

APUNTE DE VARIABLE COMPLEJA

Prof. Salomé Martínez
Aitor Aldunate
Gonzalo Dávila

Enero 2005

Índice general

1. Los números Complejos	1
1.1. El plano complejo	1
1.2. Representación polar y raíces de los números complejos	3
1.3. Esfera de Riemann	4
1.4. Transformaciones de Möbius	7
1.5. Simetrías	13
2. Funciones Analíticas	16
2.1. Las Condiciones de Cauchy-Riemann	16
2.2. Algunas Funciones Analíticas	20
2.3. Series de Potencias	22
3. Integrales	31
3.1. Integral de línea	31
3.2. Fórmula integral de Cauchy	36
3.2.1. Teorema del rectángulo	36
3.2.2. Fórmula integral de Cauchy	39
3.2.3. Los ceros de las funciones analíticas	43

3.3. Aplicaciones a la Fórmula integral de Cauchy	45
3.3.1. Principio de reflexión de Schwarz	45
3.3.2. El teorema del Módulo Máximo	46
4. Funciones Meromorfas	51
4.1. Dominios simplemente conexos	51
4.2. Series de Laurent	55
4.3. Clasificación de singularidades	59
4.4. Teorema de los residuos y sus consecuencias	62
4.4.1. Aplicación a la función inversa	70
4.4.2. Rouché, Hurwitz y corolarios	73
4.4.3. Aplicación del Teorema de los Residuos al cálculo de integrales reales	77
4.4.4. Aplicación al cálculo de series	87
5. Fracciones parciales y productos infinitos	91
5.1. Fracciones Parciales	91
5.2. Productos infinitos	93
6. Funciones Especiales	100
6.1. La Función Gamma	100
6.1.1. La fórmula de Stirling	105
6.2. La función Zeta de Riemann	108
6.2.1. Extensión de $\zeta(z)$ a todo el plano	109
7. Funciones Armónicas	114
7.1. Propiedades Básicas	114

7.2. El Teorema del Valor Medio	116
7.3. Fórmula de Poisson	117
7.4. El Teorema de Schwarz	119
7.5. Principio de Reflexión de Schwarz para funciones armónicas	120
8. Teorema de Riemann	122
8.1. El Teorema de Riemann	122
8.2. Comportamiento en la Frontera	124

Capítulo 1

Los números Complejos

1.1. El plano complejo

El conjunto de los números complejos \mathbb{C} , está formado por todos los pares ordenados (a, b) donde a y b son números reales con las siguientes operaciones:

1. Suma: $(a, b) + (c, d) = (a + b, c + d)$.
2. Producto: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Notemos que el neutro aditivo es $(0, 0)$ y que $(1, 0)$ es el neutro multiplicativo.

Ejercicio 1.1.

Pruebe que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$, con las operaciones antes mencionadas forman un cuerpo.

Usando la correspondencia $(a, 0) \rightarrow a \in \mathbb{R}$ tenemos un isomorfismo entre el subconjunto de los números complejos de la forma $(a, 0)$ con a en \mathbb{R} y \mathbb{R} , por lo que no haremos distinción de éstos a partir de ahora. De ésta forma definimos $i = (0, 1)$, y es fácil verificar que es la única solución de la ecuación $(a, b)^2 = (-1, 0)$.

De ahora en adelante complejos $(a, b) \equiv a + ib$. También podemos notar que por la correspondencia con \mathbb{R}^2 tenemos una representación geométrica de los números complejos, y en base a ésto tenemos las siguientes definiciones.

Definición 1.1.

Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z = a + ib$

(i) Definimos las funciones $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ denominadas Parte real y Parte imaginaria respectivamente, como $\operatorname{Re}(z) = a$ y $\operatorname{Im}(z) = b$, es decir, son las proyecciones de los números complejos en cada uno de los ejes cartesianos, los cuales van a ser denominados como el eje real y eje imaginario respectivamente.

(ii) Definimos el módulo de z que corresponde a la distancia euclídeana del origen $(0,0)$ al punto z como:

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

(iii) Se define el conjugado de z que corresponde al punto simétrico de z con respecto al eje real:

$$\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib.$$

Es fácil ver que el conjugado es un automorfismo de cuerpo, lo que queda propuesto al lector.

A partir de estas definiciones tenemos un conjunto de propiedades que satisfacen los números complejos:

(i) Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$z^2 + w^2 = (z + iw)(z - iw).$$

(ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a, b \neq 0$, entonces

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right),$$

que es una fórmula explícita para el inverso multiplicativo de $a + ib$.

(iii) Sea $z \in \mathbb{C}$, entonces

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

En particular, si $z \neq 0$ entonces

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

(iv)

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{y} \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

(v)

$$\overline{(z + w)} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{y} \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

(vi)

$$|zw| = |z||w| \quad \text{y} \quad \left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

(vii)

$$|\bar{z}| = |z|.$$

1.2. Representación polar y raíces de los números complejos

Definición 1.2.

