifique que necesariamente $f(z)$ tiene un polo de orden dos en p y pruebe que

$$\text{Res}(f, p) = \frac{2g'(p)}{h''(p)} - \frac{2}{3} \frac{g'(p)h'''(p)}{h''(p)^2}.$$

6. Calcular

$$\oint_{\gamma^*} f(z) dz$$

con $\gamma(\theta) = e^{-i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ para:

- a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ (Resp.: 0).
- b) $f(z) = \frac{(1-e^{2z})}{z^4}$ (Resp.: $\frac{8\pi i}{3}$).
- c) $f(z) = \frac{e^z}{2(z-1)^2}$ (Resp.: $-\pi i e$).
- d) $f(z) = \frac{z^2}{(1-z^4)}$ (Resp.: $-\frac{\pi i}{2}$).

Capítulo 7

Evaluación de integrales vía residuos

7.1. Integrales de funciones trigonométricas

Consideremos una integral definida del tipo:

$$\int_0^{2\pi} \frac{p(\cos \theta, \sin \theta)}{q(\cos \theta, \sin \theta)} d\theta, \quad (7.1)$$

donde p y q son polinomios. La resolución de este tipo de integrales mediante el uso de las técnicas del cálculo en \mathbb{R} resulta a menudo bastante engorrosa dado que aparecen cocientes de polinomios en $\sin \theta$ y $\cos \theta$. Sin embargo, el uso del teorema de los residuos simplifica de manera sustancial el tratamiento de estas expresiones, como veremos a continuación.

Proponemos el siguiente cambio de variables:

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = e^{i\theta} i d\theta.$$

Notando que

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} \end{aligned}$$

convertimos el integrando original en un cociente de polinomios, esta vez en z , de modo que (7.1) se transforma en una integral de contorno en el plano \mathbb{C} , la que puede evaluarse utilizando el teorema de los residuos.

Para ilustrar lo anterior, veamos un ejemplo:

Ejemplo 7.1.1. *Calcular*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta}.$$

Solución. Utilizando el cambio de variables propuesto, se tiene:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{2 + \frac{z-z^{-1}}{2i}} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2 + 4iz - 1}.$$

La fracción

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

tiene como polos simples a las raíces de la ecuación $z^2 + 4iz - 1 = 0$, las que resultan ser

$$\begin{aligned} z_1 &= -i(2 + \sqrt{3}), \\ z_2 &= -i(2 - \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Como $|-i(2 + \sqrt{3})| = 2 + \sqrt{3} > 1$ y $0 < |-i(2 - \sqrt{3})| = 2 - \sqrt{3} < 1$, sólo z_2 está encerrado por la curva $|z| = 1$. Veamos cuánto vale $\text{Res}(f, z_2)$:

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, z_2) &= \lim_{z \rightarrow z_2} (z - z_2)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_2} \frac{2}{z + i(2 + \sqrt{3})} \\ &= \frac{2}{-i(2 - \sqrt{3}) + i(2 + \sqrt{3})} = \frac{2}{2i\sqrt{3}} \\ &= -\frac{i}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Finalmente, por el teorema de los residuos

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin \theta} = 2\pi i \text{Res}(f, z_2) = 2\pi i \frac{-i}{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

El argumento anterior también es válido cuando se integran cuocientes de polinomios en $\cos n\theta$ y $\sin n\theta$ para $n > 1$ dado que estos pueden expresarse en términos de sumas de potencias de $z = e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned} \sin n\theta &= \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{z^n - z^{-n}}{2i}, \\ \cos n\theta &= \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} = \frac{z^n + z^{-n}}{2}. \end{aligned}$$

Ilustremos lo anterior mediante un ejemplo:

Ejemplo 7.1.2. *Calcular*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \sin \theta} d\theta.$$

Solución. Hacemos las sustituciones:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} \\ \cos 2\theta &= \frac{e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}}{2} = \frac{z^2 + z^{-2}}{2}\end{aligned}$$

así, tenemos

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{z^2+z^{-2}}{2}}{5 - \frac{2}{i}(z - z^{-1})} \cdot \frac{dz}{iz} = \oint_{|z|=1} \frac{(z^4 + 1)dz}{2iz^2(2iz^2 + 5z - 2i)}$$

