PAUTA CLASE AUXILIAR : ESTIMADORES DE MOMENTOS Y DE MÁXIMA VEROSIMILITUD

HÉCTOR OLIVERO Q. - VICTOR RIQUELME F.

Solución 1: i. Calculamos esperanza y varianza de $\bar{X}_n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\bar{X}_n\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(X_i\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{a}{2} \\
&= \frac{a}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left(\bar{X}_n\right) &= \mathbb{V}ar\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathbb{V}ar\left(X_j\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}(\mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2) \\
&= \frac{1}{n^2}n\left(\int_{x=0}^{a} x^2\frac{1}{a}dx - \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a}\frac{a^3}{3} - \frac{a^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{n}a^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{a^2}{12n}
\end{aligned}$$

Por el Teorema Central del Límite, para n grande, se tiene que

$$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma}\right) \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

Con lo que, reescalando y trasladando, queda

$$\bar{X}_n \overset{a}{\sim} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

donde $\mu = \mathbb{E}\left(X\right) = \frac{a}{2}$, $\sigma = \mathbb{V}ar\left(X\right) = \frac{a^2}{12}$. Asi,

$$\bar{X}_n \overset{a}{\sim} N\left(\frac{a}{2}, \frac{a^2}{12n}\right)$$

ii. Queremos la distribución de $Y = max\{X_i\}_{i=1}^n$. Para ello,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y < t\right) &= \mathbb{P}\left(\max_{i=1,\dots,n} X_i < t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 < t, \dots, X_n < t\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 < t\right) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}\left(X_n < t\right) \\
&= \left(\frac{t}{a}\right)^n \mathbf{1}_{(0,a)}(t) + 1 \cdot \mathbf{1}_{(a,\infty)}(t)
\end{aligned}$$

Ahora, la función de densidad de Y es

$$f_Y(t) = \frac{\partial \mathbb{P}\left(Y < t\right)}{\partial t} = \frac{1}{a^n} n t^{n-1} \mathbf{1}_{(0,a)}(t)$$

y luego, la esperanza de Y es

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y\right) &= \int_{t=0}^{a} t f_Y(t) dt \\
&= \int_{t=0}^{a} t \frac{1}{a^n} n t^{n-1} dt \\
&= \frac{n}{a^n} \int_{t=0}^{a} t^n dt \\
&= \frac{n}{a^n} \frac{a^{n+1}}{n+1} \\
&= \frac{n}{n+1} a
\end{aligned}$$

iii. Para calcular la varianza, por la fórmula $\mathbb{V}ar\left(Y\right) = \mathbb{E}\left(Y^2\right) - \mathbb{E}\left(Y\right)^2$, necesitamos $\mathbb{E}\left(Y^2\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(Y^2\right) &= \int_{t=0}^{a} t^2 f_Y(t) dt \\
&= \frac{n}{a^n} \int_{t=0}^{a} t^{n+1} dt \\
&= \frac{n}{a^n} \frac{a^{n+2}}{n+2} \\
&= \frac{n}{n+2} a^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathbb{V}ar\left(Y\right) = \frac{n}{n+2} a^2 - \frac{n^2}{(n+1)^2} a^2 = \frac{n}{(n+2)(n+1)^2} a^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Solución 2: i. Primero usamos la función generadora de momentos:

$$\begin{aligned}
\phi_X(t) &= \mathbb{E}\left(e^{tX}\right) \\
&= \int_{x=\beta}^{\infty} e^{tx} e^{-(x-\beta)} dx \\
&= e^{\beta} \int_{x=\beta}^{\infty} e^{-x(1-t)} dx \\
&= e^{\beta} \frac{1}{-(1-t)} e^{-x(1-t)} \Big|_{x=\beta}^{\infty} && \text{Es necesario que } 1-t>0 \\
&= e^{\beta} \frac{e^{-\beta(1-t)}}{1-t} \\
&= \frac{e^{\beta t}}{1-t}
\end{aligned}$$