Definiremos para θ real $e^{i\theta} \equiv \cos \theta + i \sin \theta$.

Para los números complejos z consideramos otro tipo de representación aparte de la representación en las coordenadas cartesianas (x, y) , ésta es la representación en coordenadas polares, las cuales son (r, θ) , donde r corresponde al módulo de z y θ corresponde al ángulo que forma el segmento que une el origen con el número z con respecto a la semirecta real positiva, es decir $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$.

Definición 1.3.

Sea $z \in \mathbb{C}$ con $z \neq 0$ se define el argumento de z como: $\arg\{z\} = \theta$, donde θ es tal que $z = |z|e^{i\theta}$, notemos que θ está definido módulo 2π , y se habla del argumento principal cuando $\theta \in (-\pi, \pi]$. A partir de ahora en toda igualdad que incluya \arg quedará implícita que es una igualdad mod 2π .

Con ésta definición del argumento de z tenemos que

$$\arg\{z_1 z_2\} = \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\},$$

e inductivamente se puede probar fácilmente que

$$\arg\{z_1 z_2 \dots z_n\} = \arg\{z_1\} + \arg\{z_2\} + \dots + \arg\{z_n\}.$$

Con ésto tenemos que

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\arg\{z_1\} + \arg\{z_2\})}.$$

De lo que se tiene que

$$z^n = |z|^n e^{in \arg\{z\}}.$$

Con ésto tenemos que para cualquier número entero $n \geq 2$ y para un número complejo dado $a \neq 0$, se puede resolver la ecuación $z^n = a$. Tenemos que $a = |a|e^{i \arg\{a\}}$ con lo que $z = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg\{a\} + 2k\pi}{n}}$, con $k = 0, 1, \dots, n-1$, son todas soluciones de $z^n = a$. Las soluciones de la ecuación $z^n = 1$ son denominadas raíces de la unidad.

Consideraremos a \mathbb{C} como un espacio topológico con la topología usual de \mathbb{R}^2 que es la que viene dada por el módulo, o simplemente la topología producto inducida por \mathbb{R} . Definiremos el disco de centro z_0 y radio r como

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}.$$

Los discos cerrados los expresaremos como las clausuras de los discos abiertos:

$$\overline{D(z_0, r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}.$$

Conviene extender el plano complejo \mathbb{C} añadiéndole el punto infinito, así tenemos que $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ es un espacio compacto, donde los entornos abiertos de ∞ son los complementarios de los conjuntos compactos de \mathbb{C} . Para ésto vamos a definir lo que se conoce como *la Esfera de Riemann*.

1.3. Esfera de Riemann

Definición 1.4.

Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en \mathbb{C} , diremos que $z_n \rightarrow \infty$ si $|z_n| \rightarrow \infty$.

Definición 1.5.

Se define la *Esfera de Riemann* como la esfera unitaria

$$S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Existe una correspondencia inyectiva entre \mathbb{C} y $S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ la cual viene dada por lo que se llama *proyección esterográfica*, la que está definida por $\mathcal{P} : \mathbb{C} \rightarrow S \setminus \{(0, 0, 1)\}$ y

$$\mathcal{P}(z) = \left(\frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Re} z, \frac{2}{|z|^2 + 1} \operatorname{Im} z, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} \right).$$

Notemos que cuando $z \rightarrow \infty$ se cumple $\mathcal{P}(z) \rightarrow (0, 0, 1)$ lo cual permite dar un sentido preciso a $z = \infty$. Definiendo al punto $N = (0, 0, 1)$, interpretemos geoméricamente la proyección esterográfica:

La proyección esterográfica de z , $\mathcal{P}(z) = Z$ corresponde al punto de intersección de la recta que une a N con el punto z con la esfera unitaria.

Así tenemos que $\mathcal{P}(\mathbb{C}) = S \setminus \{(0, 0, 1)\}$, y $\mathcal{P}(\infty) = (0, 0, 1)$.

Proposición 1.1.

Sea $\mathcal{P}^{-1} : S \setminus \{(0, 0, 1)\} \rightarrow \mathbb{C}$ está dada por

$$\mathcal{P}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Formalmente $\mathcal{P}^{-1}(0, 0, 1) = \infty$.

Ejercicio 1.2.

- (i) Demuestre que $z, z' \in \mathbb{C}$ corresponden a puntos diametralmente opuestos en la esfera S si y solamente si $z\bar{z}' = -1$.

(ii) Sea $(x_1, x_2, x_3) = \mathcal{P}(z)$, demuestre que:

a) $x_3 < 0$ corresponde a $|z| < 1$.

b) $x_3 > 0$ corresponde a $|z| > 1$.

c) $x_3 = 0$ corresponde a $|z| = 1$.

Definición 1.6.