Es claro que en $z = 0$ tenemos un polo de orden 2. Calculemos las raíces de $2iz^2 + 5z - 2i = 0$.

$$\begin{aligned}z_1 &= \frac{-5 + \sqrt{25 - 4 \cdot (2i) \cdot (-2i)}}{4i} = \frac{-5 + \sqrt{25 - 16}}{4i} = \frac{i}{2} \\ z_2 &= \frac{-5 - \sqrt{25 - 4 \cdot (2i) \cdot (-2i)}}{4i} = \frac{-5 - \sqrt{25 - 16}}{4i} = 2i\end{aligned}$$

Como $|z_1| = \frac{1}{2} < 1$ y $|z_2| = 2 > 1$, sólo nos interesa el residuo R_1 asociado a z_1 . Veamos cuánto vale R_1 :

$$\begin{aligned}R_1 &= \lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} (z - \frac{i}{2}) \frac{z^4 + 1}{2iz^2(2iz^2 + 5z - 2i)} \\ &= \lim_{z \rightarrow \frac{i}{2}} \frac{z^4 + 1}{2iz^2 \cdot 2i(z - 2i)} \\ &= \frac{(\frac{i}{2})^4 + 1}{2i(\frac{i}{2})^2 \cdot 2i(\frac{i}{2} - 2i)} \\ &= \frac{\frac{17}{16}}{\frac{-3i}{2}} = \frac{17}{16} \cdot \frac{2}{-3i} = \frac{17i}{24}\end{aligned}$$

Calculemos ahora el residuo R_2 del polo de orden 2 en $z = 0$.

$$\begin{aligned}R_2 &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[z^2 \frac{z^4 + 1}{2iz^2 \cdot (2iz^2 + 5z - 2i)} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{z^4 + 1}{2iz^2 + 5z - 2i} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{4z^3(2iz^2 + 5z - 2i) - (z^4 + 1)(4iz + 5)}{(2iz^2 + 5z - 2i)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \cdot \frac{5}{(-2i)^2} = \frac{5i}{8}\end{aligned}$$

Luego, por el teorema de los residuos:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4 \operatorname{sen} \theta} d\theta = 2\pi i (R_1 + R_2) = 2\pi i \left(\frac{17i}{24} + \frac{-5i}{8} \right) = \frac{-\pi}{6}.$$

□

7.2. Integrales impropias sobre dominios no acotados

En esta sección nos interesaremos en el problema de evaluar integrales impropias del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx,$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, o más generalmente $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Esta definición para la integral de $-\infty$ a ∞ , como el límite cuando $R \rightarrow \infty$ de las integrales definidas sobre los intervalos simétricos $[-R, R]$, se conoce como *valor principal de Cauchy* de la integral impropia.

En lo que sigue, supondremos que la función a integrar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ admite una extensión definida sobre todo el plano complejo mediante una función meromorfa (6.2.1), cuya restricción a \mathbb{R} coincide con la función original, y que denotamos simplemente por $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Definamos el *semiplano superior* mediante

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0\},$$

cuyo interior está dado por

$$\text{Int}(H) = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}.$$

El siguiente teorema es un primer resultado que permite evaluar una gran variedad de integrales impropias.

Teorema 7.2.1. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en \mathbb{C} y denotemos por P el conjunto de los polos de f . Supongamos que:*

- (a) *f no tiene polos en \mathbb{R} , es decir, $\mathbb{R} \cap P = \emptyset$.*
- (b) *f admite un número finito de polos en $\text{Int}(H)$, es decir, $\text{Int}(H) \cap P$ es un conjunto finito.*
- (c) *Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 1$ tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, |z| \geq M.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(f, z).$$

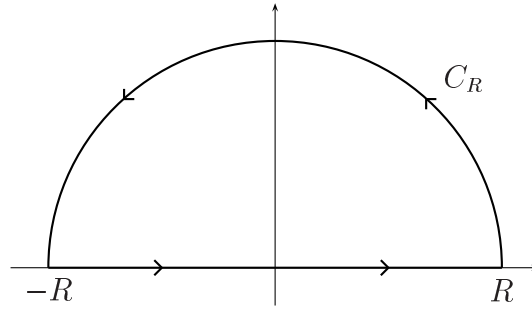


Figura 7.1: Arco de semicircunferencia

Demostración. Dado $R > 0$, denotemos por C_R el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, tal como se ilustra en la figura 7.1, de modo que su largo es $L(C_R) = \pi R$.

