MA34B-Estadística - Pauta Control 2
Profesora: N. Lacourly, R. Abt
Duración: 2:30 horas Fecha: 18/08/08
Sin calculadora

Problema 1

1. Verdadero: En efecto, sea V_1 y V_2 son las varianzas de la media muestral con y sin reemplazo respectivamente con un tamaño de población igual a N y σ^2 la varianza de la población. $V_1 = \frac{\sigma^2}{n}$ y $V_2 = \frac{N-n}{N-1}\frac{\sigma^2}{n}$.

2. Verdadero. Alternativa 1 (por convergencia): La media muestral converge casi seguramente al momento teórico de orden 1, que en este caso corresponde a μ, y por lo tanto converge en probabilidad también, con lo cual se prueba lo pedido. Alternativa 2: Se tiene que $E(\bar{X}) = E(X) = \mu$ y $Var(\bar{X}) = \sigma^2/n \to 0$ cuando $n \to \infty$, por lo tanto converge en media cuadrática a 0, y por lo tanto es consistente por construcción.

3. En efecto, se tiene que

$$f(x|\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \leq x \leq \theta + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \Rightarrow f_n(x|\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \leq x_1, x_2, \ldots, x_n \leq \theta + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

   Luego se tiene que la función de verosimilitud es máxima, es decir 1, cuando $\text{Max}\{X_i\} - 1 \leq \theta \leq \text{Min}\{X_i\}$, y por ende no es único.

4. Si $y_i = ax_i + b$, $G_n(x) = \frac{\#\{y_i \leq y\}}{n} = \frac{\#\{ax_i + b \leq y\}}{n}$

$$G_n(x) = \begin{cases} \frac{\#\{x_i \leq \frac{y-b}{a}\}}{n} & \texttt{si a>0} \\ \frac{\#\{x_i \geq \frac{y-b}{a}\}}{n} & \texttt{si a<0} \end{cases}$$

$$G_n(x) = \begin{cases} F_n(\frac{y-b}{a}) & \texttt{si a>0} \\ 1 - F_n(\frac{y-b}{a}) & \texttt{si a<0} \end{cases}$$

   De la misma manera se puede expresar la función de distribución G para la población y:

$$G(x) = \begin{cases} F(\frac{y-b}{a}) & \texttt{si a>0} \\ 1 - F(\frac{y-b}{a}) & \texttt{si a<0} \end{cases}$$

5. Resolviendo la recurrencia se tiene:

$$\pi_n = \frac{f_n(x|\theta)\pi(\theta)}{K}$$

   Donde $K = \prod_{i=1}^{n} K_i$ es una constante tal que $\int_\Theta f_n(x|\theta)\pi(\theta)d\theta = 1$. Se puede reconocer entonces que π_n representa la distribución a posteriori de θ dados los valores de la muestra. Este resultado nos muestra que se puede construir la distribución a posteriori de manera secuencial, tomando los valores muestrales uno a uno, y actualizando la distribución obtenida en cada paso.

6. $\bar{x} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$. Cuando $\sigma^2 = 9,\ \mu = 2$ y $n = 100$, $\bar{x} \sim N(2, 9/100)$.
   Si $z \sim N(0,1)$, $\mathbb{P}(-1{,}95 \leq \bar{x} \leq 1{,}96) = 0{,}95$. Luego, como $z = \frac{\bar{x}-2}{\sqrt{9/100}} = \frac{10}{3}(\bar{x}-2)$, $\mathbb{P}(-1{,}96 \leq \frac{10}{3}(\bar{x}-2) \leq 1{,}96) = 0{,}95$. Se deduce que $u = \frac{3}{10}1{,}96 = 0{,}588$.

Problema 2

1. $E(X) = \theta$, luego $\hat{\theta}_1 = \bar{x}$. $E(\bar{x}) = E(X) = \theta$ y $var(\bar{x}) = \frac{\theta}{n}$. El estimador es consistente.
2. La función de verosimilitud es:
   $$f_n = \frac{\theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}}{x_1!...x_n!}$$
   Se calcula $log(f_n)$ y deriva. Se obtiene: $\hat{\theta}_2 = \bar{x}$.
3. Bajo pérdida cuadrática, el estimador de Bayes corresponde a la esperanza de $\theta|X$, obtenida a través de la distribución a posteriori, la cual cumple que:
   $$\xi(\theta|x) \propto f_n(x|\theta)\pi(\theta) = \theta^{\sum x_i} e^{-n\theta}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}$$
   $\Rightarrow \theta|X \sim$ Gamma(α, β), de donde
   $$E(\theta|X) = \frac{\sum x_i + \alpha}{n+\beta} = \frac{\sum x_i + 1}{n+2}$$
4. $\hat{\theta}_3 = \frac{n}{n+1}\bar{x}$. $E(\hat{\theta}_3) = \frac{n}{n+1}\theta$. Es sesgado, pero asintóticamente insesgado.
   $$Var(\hat{\theta}_3) = \frac{n^2}{(n+1)^2}Var(\bar{x}) = \frac{n\theta}{(n+1)^2} \rightarrow 0$$
   El estimador es consistente.
   $$ECM(\hat{\theta}_3) = Var(\hat{\theta}_3) + (E(\hat{\theta}_3) - \theta)^2 = \frac{n\theta}{(n+1)^2} + (\frac{n}{n+1} - 1)^2\theta^2 = \frac{\theta^2}{n+1} = \frac{\theta(n+\theta)}{(n+1)^2}$$
   $$ECM(\hat{\theta}_2) = Var(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta}{n}$$
   $$ECM(\hat{\theta}_3) - ECM(\hat{\theta}_2) = \frac{\theta(n\theta - 2n - 1)}{n(n+1)^2}$$
   Si $n < \frac{1}{\theta - 2}$, $\hat{\theta}_3$ tendrá un ECM menor que $\hat{\theta}_2$, lo que es bastante improbable.