Un círculo en S es de la forma

$$\{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D\} \cap S.$$

Notemos que sin pérdida de generalidad podemos suponer $A^2 + B^2 + C^2 = 1$ y $0 \leq D < 1$.

Proposición 1.2.

Sea \mathcal{C} un círculo en S , y $T = \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{C} \setminus \{(0, 0, 1)\})$, luego

(a) Si \mathcal{C} contiene a $(0, 0, 1)$, entonces T es una recta.

(b) Si \mathcal{C} no contiene a $(0, 0, 1)$, entonces T es una circunferencia.

Recíprocamente si T es una recta en \mathbb{C} o T es una circunferencia, entonces $\mathcal{C} = \mathcal{P}(T)$ es un círculo en S , el cual contiene a $(0, 0, 1)$ si y sólo si T es una recta.

Demostración:

Sea $\mathcal{C} = \{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = D\} \cap S$ un círculo en S , y $z \in \mathcal{P}^{-1}(\mathcal{C})$, entonces

$$\frac{2A}{|z|^2 + 1} \operatorname{Re} z + \frac{2B}{|z|^2 + 1} \operatorname{Im} z + C \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = D,$$

luego

$$2A \operatorname{Re} z + 2B \operatorname{Im} z + (C - D)|z|^2 = D + C. \quad (1.1)$$

Ahora tenemos que si $C = D$, (1.1) es la ecuación de una recta, pero $C = D$ es equivalente a que $(0, 0, 1) \in \mathcal{C}$.

Si $C \neq D$, entonces (1.1) es la ecuación de una circunferencia.

Queda propuesto al lector demostrar la recíproca. ■

Conformalidad de la proyección estereográfica

Teorema 1.1.

El ángulo entre dos curvas en \mathbb{C} y el ángulo entre las proyecciones de esas dos curvas en S es igual y recíprocamente.

Observación 1.1.

A esta propiedad de la proyección estereográfica se le llama *conformalidad*, y cualquier función que la cumpla se dirá *conforme* o *equivalentemente* que *preserva ángulos*.

Demostración:

Sean $(\varphi_1(t), \gamma_1(t), \eta_1(t))$, $(\varphi_2(t), \gamma_2(t), \eta_2(t))$ dos curvas en S , tales que $\|(\varphi'_k, \gamma'_k, \eta'_k)\| \neq 0$ para $k = 1, 2$. Notemos que

$$\varphi_1^2 + \gamma_1^2 + \eta_1^2 = 1 \text{ y } \varphi_2^2 + \gamma_2^2 + \eta_2^2 = 1,$$

pues las curvas están en S .

Supongamos que existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{x}^* = (\varphi_1(t_0), \gamma_1(t_0), \eta_1(t_0)) = (\varphi_2(t_0), \gamma_2(t_0), \eta_2(t_0)) \neq (0, 0, 1).$$

El ángulo α entre las dos curvas por definición es tal que

$$\cos \alpha = \frac{\langle (\varphi'_1(t_0), \gamma'_1(t_0), \eta'_1(t_0)), (\varphi'_2(t_0), \gamma'_2(t_0), \eta'_2(t_0)) \rangle}{\sqrt{\varphi_1'^2(t_0) + \gamma_1'^2(t_0) + \eta_1'^2(t_0)} \sqrt{\varphi_2'^2(t_0) + \gamma_2'^2(t_0) + \eta_2'^2(t_0)}}.$$

Ahora, recordemos que

$$\mathcal{P}^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3},$$

entonces las imágenes correspondientes en \mathbb{C} son

$$\vec{z}_1(t) = \frac{\varphi_1(t)}{1 - \eta_1(t)} + i \frac{\gamma_1(t)}{1 - \eta_1(t)},$$

$$\vec{z}_2(t) = \frac{\varphi_2(t)}{1 - \eta_2(t)} + i \frac{\gamma_2(t)}{1 - \eta_2(t)},$$

con lo que

$$\vec{z}_1'(t) = \frac{\varphi_1'(t)(1 - \eta_1(t)) + \eta_1'(t)\varphi_1(t) + i\{\gamma_1'(t)(1 - \eta_1(t)) + \gamma_1(t)\eta_1'(t)\}}{(1 - \eta_1)^2},$$

y

$$\vec{z}_2'(t) = \frac{\varphi_2'(t)(1 - \eta_2(t)) + \eta_2'(t)\varphi_2(t) + i\{\gamma_2'(t)(1 - \eta_2(t)) + \gamma_2(t)\eta_2'(t)\}}{(1 - \eta_2)^2},$$

pero tenemos que

$$\varphi_k \varphi'_k + \eta_k \eta'_k + \gamma_k \gamma'_k = 0,$$

pues por (1.3) tenemos que es la derivada de una constante. Calculemos $\langle z'_1(t_0), z'_2(t_0) \rangle$, y para ello recordemos que $\eta_1(t_0) = \eta_2(t_0)$, $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ y $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. Entonces

$$\langle z'_1(t_0), z'_2(t_0) \rangle = \frac{\varphi_1'(t_0)\varphi_2'(t_0) + \gamma_1'(t_0)\gamma_2'(t_0) + \eta_1'(t_0)\eta_2'(t_0)}{(1 - \eta_1(t_0))^2}.$$

