Clase Auxiliar 1: Variable Compleja

Profesor: Michal Kowalczyk
Auxiliar: Emilio Vilches

11 de Agosto de 2008

Definición: Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo. Una función $u \in C^2(D)$ se dice subarmónica si $\Delta u \geq 0$ en D .

P1. Algunos ejemplos de funciones subarmónicas:

a) Mostrar que si u es armónica, entonces u^2 y $\nabla u \cdot \nabla u$ son subarmónicas.

b) Mostrar que la función $x^2 + y^2 - 1$ es subarmónica.

c) Sean u_1, u_2 subarmónicas, y $c_1, c_2 > 0$. Mostrar que $c_1 u_1 + c_2 u_2$ es subarmónica.

P2. Sea $u\colon D \to \mathbb{R}$ subarmónica. Demuestre que para todo $(x_0, y_0) \in D$ existe $\rho((x_0, y_0)) > 0$ tal que para $0 < r < \rho((x_0, y_0))$

$$u(x_0, y_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) d\theta$$

P3. Demuestre el principio del máximo para funciones subarmónicas, esto es:
Si $u(x, y)$ es subarmónica en D y continua en ∂D, entonces u no alcanza su máximo en D, pero si en ∂D.

P4. *Principio de comparación.*
Sean $u, v\colon \overline{D} \to \mathbb{R}$ tales que

a) $\Delta u \leq 0$ en D y $u = g$ en ∂D.

b) $\Delta v \geq 0$ en D y $v = h$ en ∂D.

Muestre que si $h \leq g$ entonces $v \leq u$ en D.

P5. Mostrar que si u es armónica entonces $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ y $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ también lo son.

P6. Demostrar que si $u\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es armónica no constante, entonces u es abierta.

P7. Muestre que $u(x, y) = \log\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ es armónica.

P8. Si f es analítica y libre de ceros en U abierto, Muestre que $\phi(z) = \ln|f(z)|$ es armónica.

P9. Sea D un dominio acotado. Sean u, v funciones reales armónicas en D y continuas en $\overline{D}$ tales que $u = v$ en ∂D. Pruebe que $u = v$ en D.

P10. Sea u armónica en $\mathbb{R}^2$ y tal que $u(x, y) \geq 0\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pruebe que u es constante.