Por (a) y (b), para $R > 0$ suficientemente grande el camino C_R no pasa por ningún polo de f y, por (c), tenemos además la siguiente estimación:

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \sup_{z \in C_R} |f(z)| \cdot L(C_R) \leq \frac{K}{|Re^{i\theta}|^p} \pi R = \frac{K\pi}{R^{p-1}}.$$

Como $p > 1$, deducimos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Por otra parte, aplicando el teorema de los residuos 6.2.1 al camino cerrado y simple dado por $\Gamma_R = [-R, R] \cup C_R$ para R suficientemente grande de modo tal que Γ_R encierre todos los polos de f en $\text{Int}(H)$, se deduce

$$2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} = \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

Finalmente, tomando límite cuando $R \rightarrow \infty$ se obtiene

$$2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz \right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx,$$

lo que demuestra el teorema. \square

Un caso interesante para el cual es fácil verificar que se tienen las hipótesis del teorema 7.2.1 está dado por el siguiente resultado:

Corolario 7.2.1. Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que q no tiene ceros reales y además se tiene

$$\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 2. \quad (7.2)$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, \operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res} \left(\frac{p}{q}, z \right)$$

Demostración. Sea la función racional definida por $f(z) = p(z)/q(z)$. Dado que p y q son primos entre sí, los polos de $f(z)$ corresponden a los ceros de q , los que por hipótesis no son reales. Para aplicar el teorema 7.2.1, basta verificar que f satisface la condición de decaimiento (c). Para ver que esto es cierto, denotemos $n = \operatorname{grado}(p)$ y $m = \operatorname{grado}(q)$ y escribamos

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m} = \frac{z^n \left(\frac{a_0}{z^n} + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + a_n \right)}{z^m \left(\frac{b_0}{z^m} + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots + b_m \right)}$$

Pero

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| = |a_n|,$$

y similarmente

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^m} \right| = |b_m|.$$

Luego, para $|z|$ suficientemente grande, digamos $|z| \geq M$ para una constante $M > 0$ apropiada, se tiene

$$\left| a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right| \leq 2|a_n|$$

y

$$\left| b_m + \frac{b_{m-1}}{z} + \dots + \frac{b_0}{z^m} \right| \geq \frac{1}{2}|b_m|,$$

de donde se deduce que

$$\left| \frac{p(z)}{q(z)} \right| \leq \underbrace{\frac{4|a_n|}{|b_m|}}_K \cdot \frac{1}{|z|^p}$$

con $p := m - n \geq 2$ en virtud de (7.2).

□

Ejemplo 7.2.1. *Calcular*

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

Solución. En este caso, el integrando

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$$

es el cociente de los polinomios

$$p(z) = z^2$$

y

$$q(z) = 1 + z^4$$

evaluados en la variable real x . En primer lugar, la raíz de $p(z)$ es 0 de multiplicidad 2, mientras que las raíces de $q(z)$ están dadas por las soluciones de la ecuación $z^4 = -1$, es decir, por los complejos $e^{i\pi/4}$, $e^{i3\pi/4}$, $e^{-i\pi/4}$ y $e^{-i3\pi/4}$, de los cuales ninguno es real y sólo los dos primeros se encuentran en el semiplano superior H . Como $p(z)$ y $q(z)$ no tienen raíces comunes, éstos son primos entre sí y además $\text{grado}(q) = 4 = \text{grado}(p) + 2$. De este modo, se satisfacen las hipótesis del corolario 7.2.1. Deducimos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\pi/4} \right) + 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i3\pi/4} \right).$$

En este caso es fácil ver que $f(z) = (z^2/(1+z^4))$ tiene polos simples en $e^{i\pi/4}$ y $e^{i3\pi/4}$ de modo que los residuos pueden calcularse mediante la fórmula (6.4) para obtener:

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\pi/4} \right) = \frac{e^{i2\pi/4}}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4}e^{-i\pi/4},$$

y similarmente

$$\operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i3\pi/4} \right) = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx &= \frac{2\pi i}{4} [\cos(\pi/4) + \cos(3\pi/4) - i(\sin(\pi/4) + \sin(3\pi/4))] \\ &= \frac{2\pi i}{4} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right] \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, como $f(x) = x^2/(1+x^4)$ es una función par, deducimos que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

□

Para estudiar qué ocurre cuando el integrando $f(z)$ admite polos reales, necesitamos el siguiente resultado preliminar.