Veamos ahora que pasa con $|z_1'(t)|$, para ello ocupemos (1.3),

$$\begin{aligned} |z_1(t)| &= \frac{[\varphi_1'(t)(1 - \eta_1(t)) + \eta_1'(t)\varphi_1(t)]^2 + [\gamma_1'(t)(1 - \eta_1(t)) + \eta_1'(t)\gamma_1(t)]^2}{(1 - \eta_1(t))^4} \\ &= \frac{\gamma_1'^2(t) + \varphi_1'^2(t) + \gamma_1'^2(t)}{(1 - \eta_1(t))^2}. \end{aligned}$$

De aquí se concluye. ■

Ejercicio 1.3.

- (I) Sean L_1, L_2 dos rectas en \mathbb{C} , $\{z_0\} = L_1 \cap L_2$, $\mathcal{P}(L_1), \mathcal{P}(L_2)$ se intersectan en $\mathcal{P}(z_0)$ y en $(0, 0, 1)$. Pruebe que los ángulos en $(0, 0, 1)$ y en $\mathcal{P}(z_0)$ son iguales.
- (II) Sean L_1, L_2 dos rectas paralelas en \mathbb{C} , pruebe que $\mathcal{P}(L_1), \mathcal{P}(L_2)$ son dos círculos que se intersectan en $(0, 0, 1)$ tangentes.

1.4. Transformaciones de Möbius

Dentro de las funciones de variable compleja tenemos las transformaciones de Möbius, las cuales tienen diversas propiedades que las hacen interesantes como para considerarlas en una sección aparte.

Definición 1.7.

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ constantes tales que $ad - bc \neq 0$, entonces definimos la transformación de Möbius $M(z)$ como

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Notar que si $ad - bc = 0$ entonces $M(z)$ es constante.

Esta función puede ser extendida a \mathbb{C}_∞ de manera natural como

$$M(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} M(z) = \frac{a}{c}.$$

Notar que la función M tiene una inversa dada por

$$M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a},$$

de donde $M^{-1}(\infty) = -d/c$, con lo que tenemos que M^{-1} es también una transformación de Möbius.

Proposición 1.3.

La composición de transformaciones de Möbius es también una transformación de Möbius.

Demostración:

Sean $f, g : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ dos transformaciones de Möbius,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(z) = \frac{rz + s}{tz + u},$$

luego

$$\begin{aligned} f \circ g(z) &= f\left(\frac{rz + s}{tz + u}\right) \\ &= \frac{a\left(\frac{rz+s}{tz+u}\right) + b}{c\left(\frac{rz+s}{tz+u}\right) + d} \\ &= \frac{ar z + as + btz + bu}{cr z + cs + dtz + du} \\ &= \frac{(ar + bt)z + (as + bu)}{(cr + dt)z + (cs + du)}. \end{aligned}$$

Ahora falta probar que

$$(ar + bt)(cs + du) - (as + bu)(cr + dt) \neq 0,$$

para ello ocuparemos que $ad - bc \neq 0$ y $ru - st \neq 0$, pues f, g son transformaciones de Möbius.

$$\begin{aligned} (ar + bt)(cs + du) - (as + bu)(cr + dt) &= arcs + ardu + btcs + btdu \\ &\quad - ascr - astd - bucr - budt \\ &= ardu + btcs - asdt - bucr \\ &= ad(ru - st) - bc(ur - ts) \\ &= (ad - bc)(ru - st) \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Con lo que se concluye la demostración. ■

Con ésto tenemos que las transformaciones de Möbius forman un grupo.

Definición 1.8.

Definiremos las siguientes transformaciones elementales:

(i) *Traslación paralera:*

$$f(z) = z + a, \quad a \in \mathbb{C}.$$

(ii) *Homotecia:*

$$f(z) = kz, \quad k > 0, k \in \mathbb{R}.$$

(iii) *Rotación:*

$$f(z) = e^{i\theta}z, \quad \theta \text{ fijo.}$$

(iv) *Inversión:*

$$f(z) = \frac{1}{z}.$$

Ejercicio 1.4.

Demuestre que toda Transformación de Möbius es una composición de (I), (II), (III), (IV).

Teorema 1.2.

La imagen de una recta o de una circunferencia por una Transformación de Möbius es una recta o una circunferencia.

