Auxiliar 10: Elementos de Álgebra

Profesor: Marcos Kiwi
Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Ernesto Araya V.

21 de Noviembre de 2008

P1. Sea F un cuerpo y $f(x)$ un polinomio en $F[x]$. Probar que $f(x)$ tiene una raiz múltiple si y solo si $f(x)$ y $f'(x)$ tienen un factor común no trivial (es decir, de grado positivo).

P2. Sea $f(x) \in F[x]$ un polinomio irreducible. Probar que:

(a) Si la característica de F es 0, entonces $f(x)$ no tiene raices múltiples.

(b) Si la característica de F es $p \neq 0$, entonces $f(x)$ tiene una raiz múltiple sólo si es de la forma $f(x) = g(x^p)$.

Un elemento a en una extensión K de F se dice *separable sobre* F si satisface un polinomio sobre F que no tenga raices múltiples. Una extensión K de F se dice *separable* sobre F si todos sus elementos son separables sobre F. Un cuerpo F se dice *perfecto* si toda extensión finita de F es separable.

P3. Probar que si un cuerpo es de característica 0, entonces es perfecto.

P4. *(a)* Si F es de característica $p \neq 0$ probar que para $a, b \in F, (a+b)^{p^m} = a^{p^m} + b^{p^m}$.

(b) Si F es de característica $p \neq 0$ y si K es una extensión de F, definimos $T = \{a \in K | a^{p^n} \in F \text{ para algún } n\}$. Probar que T es un subcuerpo de K.

P5. Si K, T y F son como en **P4.***(b)* probar que cualquier automorfismo de K que deja fijo a todos los elementos de F, también deja fijo a todos los elementos de T.

P6. Mostrar que un cuerpo F de característica $p \neq 0$ es perfecto si y sólo si para cada $a \in F$ existe $b \in F$ de modo que $b^p = a$.

Con esto se ha probado el siguiente criterio de perfección: Un cuerpo F es perfecto si y sólo si

- La característica de F es igual a 0, ó
- La característica de F es igual a $p \neq 0$, y cada elemento de F posee raiz $p-$ésima.

P7. Usando el resultado de **P6.**, probar que cualquier cuerpo finito es perfecto.

P8. Sea $K = F[\alpha, \beta]$, donde α y β son separables sobre F. Probar que K es una extensión separable sobre F.

P9. Probar que si K es una extensión algebraica de F, entonces el conjunto de elementos en K que son separables sobre F forma un subcuerpo de K.