Proposición 7.2.1. Sea f meromorfa en un abierto Ω y $a \in \Omega$ un polo simple de f . Sea C_{r,θ_1,θ_2} la parametrización del arco de circunferencia de radio $\varepsilon > 0$ centrado en a cuyos límites son los ángulos θ_1 y θ_2 , es decir

$$C_{r,\theta_1,\theta_2}(\theta) = a + \varepsilon e^{i\theta}, \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2],$$

tal como se ilustra en la figura 7.2.

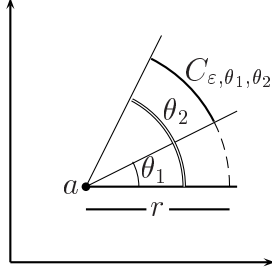


Figura 7.2: Segmento de arco de circunferencia

Entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}^*} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, a).$$

Demostración. Como f tiene un polo simple en a , entonces en torno a ese punto admite un desarrollo en serie de Laurent de la forma

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-a)^k}_{f_1(z)}, \quad |z-a| < \rho,$$

para algún radio $\rho > 0$ suficientemente pequeño y algunos coeficientes $(c_k) \subseteq \mathbb{C}$. Para $0 < \varepsilon < \rho$, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} f(z)dz &= c_{-1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\varepsilon e^{i\theta}} \varepsilon i e^{i\theta} d\theta + \underbrace{\int_{C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}} f_1(z)dz}_{A_\varepsilon} \\ &= i(\theta_2 - \theta_1) \operatorname{Res}(f, a) + A_\varepsilon \end{aligned}$$

donde

$$|A_\varepsilon| \leq M \cdot L(C_{\varepsilon,\theta_1,\theta_2}) = M\varepsilon(\theta_2 - \theta_1),$$

para alguna constante $M > 0$ que acota a $f_1(z)$ en una vecindad del punto a , esta constante existe pues $f_1(z)$ es holomorfa en $D(a, \rho)$. Luego, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene $A_\varepsilon \rightarrow 0$ y se deduce el resultado. \square

Teorema 7.2.2. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en \mathbb{C} y denotemos por P el conjunto de los polos de f . Supongamos que:

(a) f admite un número finito de polos reales simples, es decir,

$$\mathbb{R} \cap P = \{a_1, \dots, a_s\}$$

con a_j polo simple de f .

(b) f admite un número finito de polos en $\text{Int}(H)$, es decir, $\text{Int}(H) \cap P$ es un conjunto finito.

(c) Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 1$ tales que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, \quad |z| \geq M.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(f, z) + \pi i \sum_{j=1}^s \text{Res}(f, a_j).$$

Demostración. La demostración es análoga a la del teorema 7.2.1 tomando ahora un camino que evita los polos reales tal como se ilustra en la figura 7.3.

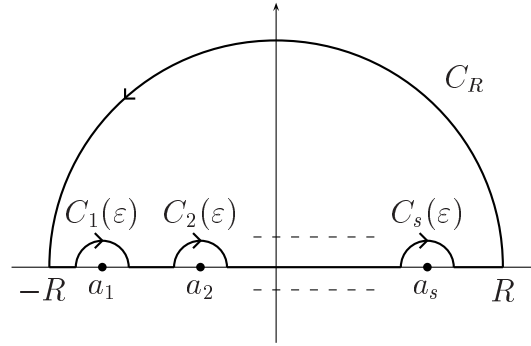


Figura 7.3: Camino que evita los polos reales

Por el teorema de los residuos, tenemos que para R suficientemente grande y $\varepsilon > 0$ pequeño:

$$\int_{I(R, \varepsilon)} f(x)dx + \sum_{j=1}^s \int_{C_j(\varepsilon)} f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(f, z), \quad (7.3)$$

donde

$$I(R, \varepsilon) = [-R, R] \setminus \bigcup_{j=1}^s]a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon[,$$

el camino $C_j(\varepsilon)$ es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma_j(t) = a_j + \varepsilon e^{i(\pi-t)}$, $t \in [0, \pi]$ y C_R es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = R e^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$.