Demostración:

El teorema no afirma que la imagen de una recta sea una recta ni que la de una circunferencia sea una circunferencia, sino que las rectas pueden ser transformadas en circunferencias y viceversa. Sea \mathcal{C} la circunferencia de centro $z_0 = (a, b)$ y radio $r > 0$, es decir:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{C} : (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2\}.$$

Desarrollando y multiplicando por un número $A \neq 0$ arbitrario tenemos:

$$A(x^2 + y^2) - 2Aax - 2Aby + A(a^2 + b^2 - r^2) = 0,$$

luego las circunferencias son los conjuntos de puntos que cumplen una ecuación del tipo

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \tag{1.2}$$

donde $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 - AD > 0$ (ya que $B^2 + C^2 - AD = A^2r^2$). Recíprocamente, el conjunto de puntos que cumple una ecuación de estas condiciones es una circunferencia.

Por otra parte si $A = 0$ la ecuación se reduce a $2Bx + 2Cy + D = 0$, la cual admitiendo $(B, C) \neq 0$, es la ecuación de una recta, y toda recta está formada por los puntos que cumplen una ecuación de este tipo.

En resumen las circunferencias y las recta son los conjuntos de puntos (x, y) que cumplen la ecuación del tipo (1.2), donde $A \neq 0$ y $B^2 + C^2 - AD > 0$ o $A = 0$ y $(B, C) \neq 0$.

Si consideramos (x, y) como un número complejo z , entonces (1.2) equivale a

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \tag{1.3}$$

donde $E = B + Ci$, y las condiciones sobre los coeficientes son $A = 0$ y $E \neq 0$ o bien $A \neq 0$ y $E\bar{E} - AD > 0$.

Convendremos en que ∞ pertenece a cualquier recta y no pertenece a ninguna circunferencia, luego una recta es un conjunto de números complejos determinados por una ecuación del tipo (1.3) con $A = 0$ más el punto ∞ y una circunferencia es un conjunto de números complejos determinados por una ecuación de tipo (1.3) con $A \neq 0$.

Consideremos en primer lugar la función $M(z) = \frac{1}{z}$. El conjunto de los números complejos $z \neq 0$ que cumplen la ecuación (1.3) se transforma en el conjunto de los números complejos no nulos que cumplen

$$A\frac{1}{z\bar{z}} + \bar{E}\frac{1}{z} + E\frac{1}{z} + D = 0,$$

o equivalentemente

$$Dz\bar{z} + Ez + \bar{E}\bar{z} + A = 0.$$

Si $A \neq 0$ y $D \neq 0$ (con lo que $z = 0$ no cumple (1.2)) tenemos que el conjunto inicial era una circunferencia y su imagen también. Si $A \neq 0$ pero $D = 0$ entonces el conjunto inicial era una circunferencia y el final es una recta. El 0 pertenecía a la circunferencia y su imagen es ∞ , que pertenece a la recta.

Si $A = 0$ y $D \neq 0$ tenemos una recta que no pasa por 0 y se transforma en una circunferencia. El 0 está en la imagen porque es la imagen de ∞ , que estaba en la recta. Finalmente si $A = D = 0$ tenemos una recta que pasa por el origen y que se transforma en otra recta que pasa por el origen (de modo que 0 y ∞ se intercambian).

Así pues el teorema es cierto para la función $\frac{1}{z}$. Análogamente se puede demostrar que es válido para una función de la forma $M(z) = az + b$, aunque también se puede probar geoméricamente teniendo en cuenta que en tal caso $M(z)$ corresponde a una homotecia $z \mapsto |a|z$, seguida de la rotación de ángulo $\arg\{z\}$ y seguida de la traslación $z \mapsto z + b$, y todas estas operaciones conservan rectas y circunferencias.

En el caso general (si $c \neq 0$) expresamos

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{z(cz + d)},$$

con lo que M se expresa como transformación de las Transformaciones de Möbius que ya sabemos que conservan o intercambian rectas y circunferencias, a saber, $z \mapsto cz + d$, seguida de $z \mapsto \frac{1}{z}$, seguida por

$$z \mapsto \frac{bc - ad}{c}z + \frac{1}{c}.$$

El caso $c = 0$ es claro. ■

Con más precisión, si M es una Transformación de Möbius y $M(z_0) = \infty$, entonces las imágenes de las rectas y circunferencias que pasan por z_0 han de contener a ∞ , luego han de ser rectas, y las imágenes de las rectas o circunferencias que no pasan por z_0 no han de contener a *infity*, luego han de ser circunferencias.

Ejercicio 1.5.

Encuentre una fórmula $\mathcal{P}^{-1} \circ \frac{1}{z} \circ \mathcal{P}$, y así demuestre el teorema anterior de manera alternativa.

Teorema 1.3.

Las Transformaciones de Möbius preservan ángulos, es decir, son conformes.

Demostración:

Por el teorema 1.1 y el ejercicio 1.4 basta decir que $1/z$ preserva ángulos. ■

Proposición 1.4.

