Pauta Control 2 MA 2G1, 2008/2
Profs. Jaime Ortega y Salomé Martínez
Aux. Nicolás Carreño
Duración 3 hrs.

1. *a*) (2pt) Resuelva la ecuación integro-diferencial

$$y'(t) = \cos t + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Solución: Notemos que la ecuación se puede escribir como:

$$y'(t) = \cos t + (y(\cdot) * \cos(\cdot))(t)$$

Aplicando transformada de Laplace y usando la propiedad de la transformada de la convolución:

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}(y) - y(0) &= \frac{s}{s^2+1} + \frac{s}{s^2+1}\mathcal{L}(y) \\ (s - \frac{s}{s^2+1})\mathcal{L}(y) &= \frac{s}{s^2+1} + 1 \\ \frac{s^3}{s^2+1}\mathcal{L}(y) &= \frac{s^2+s+1}{s^2+1} \\ \mathcal{L}(y) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \end{aligned}$$

de donde es fácil ver que $y(t) = 1 + t + \dfrac{t^2}{2}$.

□

b) (3pt) Considere la ecuación

$$(E) \quad tx'' + tx' - x = 0, \quad x(0) = 0.$$

Demuestre que si $x(t)$ es solución de (E) entonces $X(s) = \mathcal{L}(x(t))(s)$ satisface la ecuación diferencial

$$sX'(s) + 2X(s) = 0,$$

para $s > 0$.

Solución: Aplicando transformada de Laplace a la ecuación:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(x'') - \frac{d}{ds}\mathcal{L}(x') - \mathcal{L}(x) &= 0 \\ -\frac{d}{ds}[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] - \frac{d}{ds}[sX(s) - x(0)] - X(s) &= 0 \\ -2sX(s) - s^2X'(s) - X(s) - sX'(s) - X(s) &= 0 \\ s(s+1)X'(s) + 2(s+1)X(s) &= 0 \\ sX'(s) + 2X(s) &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

c) (1pt) Determine una solución no trivial de (E).

Solución: Resolvemos la EDO para $X(s)$:

$$\begin{aligned} \frac{X'(s)}{X(s)} &= -\frac{2}{s} \\ \ln X(s) &= -2\ln s + C \\ X(s) &= C\frac{1}{s^2} \end{aligned}$$

Así, $x(t) = Ct$ es una solución de la ecuación, con C constante distinta de cero.

$\square$

2. *a*) (2pt) Resuelva el problema de valor inicial:

$$x'' + 4x' + 4x = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

con

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{si} \quad t > 2. \end{cases}$$

Solución: Notemos que podemos escribir la ecuación como:

$$x'' + 4x' + 4x = t \cdot (H(t) - H(t-2))$$

Aplicando transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}(x) + 4s\mathcal{L}(x) + 4\mathcal{L}(x) &= \mathcal{L}(t) - \mathcal{L}(H(t-2)\cdot t) \\ (s^2+2)^2\mathcal{L}(x) &= \frac{1}{s^2} - \mathcal{L}(H(t-2)\cdot((t-2)+2)) \\ \mathcal{L}(x) &= \frac{1}{s^2(s+2)^2} - \frac{e^{-2s}}{(s+2)^2}\underbrace{\mathcal{L}(t+2)}_{\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s}} \\ \mathcal{L}(x) &= \frac{1}{s^2(s+2)^2} - e^{-2s}\left(\frac{1+2s}{s^2(s+2)^2}\right) \end{aligned}$$

Para encontrar las antitransformadas, usamos fracciones parciales:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s^2(s+2)^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} \\ &= \frac{A(s^3+4s^2 4s) + B(s^2+4s+4) + C(s^3+2s^2) + Ds^2}{s^2(s+2)^2} \end{aligned}$$

Con lo que se llega al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 4A + B + 2C + D &= 0 \\ 4A + 4B &= 0 \\ 4B &= 1 \end{aligned}$$

de donde $A = -1/4, B = 1/4, C = 1/4, D = 1/4$.
Analogamente para el otro término:

$$\begin{aligned} \frac{1+2s}{s^2(s+2)^2} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} \\ &= \frac{A(s^3 + 4s^2 4s) + B(s^2 + 4s + 4) + C(s^3 + 2s^2) + Ds^2}{s^2(s+2)^2} \end{aligned}$$

se llega al sistema:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 4A + B + 2C + D &= 0 \\ 4A + 4B &= 2 \\ 4B &= 1 \end{aligned}$$

de donde $A = 1/4, B = 1/4, C = -1/4, D = -3/4$.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}\right) - \frac{e^{-2s}}{4}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s+2} - \frac{3}{(s+2)^2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\mathcal{L}(-1 + t + e^{-2t} + te^{-2t}) - \frac{e^{-2s}}{4}\mathcal{L}\left(1 + t - e^{-2t} - 3te^{-2t}\right) \end{aligned}$$

Así, $x(t) = \dfrac{-1 + t + e^{-2t} + te^{-2t}}{4} - \dfrac{1 + t - 2 - e^{-2(t-2)} - 3(t-2)e^{-2(t-2)}}{4} H(t-2)$.

