Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

MA34B-02: Estadística
Profesor Rodrigo Abt B.
Semestre Primavera, 2008

CLASE AUXILIAR 2: ESTIMADORES DE MOMENTOS Y DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

HÉCTOR OLIVERO Q. - VÍCTOR RIQUELME F.

Problema 1:

Se considera que $X \sim Unif(0,a)$, con a fijo. Sea $(X_i)_{i=1}^n$ una m.a.s de X.

1. Dé la esperanza y la varianza de $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. ¿A que distribución se aproxima la distribución de $\bar{X}_n$ cuando n es grande?
2. Se considera el máximo de los valores muestrales $Y = \max_{i=1,\dots,n} X_i$. Dé la distribución de Y y calcule su esperanza.
3. Calcule la varianza de Y y dé su límite cuando $n \to \infty$.

Problema 2:

Sea una m.a.s. $(X_i)_{i=1}^n$ de una distribución con densidad:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-(x-\beta)} & \text{si} \quad x \geq \beta \\ \\ 0 & \text{si} \quad x < \beta \end{cases}$$

1. Calcule la esperanza y la varianza de X (se sugiere usar la función generadora de momentos de X).
2. Encuentre el estimador de los momentos $\hat{\beta}_1$ de β. ¿Es insesgado?, ¿es consistente?
3. Encuentre el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\beta}_2$ de β. ¿Es insesgado?, ¿es consistente?.

Problema 3:

Sea $(X_i)_{i=1}^n$ una m.a.s. de la distribución de Rayleigh de parámetro α, dada por

$$f(\vec{x},\alpha) = \frac{2}{\alpha} x e^{-\frac{x^2}{\alpha}}$$

1. Muestre que si X se distribuye $Rayleigh(\alpha)$, entonces $X^2 \sim Exp(\frac{1}{\alpha})$.
2. Encuentre el estimador de los momentos $\hat{\alpha}$ de α.
3. Verifique que el estimador de máxima verosimilitud de α es igual a $\hat{\alpha}$.

Problema 4:

Sea $(X_i)_{i=1}^n$ m.a.s. de la distribución $Potencia(\alpha,\theta)$, donde la densidad está dada por

$$f(x;\theta,\alpha) = \frac{\alpha+1}{\theta^{\alpha+1}} x^{\alpha} \qquad\qquad \text{si } x \in (0,\theta)$$

1. Muestre que $\mathbb{E}\left[X^k\right] = \dfrac{\alpha+1}{\alpha+k+1}\theta^k$.
2. Deduzca $\mathbb{E}\left[X\right]$, $\mathbb{V}ar\left(X\right)$
3. Obtenga el estimador de los momentos $\hat{\theta}_M$ para θ. Calcule el sesgo y la varianza. ¿Es consistente?
4. Obtenga el estimador de máxima verosimilitud $\hat{\theta}_V$ de θ.
5. Calcule las funciones de distribución y densidad de $\hat{\theta}_V$. Verifique que $\hat{\theta}_V$ tiene distribución de *Potencia*. Calcule sesgo, varianza, y verifique consistencia. Encuentre c tal que $c\hat{\theta}_V$ es insesgado.