Toda Transformación de Möbius M deja fijo al menos un punto de \mathbb{C}_∞ y si M no es la identidad entonces tiene a lo sumo dos puntos fijos.

Demostración:

Sea

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Si $c = 0$ entonces se cumple $M(\infty) = \infty$, luego M tiene un punto fijo. Si $a = d$ entonces ∞ es el único punto fijo, y si $a \neq d$ $z = \frac{b}{d-a}$ es otro punto fijo, luego en total hay a lo sumo dos puntos fijos. Ahora supongamos $c \neq 0$, con lo que $M(\infty) = \frac{a}{c} \neq \infty$. Tampoco lo es el punto $-\frac{d}{c}$, pues su imagen es ∞ . Entre los puntos restantes, la ecuación $M(z) = z$ equivale a

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

que tiene una o dos soluciones en \mathbb{C} . ■

Observación 1.2.

Con esta proposición tenemos que si una Transformación de Möbius tiene tres puntos fijos entonces es la identidad.

Ejercicio 1.6.

- (i) *Pruebe que toda Transformación de Möbius con sólo un punto fijo $z_1 \in \mathbb{C}$ se puede escribir como:*

$$\frac{1}{w - z_1} = \frac{1}{z - z_1} + b, \quad b \neq 0, \quad b \in \mathbb{C}.$$

- (ii) *Demuestre que toda Transformación de Möbius $w = L(z)$ con dos puntos fijos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se puede escribir como:*

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = a \frac{z - z_1}{z - z_2}, \quad a \in \mathbb{C}.$$

- (iii) *Si una Transformación de Möbius L tiene dos puntos fijos $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ pruebe que $L'(z_1)L'(z_2) = 1$.*

Teorema 1.4.

Si z_1, z_2, z_3 son tres números distintos en \mathbb{C}_∞ y $w_1 = 0, w_2 = \infty, w_3 = 1$ existe una única Transformación de Möbius M que cumple $M(z_1) = w_1, M(z_2) = w_2, M(z_3) = w_3$.

Demostración:

La unicidad es consecuencia del Teorema 1.4. Supongamos que z_1, z_2, z_3 son finitos. Es claro que M debe ser de la forma

$$M(z) = K \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

y con la condición $M(z_3) = 1$

$$K = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1},$$

por lo tanto

$$M(z) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

■

Definición 1.9.

Se define la razón cruzada (z, z_1, z_2, z_3) por

$$(z, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Ejercicio 1.7.

Sean z_1, z_2, z_3, z_4 distintos en \mathbb{C} , pruebe que $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ si y sólo si z_1, z_2, z_3, z_4 están en un círculo o en una recta.

Proposición 1.5.

Sean z_1, z_2, z_3, z_4 puntos distintos, y T una transformación de Möbius, entonces

$$(Tz_1, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Demostración:

Sea $M(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$, tenemos entonces que:

$$M \circ T^{-1}(Tz_2) = 0, \quad M \circ T^{-1}(Tz_3) = \infty, \quad M \circ T^{-1}(Tz_4) = 1,$$

entonces

$$M \circ T^{-1}(z) = (z, Tz_2, Tz_3, Tz_4),$$

y por lo tanto

$$(Tz, Tz_2, Tz_3, Tz_4) = M \circ T^{-1}(Tz) = M(z) = (z, z_2, z_3, z_4).$$

■

Con ésto tenemos una representación explícita para la Transformación de Möbius T que lleva $z_1 \sim w_1, z_2 \sim w_2, z_3 \sim w_3$:

$$(Tz, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

Observación 1.3.

La razón cruzada preserva orientación en el sentido que muestra la figura

Ejemplo 1.1.

Encontrar una transformación de Möbius que cumple $\text{Im } z > 0 \sim D(0, 1)$.

Solución:

Vamos a tomar los puntos $z_1 = -1$, $z_2 = 0$, $z_3 = 1$, queremos encontrar la transformación T tal que $T(-1) = 1$, $T(0) = i$, $T(1) = -1$, y así $(Tz, 1, i, -1) = (z, -1, 0, 1)$. Entonces

$$\begin{aligned} \frac{1 + 1}{1 - i} \frac{Tz - i}{Tz + 1} &= \frac{-1 - 1}{-1 - 0} \frac{z - 0}{z - 1} \\ &= \frac{-2z}{1 - z} \\ &= \frac{2z}{z - 1}. \end{aligned}$$

Así

$$Tz = \frac{z - i}{iz - 1}.$$

1.5. Simetrías

Si tenemos como eje de simetría la recta $L : \text{Im } z = 0$, tenemos que el punto simétrico de z con respecto a L es \bar{z} .

Definición 1.10.