□

b) (4 pt) La siguiente ecuación es la ecuación de movimiento de una masa unida a un resorte que se libera con velocidad cero cuando está deformado una distancia $x = 1$ desde la posición de equilibrio. Después de $\pi/2$, la masa es golpeada con un martillo que ejerce un impulso sobre la masa,

$$x'' + 9x = -3\delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right), \ x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$$

Determine la solución $x(t)$ para $t \geq 0$. ¿Qué le ocurre a la masa después de ser golpeada? ¿Por qué?

Solución: Aplicando la transformada de Laplace a la ecuación:

$$\begin{aligned}
s^2\mathcal{L}(x) - sx(0) - x'(0) + 9\mathcal{L}(x) &= -3e^{-\frac{\pi}{2}s} \\
(s^2+9)\mathcal{L}(x) &= s - 3e^{-\frac{\pi}{2}s} \\
\mathcal{L}(x) &= \frac{s}{s^2+9} - e^{-\frac{\pi}{2}s}\underbrace{\frac{3}{s^2+9}}_{\mathcal{L}(\text{sen}(3t))}
\end{aligned}$$

Así, $x(t) = \cos(3t) - \underbrace{\text{sen}(3(t-\frac{\pi}{2}))}_{cos(3t)} H(t-\frac{\pi}{2})$, o

$$\begin{cases} \cos(3t) & \text{si } 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } t \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

A partir de esta expresión de la solución, se puede ver que la masa, al ser golpeada en $t = 2$, se detiene y se queda en la posición $x = 0$.

$\square$

3. Sea $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ continua y de periodo $T > 0$, es decir $A(t+T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   a) (2pt) Sea $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ la solución del sistema matricial lineal

   $$(1) \qquad W'(t) = A(t)W(t), \quad W(0) = I.$$

   Demuestre que $W(t+T) = W(t)W(T)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

   Solución: Sea $\Phi(t) = W(t+T) - W(t)W(T)$. Veamos qué ecuación resuelve $\Phi(t)$.

   $$\begin{aligned}
   \Phi'(t) &= W'(t+T) - W'(t)W(T) \\
   &= A(t+T)W(t+T) - A(t)W(t)W(T) \\
   &= A(t)W(t+T) - A(t)W(t)W(T) \\
   &= A(t)(W(t+T) - W(t)W(T)) \\
   &= A(t)\Phi(t)
   \end{aligned}$$

   Además, $\Phi(0) = W(T) - W(0)W(T) = 0$

   Así, hemos visto que $\Phi(t)$ satisface el siguiente sistema:

   $$\begin{cases} \Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \\ \Phi(0) = 0 \end{cases}$$

   Como por el TEU, la única solución de este problema de condición inicial es la función idénticamente nula, se concluye que $\Phi(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, es decir, $W(t+T) = W(t)W(T) \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

$\square$

b) (2pt) Diremos que una solución no trivial del sistema

$$(2) \qquad x'(t) = A(t)x(t),$$

con $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, es multiplicativa si existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x(t+T) = \alpha x(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Demuestre que el sistema (2) admite una solución multiplicativa.

Ind.: Recuerde que las soluciones de (2) son de la forma $x(t) = W(t)p$ con $p \in \mathbb{R}^n$.

Solución: Sea $x(t)$ una solución del sistema. Siguiendo la indicación se tiene que $x(t) = W(t)p$ con $p \in \mathbb{R}^n$. Usando la parte (a), se tiene que

$$x(t+T) = W(t+T)p = W(t)W(T)p$$

Asumiendo que $W(T)$ es simétrica, podemos asegurar que tiene un valor propio $\alpha \in \mathbb{R}$. Elijamos p como el vector propio asociado a tal α. De esta forma tenemos

$$x(t+T) = W(t)W(T)p = W(t)(\alpha p) = \alpha W(t)p = \alpha x(t),$$

es decir, $x(t)$ es una solución multiplicativa.

$\square$

c) (2pt) Demuestre que si $W(T)$ tiene n valores propios reales y distintos, entonces (1) tiene una base de soluciones multiplicativas.

Solución: Sean $(\alpha_i, p_i) \quad i = 1 \ldots n$ los valores y vectores propios de $W(T)$. Siguiendo el procedimiento de la parte (b), las soluciones del sistema definidas como $x_i(t) = W(t)p_i$ son multiplicativas. Falta ver que son l.i. Sean $\beta_i \quad i = 1 \ldots n$ constantes reales:

$$\begin{aligned} \beta_1 x_1(t) + \ldots + \beta_n x_n(t) &= 0 \\ \beta_1 W(t)p_1 + \ldots + \beta_n W(t)p_n &= 0 \\ W(t)(\beta_1 p_1 + \ldots + \beta_n p_n) &= 0 \end{aligned}$$

Como $W(t)$ es invertible para todo t, necesariamente $\beta_1 p_1 + \ldots + \beta_n p_n = 0$, que con la independencia lineal de $\{p_i\}$ se concluye que $\beta_i = 0 \quad \forall i = 1 \ldots n$. Esto demuestra la independencia lineal de $\{x_i\}$.

$\square$