Por la proposición 7.2.1

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_j(\varepsilon)} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res}(f, a_j),$$

y por el mismo argumento que en el teorema 7.2.1,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

Luego, haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$ en (7.3), se deduce que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx - \pi i \sum_{j=1}^s \operatorname{Res}(f, a_j) + 0 = 2\pi i \sum_{z \in \operatorname{Int}(H) \cap P} \operatorname{Res}(f, z),$$

de donde se sigue el resultado. \square

Una consecuencia de este último resultado es el siguiente:

Corolario 7.2.2. *Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que los ceros de q sobre el eje real, de existir, son simples, y se tiene además*

$$\operatorname{grado}(q) \geq \operatorname{grado}(p) + 2.$$

Entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = 2\pi i \sum_{q(z)=0, \operatorname{Im}(z)>0} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, z\right) + \pi i \sum_{q(a)=0, a \in \mathbb{R}} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, a\right).$$

Por otra parte, cuando se trata de evaluar integrales impropias de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos sx dx$$

o bien

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin sx dx$$

para $s > 0$ en general no es posible aplicar directamente los resultados anteriores a las funciones $f(z) \cos sz$ y $f(z) \sin sz$ respectivamente pues estas suelen no satisfacer la condición de decaimiento.

Esto se debe a que, por ejemplo, si explicitamos $\cos sz$ en términos de exponenciales

$$\cos sz = \frac{1}{2}(e^{isz} + e^{-isz}) = \frac{1}{2}(e^{-sy+isx} + e^{sy-isx})$$

vemos que cuando $R \rightarrow \infty$, las coordenadas imaginarias y de los puntos $z = x + iy \in C_R$ donde C_R es el arco de semicircunferencia considerado anteriormente (ver figuras 7.1 y 7.3), divergen a ∞ y en consecuencia el término e^{sy} si $s > 0$ crece exponencialmente. Luego, para que $f(z)\cos sz$ satisfaga la condición de decaimiento, la función $f(z)$ debe decaer a 0 más rápido que una exponencial, lo que deja fuera a todas las funciones racionales que se obtienen como cuocientes de polinomios.

Notemos que este inconveniente es consecuencia del término e^{-isz} que aparece en $\cos sz$, pues el otro término $e^{isz} = e^{-sy+isx}$ es muy favorable ya que decae exponencialmente a 0 cuando $y \rightarrow \infty$.

Por otra parte, si en lugar de considerar $f(z)\cos sz$ (resp. $f(z)\sin sz$), tomamos $f(z)e^{isz}$, que para una gran variedad de funciones $f(z)$ sí satisface la condición de decaimiento necesaria para que la integral de $f(z)e^{isz}$ sobre C_R tienda a 0 gracias al buen comportamiento de e^{isz} , entonces podemos calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx,$$

lo que resuelve el problema original pues

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sxdx + i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sxdx.$$

Más precisamente, tenemos el siguiente resultado

Teorema 7.2.3. *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en \mathbb{C} y denotemos por P el conjunto de los polos de f . Supongamos que:*

- (a) *f no tiene polos en \mathbb{R} , es decir, $\mathbb{R} \cap P = \emptyset$.*
- (b) *f admite un número finito de polos en $\text{Int}(H)$, es decir, $\text{Int}(H) \cap P$ es un conjunto finito.*
- (c) *Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 0$ tales que*

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, \quad |z| \geq M.$$

Entonces, para todo $s > 0$ se tiene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z)e^{isz}dz = 0, \tag{7.4}$$

donde C_R es el arco de semicircunferencia parametrizado por $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, $\theta \in [0, \pi]$, y en consecuencia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = 2\pi i \sum_{w \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(e^{isz}f(z), w).$$