Sea \mathcal{C} un círculo (o una recta), z_1, z_2, z_3 puntos de \mathcal{C} . Para $z \in \mathbb{C}$ definimos z^* , punto simétrico de z con respecto a \mathcal{C} como el único punto que satisface

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}.$$

Hay que probar que si T es una Transformación de Möbius que lleva \mathcal{C} a $\text{Im } z = 0$ entonces $Tz^* = \overline{Tz}$, es decir, vamos a probar que z^* está bien definido. Para ello primero se propone al lector realizar el siguiente ejercicio:

Ejercicio 1.8.

Sea \hat{T} una Transformación de Möbius tal que $\hat{T}(\text{Im } z = 0) = (\text{Im } z = 0)$, entonces \hat{T} se puede escribir con coeficientes reales, es decir:

$$\hat{T}(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Tenemos $M(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ y $T : \mathcal{C} \sim \text{Im } z = 0$ una Transformación de Möbius, con lo que $T \circ M^{-1}$ se puede escribir con coeficientes reales. Así

$$\begin{aligned} Tz^* &= T \circ M^{-1}(Mz^*) \\ &= T \circ M^{-1}(\overline{Mz}) \\ &= \overline{T \circ M^{-1}(Mz)} \text{ pues } T \circ M^{-1} \text{ tiene solamente coeficientes reales} \\ &= \overline{Tz}. \end{aligned}$$

■

Proposición 1.6.

Sea \mathcal{C} un círculo (o una recta), entonces $z = z^*$ si y sólo si $z \in \mathcal{C}$.

Proposición 1.7.

Sean $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ círculos (o rectas) en \mathbb{C} , si T es una Transformación de Möbius tal que $T(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$, entonces T transforma puntos simétricos con respecto a \mathcal{C}_1 en puntos simétricos con respecto a \mathcal{C}_2 .

Demostración:

Sean z_1, z_2, z_3 puntos distintos en \mathcal{C}_1 entonces tenemos que $Tz_1, Tz_2, Tz_3 \in \mathcal{C}_2$, así

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3),$$

luego

$$\begin{aligned} ((Tz)^*, Tz_1, Tz_2, Tz_3) &= \overline{(Tz, Tz_1, Tz_2, Tz_3)} \\ &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \\ &= (z^*, z_1, z_2, z_3) \\ &= (Tz^*, Tz_1, Tz_2, Tz_3). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(Tz)^* = Tz^*.$$

■

Ejemplo 1.2.

Sea \mathcal{C} un círculo de centro α y radio R , encontrar el punto simétrico z^* con respecto a \mathcal{C} para cada $z \in \mathbb{C}$.

Solución:

Sean z_1, z_2, z_3 puntos distintos en \mathcal{C} , entonces

$$\begin{aligned}
 (z^*, z_1, z_2, z_3) &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \\
 &= \overline{(z - \alpha, z_1 - \alpha, z_2 - \alpha, z_3 - \alpha)} \\
 &= (\overline{z - \alpha}, \overline{z_1 - \alpha}, \overline{z_2 - \alpha}, \overline{z_3 - \alpha}) \\
 &= (\overline{z - \alpha}, \frac{R^2}{z_1 - \alpha}, \frac{R^2}{z_2 - \alpha}, \frac{R^2}{z_3 - \alpha}) \text{ pues } (\overline{z - \alpha})(z - \alpha) = R^2 \text{ para todo } z \in \mathbb{C} \\
 &= (\frac{R^2}{\overline{z - \alpha}}, z_1 - \alpha, z_2 - \alpha, z_3 - \alpha) \\
 &= (\frac{R^2}{\overline{z - \alpha}} + \alpha, z_1, z_2, z_3).
 \end{aligned}$$

Luego

$$z^* = \frac{R^2}{\overline{z - \alpha}} + \alpha.$$

Tenemos que

$$(z^* - \alpha)(\overline{z - \alpha}) = R^2$$

lo que equivale a que

$$|z^* - \alpha| = \frac{R^2}{|\overline{z - \alpha}|} = \frac{R^2}{|z - \alpha|}.$$

Además

$$\arg(z^* - \alpha) + \arg(\overline{z - \alpha}) = 0 \text{ mod } 2\pi,$$

lo que implica que

$$\arg(z^* - \alpha) = \arg(z - \alpha) \text{ mod } 2\pi,$$

y por lo tanto z y z^* están en un mismo rayo que sale de α .

Notemos que el punto simétrico de α es ∞ .

Ejercicio 1.9.

Encontrar una Transformación de Möbius que lleve los círculos $\mathcal{C}_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1/4| = 1/4\}$ en círculos concéntricos.

Capítulo 2

Funciones Analíticas

2.1. Las Condiciones de Cauchy-Riemann

Definición 2.1.

Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función, con $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto y $z \in U$. Si el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad (2.1)$$

existe, entonces este límite se denota $f'(z)$. En este caso se dice que f es diferenciable en z . Si el límite existe para todo z perteneciente a U , diremos que f es diferenciable en U .

Proposición 2.1.

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en $a \in U$ entonces f es continua en U .

