Guia Sistemas Lineales

(1) Considere el sistema $x'(t) = A(t)x(t)$ con $A : \mathbb{R} \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ continua no trivial y de período T, es decir, $A(t+T) = A(t)$ para todo t. Suponga además que $A(t)$ es impar es decir $A(-t) = -A(t)$. Sea $W(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ solución del sistema

$$W' = A(t)W$$

que satisface $W(0) = I$. Pruebe que:

(a) $W(t+T) = W(t)W(T)$ para todo t.

(b) $W(-t) = W(t)$ para todo t.

(c) $W(T)^2 = I$.

(d) Todas las soluciones $x(t)$ del sistema son periódicas de período $2T$.

(2) Se tiene tres tanques con salmuera conectados cada uno de volumen $V_1 = 20$, $V_2 = 40$ y $V_3 = 50$ litros. Agua pura fluye al tanque 1 a una tasa de $10lt/min$, mientras que salmuera fluye del tanque 1 al tanque 2 a una tasa de $10lt/min$, y salmuera fluye del tanque 2 al tanque 3 a una tasa de $10lt/min$. Finalmente salmuera sale del tanque 3 también a una tasa de $10lt/min$. Si las cantidades iniciales de sal en cada tanque están dadas por $C_1 = 15kg$, $C_2 = 0$, $C_3 = 0$ y los tres tanques están llenos, determine un sistema de primer orden que satisface la concentración de sal en cada tanque como función del tiempo.

(3) Considere el sistema $x' = y$ $y' = -x$. Determine todas las soluciones de este sistema utilizando el cambio de variables $x(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $y = r(t)\mathrm{sen}\,\theta(t)$.

(4) Determine las 2 soluciones linealmente independientes del sistema $x' = y$, $y' = 2x + y$.