Demostración. Una vez verificado (7.4), la demostración es esencialmente la misma que la del teorema 7.2.1. Para probar (7.4), comencemos por acotar la integral para $R > M$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{isz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{isRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta}) Rie^{i\theta} d\theta \right| \\ &\leq \int_0^\pi |e^{isRe^{i\theta}}| \cdot \frac{K}{R^p} R d\theta \\ &= \frac{KR}{R^p} \int_0^\pi e^{-sR \sin \theta} d\theta = \frac{2KR}{R^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-sR \sin \theta} d\theta. \end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que

$$\frac{\sin \theta}{\theta} \geq \frac{2}{\pi}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} f(z) e^{isz} dz \right| &\leq \frac{2KR}{R^p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2sR}{\pi} \theta} d\theta \\ &= \frac{2KR}{R^p} \left[\frac{-\pi}{2sR} e^{-\frac{2sR}{\pi} \theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{2KR}{R^p} \frac{\pi}{2sR} [1 - e^{-sR}] \\ &\leq \frac{\pi K}{sR^p}. \end{aligned}$$

Como $p > 0$, se deduce (7.4). □

Observación. En el teorema anterior basta con $p > 0$, a diferencia del teorema 7.2.1 que requiere $p > 1$. Esto se debe a que el buen decaimiento aportado por el término correspondiente a e^{isz} permite ser menos restrictivo sobre la función $f(z)$.

Corolario 7.2.3. Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que q no tiene ceros reales y además se tiene

$$\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 1. \quad (7.5)$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0, \text{Im}(w)>0} \text{Res} \left(\frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}, w \right).$$

Ejemplo 7.2.2. Dado $s \geq 0$, calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{x^2 + a^2} dx, \quad a > 0.$$

Solución. Definamos $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$h(z) = \frac{e^{isz}}{z^2 + a^2}$$

Notemos que h es de la forma

$$h(z) = \frac{p(z)}{q(z)} e^{isz}$$

con $p(z) = 1$ y $q(z) = z^2 + a^2$. Los ceros de $q(z)$ son simples y están dados por $\{ai, -ai\} \not\subseteq \mathbb{R}$. Además, $\text{grado}(q) = 2 > 0 + 1 = \text{grado}(p) + 1$. Luego, se satisfacen las hipótesis del corolario 7.2.3 y por lo tanto, para el caso $s > 0$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} \cdot e^{isx} dx \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}(h, ai) = 2\pi i \frac{e^{-sa}}{2ai} = \frac{\pi}{a} e^{-sa}, \end{aligned}$$

pues

$$\operatorname{Res}(h, ai) = \frac{e^{isia}}{2ai} = \frac{e^{-sa}}{2ai}.$$

El caso $s = 0$ se puede calcular directamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \left. \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \right|_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}.$$

En conclusión, para todo $s \geq 0$ se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-sa}.$$

Por lo tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-sa}$$

y además

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{x^2 + a^2} dx = 0.$$

Notemos que esta última identidad es inmediata pues se trata del valor principal de una integral impropia de $-\infty$ a ∞ de un integrando dado por una función impar. \square

Para finalizar, enunciemos los resultados análogos al teorema 7.2.2 y al corolario 7.2.2:

Teorema 7.2.4. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función meromorfa en \mathbb{C} y denotemos por P el conjunto de los polos de f . Supongamos que:

(a) f admite un número finito de polos reales simples, es decir,

$$\mathbb{R} \cap P = \{a_1, \dots, a_s\}$$

con a_j polo simple de f .

(b) f admite un número finito de polos en $\text{Int}(H)$, es decir, $\text{Int}(H) \cap P$ es un conjunto finito.

(c) Existen constantes $K \geq 0$, $M \geq 0$ y $p > 0$ tales que

$$|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^p}, \quad \forall z \in H, \quad |z| \geq M.$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx} dx = 2\pi i \sum_{w \in \text{Int}(H) \cap P} \text{Res}(f(z)e^{isx}, w) + \pi i \sum_{j=1}^s \text{Res}(f(z)e^{isx}, a_j).$$

Corolario 7.2.4. Sean p, q dos polinomios primos entre sí tales que los ceros de q sobre el eje real, de existir, son simples, y se tiene además

$$\text{grado}(q) \geq \text{grado}(p) + 1.$$

Entonces para todo $s > 0$ se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)e^{isx}} dx = 2\pi i \sum_{q(w)=0, \text{Im}(w)>0} \text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{isx}, w\right) + \pi i \sum_{q(a)=0, a \in \mathbb{R}} \text{Res}\left(\frac{p(z)}{q(z)}e^{isx}, a\right).$$