Lo anterior está definido para $t<1$. Luego, ocupamos la propiedad de la fgm que dice que $\phi_X^{(n)}(t=0)=\mathbb{E}\left(X^n\right)$, para calcular la esperanza y la varianza de X.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \phi_X'(0) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e^{\beta t}}{1-t}\right) \\
&= \frac{\beta e^{\beta t}(1-t)-(-1)e^{\beta t}}{(1-t)^2}\Big|_{t=0} \\
&= \frac{e^{\beta t}(\beta(1-t)+1)}{(1-t)^2}\Big|_{t=0} \\
&= \beta+1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^2\right) &= \phi_X''(t=0) \\
&= \frac{[\beta e^{\beta t}(\beta(1-t)+1)+(-\beta)e^{\beta t}](1-t)^2-2(1-t)(-1)e^{\beta t}(\beta(1-t)+1)}{(1-t)^4}\Big|_{t=0} \\
&= \beta(\beta+1)-\beta+2(\beta+1) \\
&= \beta^2+2\beta+2
\end{aligned}$$

Así, con la fórmula $\mathbb{V}ar(X)=\mathbb{E}\left(X^2\right)-\mathbb{E}(X)^2$, se obtiene que $\mathbb{V}ar(X)=1$.

ii. Para encontrar el estimador de los momentos, usamos $m_k=\mu_k$. Entonces

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= m_1 \\
\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
\hat{\beta}_n+1 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \\
\hat{\beta}_n &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i-1
\end{aligned}$$

Para que sea insesgado es necesario que $\mathbb{E}\left(\hat{\beta}\right) = \beta$, y para que sea consistente[1], es suficiente que sea asintóticamente insesgado[2] (o sea, $\hat{\beta}_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \beta$) y que $\mathbb{V}ar\left(\hat{\beta}_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\right)$. Calculemos la esperanza y la varianza de $\hat{\beta}_n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\hat{\beta}_n\right) &= \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i\right) - 1 \\
&= \frac{1}{n} n\mathbb{E}\left(X_1\right) - 1 \\
&= \beta + 1 - 1 = \beta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left(\hat{\beta}_n\right) &= \mathbb{V}ar\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 1\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}ar\left(X_i\right) \\
&= \frac{1}{n^2} n\mathbb{V}ar\left(X_1\right) \\
&= \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Entonces el estimador es insesgado, y su varianza se va a cero cuando n se va a infinito. Entonces, el estimador es consistente.

iii. La función de densidad de cada X_i es $f_X(x_i) = e^{-(x-\beta)}\mathbf{1}_{\{\beta < x_i\}}(x_i)$. Entonces, la función de verosimilitud es

$$\begin{aligned}
L(\vec{x}, \beta) &= \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\beta)}\mathbf{1}_{\{\beta < x_1, \ldots, \beta < x_n\}} \\
&= e^{n\beta} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i}\mathbf{1}_{\{\beta < x_1, \ldots, \beta < x_n\}}
\end{aligned}$$

Notemos que la función L, dado $\vec{x}$, es creciente como función de β, pero β no puede ser mayor que algún x_i, pues si lo fuera la verosimilitud será cero. Así, el valor de β que maximiza la verosimilitud es el máximo valor de β posible, que será igual al minimo de los x_i (si $\beta \leq x_i$ para todo i, entonces $\beta \leq \min_{i=1\ldots n} x_i$). El estimador de máxima verosimilitud será por tanto,

$$\hat{\beta}_V = \min_{i=1\ldots n} X_i$$

[1]Se dice que un estimador $\hat{\beta}_n$ de β es consistente si converge en probabilidad hacia β, o sea, $\forall c > 0$ se tiene $\mathbb{P}\left(|\hat{\beta}_n - \beta| \geq c\right) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pero si se tiene convergencia en media cuadrática, por la desigualdad de Markov se tiene que

