Auxiliar 6: Elementos de Álgebra

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Ernesto Araya V.

10 de Octubre de 2008

P1. Sea R un anillo conmutativo con unidad, $I \subsetneq R$ un ideal y M un R-módulo.

a) Definimos $IM = \{\sum_{i=1}^{n} s_i m_i / n \in \mathbb{N},\, s_i \in I,\, m_i \in M\}$. Probar que IM es submódulo de M, y de hecho, $IM = \langle \{sm/s \in I,\, m \in M\} \rangle$.

b) Sobre M/IM definimos la multiplicación por escalares del anillo cuociente R/I de la siguiente forma: $[r] \cdot [m] = [rm]$. Ver que esto da una función bien definida $\cdot : R/I \times M/IM \to M/IM$ y que con esto, M/IM resulta ser un R/I-módulo.

c) Si $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$, con los M_λ submódulos de M, pruebe que $IM = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} IM_\lambda$, y de aquí deduzca que $M/IM \cong \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda / IM_\lambda$, mediante la asociación $[\sum m_\lambda] \leftrightarrow \sum [m_\lambda]$ y este isomorfismo es como módulos sobre R y también como módulos sobre I/R.

d) Si M es libre como R-módulo con base $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, pruebe que M/IM es libre como R/I-módulo con base $\{[b_\lambda]\}_{\lambda \in \Lambda}$.

P2. Sea R un anillo conmutativo con unidad y M un R-módulo. Un ideal K (no degenerado) se dirá *maximal* si para todo $J \subseteq R$ ideal que contiene a K se tiene que, o bien $J = K$, o bien J es degenerado.

a) [**Teorema de Krull**] Probar que todo ideal $J \subsetneq R$ está contenido en algún ideal maximal. En particular, R siempre posee ideales maximales.

b) Probar que dado un ideal $I \subsetneq R$, se tiene que: R/I es cuerpo $\Leftrightarrow$ I es ideal maximal de R.

P3. Probar que si R un anillo conmutativo con unidad y M es un R-módulo libre, entonces todas las bases de M poseen el mismo cardinal.

P4. Sea $I \neq (0)$ un ideal de un anillo R (conmutativo con unidad). Pruebe que I es un R-módulo libre si y sólo si es un ideal principal generado por un elemento que no es divisor de cero. Concluya que el ideal de $R = \mathbb{C}[x, y]$ generado por $\{x, y\}$ no es un R-módulo libre.

P5. Sea R un dominio de integridad (con unidad). Pruebe que si R es finito, entonces es un cuerpo.

P6. Un dominio de integridad R se denomina *anillo Euclidiano* si existe $d : R \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ tal que:

- Para todo $a, b \in R$, ambos no nulos, $d(a) \leq d(ab)$.
- Para todo $a, b \in R$, ambos no nulos, existen $t, r \in R$ tales que $a = tb + r$, donde $r = 0$, o bien, $d(r) < d(b)$.

Pruebe que si R es un anillo Euclidiano, entonces es un dip.