7.3. Ejercicios

1. Pruebe que:

$$a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1.$$

$$b) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1 - 2a \cos 2\theta + a^2} d\theta = \pi \frac{1 - a + a^2}{1 - a}, \quad 0 < a < 1.$$

$$c) \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta}{\cosh a + \cos \theta} d\theta = 2\pi(-1)^n \frac{e^{-na}}{\sinh a}, \quad n \geq 0 \text{ es un entero y } a > 0.$$

$$d) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin \theta}{5 - 4 \sin \theta} d\theta = \frac{\pi}{6}.$$

2. Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos nx}{1 + a^2 - 2a \cos x} dx$$

con $a \in (0, 1)$.

3. Pruebe que:

$$a) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$b) \int_0^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \text{ con } a > 0.$$

$$c) \int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}, \text{ donde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0.$$

$$d) \int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1 + x^2)^{n+1}} dx = -n \frac{\pi}{4}, \text{ para } n = 0 \text{ y } n = 1 \text{ (considere ambos casos separadamente).}$$

$$e) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a}), \text{ } a > 0.$$

4. Sea $D = \{x + iy : x > 0, y > 0\}$ y $f : \overline{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua en \overline{D} y holomorfa en D . Suponga que existe una constante $M \geq 0$ tal que $|f(z)| \leq M/|z|^2$ para todo $z \in \overline{D}$, $|z| \geq 1$.

a) Pruebe que para todo $\theta \in [0, \pi/2]$ se tiene

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = e^{i\theta} \int_0^{\infty} f(e^{i\theta} x) dx.$$

b) Utilice lo anterior con $f(z) = \exp(iz)/(1 + z)^2$ y $\theta = \pi/2$ para demostrar que

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(1 + x)^2} dx + \int_0^{\infty} \frac{\exp(-x)}{1 + x^2} dx = 1.$$

5. Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{100} + 1}$$

6. Demuestre que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{x^n + 1} dx = \frac{\pi}{n \operatorname{sen}[\pi(m+1)/n]},$$

donde m y n son enteros positivos distintos de cero tales que $n - m \geq 2$. Indicación: puede ser útil considerar un camino como el de la figura 7.4.

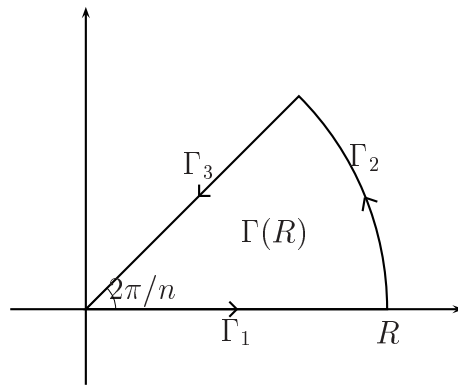


Figura 7.4: Camino cerrado

Índice de figuras

1.1. Conjunto abierto y cerrado	10
1.2. Valor principal del argumento	11
1.3. Raíz cuadrada de la unidad	12
1.4. Otras raíces de la unidad	12
4.1. Camino cerrado en torno a un punto	34
4.2. Función indicatriz de una curva cerrada	35
4.3. Camino para las integrales de Fresnel	36
4.4. Curva cerrada que encierra circunferencias	40
6.1. Circunferencia centrada en el origen	54
6.2. Cuadrado centrado en el origen	55
6.3. Camino que evita al origen	56
7.1. Arco de semicircunferencia	65
7.2. Segmento de arco de circunferencia	68
7.3. Camino que evita los polos reales	69
7.4. Camino cerrado	76

Bibliografía

- [1] J. Bak, D.J. Newman, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] R.V. Churchill, *Teoría de Funciones de Variable Compleja*, McGraw-Hill, New York, 1966.
- [3] P.V. O'Neil, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, Vol. 2, Compañía Editorial Continental, México D.F., 1994.
- [4] A.D. Wunsch, *Variable compleja con aplicaciones*, Addison-Wesley Iberoamericana, Buenos Aires, 1997.