$$\mathbb{P}\left(|\hat{\beta}_n - \beta| \geq c\right) = \mathbb{P}\left(|\hat{\beta}_n - \beta|^2 \geq c^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left(|\hat{\beta}_n - \beta|^2\right)}{c^2} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ahora, lo último es la convergencia en media cuadrática, o sea, el error cuadrático medio $ECM\left(\hat{\beta}_n\right) = \mathbb{E}\left(|\hat{\beta}_n - \beta|^2\right)$ se va a cero. Además, se tiene que $ECM\left(\hat{\beta}_n\right) = \mathbb{V}ar\left(\hat{\beta}_n\right) + Sesgo\left(\hat{\beta}_n\right)^2$. Entonces, si $\mathbb{V}ar\left(\hat{\beta}_n\right) \to 0$ y $Sesgo\left(\hat{\beta}_n\right) = \mathbb{E}\left(\hat{\beta}_n\right) - \beta \to 0$, se tiene que el estimador $\hat{\beta}_n$ es consistente

[2]Si $\hat{\beta}_n$ es insesgado, es asintóticamente insesgado.

Ahora queremos saber si es insesgado y consistente. Para ello, calculamos la función de distribución de $\hat{\beta}_V$, luego, si densidad, luego la esperanza y después la varianza.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\hat{\beta}_V \leq t\right) &= \mathbb{P}\left(\min_{i=1\ldots n} X_i > t\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > t, \ldots, X_n > t\right) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_i > t\right) \\
&= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 > t\right)^n
\end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X_1 > t\right)^n &= 1 - \mathbb{P}\left(X_1 \leq t\right) = 1 - \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \\
&= 1 - \int_{\beta}^{t} e^{-(x-\beta)}dx\mathbf{1}_{(\beta,\infty)}(t) \\
&= 1 + [e^{-(t-\beta)} - 1]\mathbf{1}_{(\beta,\infty)}(t)
\end{aligned}$$

Así,

$$\mathbb{P}\left(X_1 > t\right) = \begin{cases} 1 & , \quad t \leq \beta \\ e^{-(t-\beta)} & , \quad t > \beta \end{cases}$$

y, en consecuencia,

$$\mathbb{P}\left(\hat{\beta}_V \leq t\right) = \begin{cases} 0 & , \quad t \leq \beta \\ 1 - e^{-n(t-\beta)} & , \quad t > \beta \end{cases}$$

Entonces, la densidad de $\hat{\beta}_V$ es

$$g_{\hat{\beta}_V} = \frac{\partial}{\partial t}(1 - e^{-n(t-\beta)}) = ne^{-n(t-\beta)}\mathbf{1}_{\{\beta<t\}}$$

El calculo de la esperanza y la varianza queda de ejercicio, pero el resultado es

$$\mathbb{E}\left(\hat{\beta}_V\right) = \frac{1}{n} + \beta \to \beta$$

$$\mathbb{E}\left(\hat{\beta}_V^2\right) = \beta^2 + \frac{2}{n}\left(\frac{1}{n} + \beta\right)$$

$$\mathbb{V}ar\left(\hat{\beta}_V\right) = \frac{1}{n^2} \to 0$$

El estimador es asintóticamente insesgado y consistente.

Solución 3: i. Calculamos la distribución de X^2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(X^2 < t\right) &= \mathbb{P}\left(X < \sqrt{t}\right) \\
&= \int_{x=0}^{\sqrt{t}} \frac{2}{\alpha} x e^{\frac{-1}{\alpha}x^2} dx \\
&= \int_{y=0}^{t} \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-1}{\alpha}y} dy \qquad \text{Se hace el c.v. } y = x^2 \\
\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{P}\left(X^2 < t\right) &= \frac{1}{\alpha} e^{\frac{-1}{\alpha}t}
\end{aligned}$$

El lado izquierdo de la ecuación es la densidad de la variable $Y = X^2$, y esa densidad es la densidad de una variable exponencial de parámetro $\frac{1}{\alpha}$.

ii. Consideremos la MAS $(Y_i)_{i=1}^n$, definida por $Y_i = X_i^2$. Entonces, por el método de los momentos (para esta MAS), se tiene que

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= m_1 \\
\mathbb{E}\left(Y\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \\
\hat{\alpha} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2
\end{aligned}$$

iii. La función de verosimilitud L será

$$L(\vec{y}, \alpha) = \frac{1}{\alpha^n} e^{\frac{-1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} y_i} \mathbf{1}_{[0,\infty)^n}(\vec{y})$$

Ahora, maximizar la función de verosimilitud equivale a maximizar su logaritmo (pues ln es una función creciente). Asi, maximizamos

$$l(\vec{y}, \alpha) = ln(L(\vec{y}, \alpha)) = -nln(\alpha) - \frac{1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} l(\vec{y}, \alpha) = -\frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$ [3]

$$\hat{\alpha}_V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \hat{\alpha}$$

Solución 4: i. Calculamos la esperanza por definición

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(X^k\right) &= \int_{x=0}^{\theta} x^k \frac{\alpha+1}{\theta^{\alpha+1}} x^{\alpha} dx \\
&= \frac{\alpha+1}{\theta^{\alpha+1}} \left.\frac{x^{\alpha+k+1}}{\alpha+k+1}\right|_{x=0}^{\theta} \\
&= \frac{\alpha+1}{\theta^{\alpha+1}} \frac{\theta^{\alpha+k+1}}{\alpha+k+1} \\
&= \frac{\alpha+1}{\alpha+k+1}\theta^k
\end{aligned}$$

ii. Para calcular la variannza, calculamos $\mathbb{E}\left(X^2\right)$. Por la fórmula anterior,

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\theta \ ; \ \mathbb{E}\left(X^2\right) = \frac{\alpha+1}{\alpha+3}\theta^2$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left(X\right) &= \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2 = \tfrac{\alpha+1}{\alpha+3}\theta^2 - \tfrac{(\alpha+1)^2}{(\alpha+2)^2}\theta^2 \\
&= (\alpha+1)\theta^2\left(\tfrac{1}{\alpha+3} - \tfrac{\alpha+1}{(\alpha+3)^2}\right) \\
&= \tfrac{(\alpha+1)\theta^2}{(\alpha+3)(\alpha+2)^2}
\end{aligned}$$

[3]Imponemos que la derivada sea igual a cero

iii.

$$\begin{aligned}\mu_1 &= m_1\\ \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\hat{\theta}_M &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\\ \hat{\theta}_M &= \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\bar{X}_n\end{aligned}$$

$$Sesgo(\hat{\theta}_M) = \mathbb{E}\left(\hat{\theta}_M\right) - \theta = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\frac{1}{n}n\mathbb{E}\left(X_1\right) - \theta = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}\frac{\alpha+1}{\alpha+2} - \theta = 0$$

$$\mathbb{V}ar\left(\hat{\theta}_M\right) = \left(\frac{\alpha+2}{\alpha+1}\right)^2 \frac{1}{n^2}n\mathbb{V}ar\left(X_i\right) = \frac{(\alpha+2)^2}{(\alpha+1)^2}\frac{1}{n}\frac{\alpha+1}{(\alpha+3)(\alpha+2)^2}\theta^2 = \frac{\theta^2}{n(\alpha+1)(\alpha+3)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

El estimador es insesgado y consistente.

iv. Por un argumento similar al del problema 2 parte (*iii*), el estimador de máxima verosimilitud de θ es

$$\hat{\theta}_V = \max_{i=1\ldots n} X_i$$

v. Hay que calcular la función de distribución de $\hat{\theta}_V$, como en el problema 2, luego la densidad. Al verificar que el estimador tiene distribución de *Potencia* de algunos parámetros, el resto se hace igual que las partes anteriores de este problema (queda de ejercicio).

☯