Demostración:

En efecto,

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow a} |f(z) - f(a)| &= \left[\lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} \right] \cdot \left[\lim_{z \rightarrow a} |z - a| \right] \\ &= |f'(a)| \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Proposición 2.2.

Si $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ es diferenciable en z y es de la forma $f = u + iv$, entonces $\partial_x f$ y $\partial_y f$ existen y satisfacen la ecuación de Cauchy-Riemann

$$\partial_y f = i \partial_x f,$$

o, equivalentemente

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v.\end{aligned}$$

Demostración:

Primero supongamos que $h \rightarrow 0$ es real, entonces

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \rightarrow \partial_x f.$$

Por otra parte supongamos que $h = i\eta$ con $\eta \in \mathbb{R}$ luego

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f(x, y+\eta) - f(x, y)}{i\eta} \rightarrow \frac{\partial_y f}{i}.$$

Como f es diferenciable en z el límite tiene que ser el mismo sin importar el camino que se tome, y por lo tanto

$$\partial_y f = i\partial_x f.$$

Como $f = u + iv$ y $\partial_y f = i\partial_x f$, entonces

$$\partial_y u + i\partial_y v = i(\partial_x u + i\partial_x v),$$

luego igualando las partes real e imaginaria

$$\begin{aligned}\partial_x u &= \partial_y v \\ \partial_y u &= -\partial_x v.\end{aligned}$$

■

Observación 2.1.

La recíproca de la proposición anterior no es cierta. Existen funciones que no son diferenciables en un punto y que sin embargo las derivadas parciales existen y satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann.

Ejemplo 2.1. Consideremos la función

$$f(z) = f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x+iy)}{x^2+y^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

$f = 0$ en ambos ejes así que $\partial_x f = \partial_y f = 0$ en el origen, pero

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

no existe, pues si tomamos el límite por la recta $y = \alpha x$

$$\frac{f(z) - f(0)}{z} \equiv \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \text{ para } z \neq 0,$$

y por lo tanto el límite depende de α .

Proposición 2.3.

Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función tal que $\partial_x f$ y $\partial_y f$ existen en una vecindad Ω de $z \in U$, $\Omega \subseteq U$. Si $\partial_x f$ y $\partial_y f$ son continuas en z y $\partial_y f = i\partial_x f$ entonces f es diferenciable en z .

Demostración:

Sean $f = u + iv$, $h = i\eta$.

Probaremos que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \rightarrow \partial_x f(z) = \partial_x u(z) + i\partial_x v(z)$$

cuando $h \rightarrow 0$. Por el Teorema de Valor Medio (para funciones reales con variable real)

$$\begin{aligned} \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x+\xi, y)}{\xi + i\eta} + \frac{u(x+\xi) - u(x, y)}{\xi + i\eta} \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y u(x+\xi, y+\theta_1\eta) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x u(x+\theta_2\xi, y), \end{aligned}$$

y análogamente tenemos que

$$\frac{v(z+h) - v(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y v(x+\xi, y+\theta_3\eta) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x v(x+\theta_4\xi, y),$$

para algunos $\theta_k \in (0, 1)$, $k = 1, 2, 3, 4$. Así tenemos que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} [\partial_y u(z_1) + i\partial_y v(z_2)] + \frac{\xi}{\xi + i\eta} [\partial_x u(z_3) + i\partial_x v(z_4)],$$

donde $|z_k - z| \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$, $k = 1, 2, 3, 4$. Como $\partial_y f = i\partial_x f$ en z podemos expresar $\partial_x f(z)$ como

$$\frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y f + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x f$$

y así obtener

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \partial_x f(z) &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} [(\partial_y u(z_1) - \partial_y u(z)) + i(\partial_y v(z_2) - \partial_y v(z))] \\ &\quad + \frac{\xi}{\xi + i\eta} [(\partial_x u(z_3) - \partial_x u(z)) + i(\partial_x v(z_4) - \partial_x v(z))]. \end{aligned}$$

Finalmente, como

$$\left| \frac{\eta}{\xi + i\eta} \right|, \left| \frac{\xi}{\xi + i\eta} \right| \leq 1,$$

concluimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \partial_x f(z).$$

■

Ejercicio 2.1.

Sea $f(z) = |z|^2$, pruebe que f es diferenciable solamente en 0 .

Definición 2.2.

Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ una función, con $U \subseteq \mathbb{C}$ un abierto, entonces f es analítica en $z \in U$ si es diferenciable en una vecindad de z . Así mismo, si $K \subset U$, diremos que f es analítica en K si es diferenciable en un abierto que contiene a K .

Ejemplo 2.2.

- (i) Pruebe que si $f = u + iv$ es analítica en un abierto U y u es constante en U , entonces f es constante.
- (ii) Pruebe que si $f = u + iv$ es analítica en un abierto U y $|f|$ es constante en U , entonces f es constante.

Solución:

- (i) Si f es analítica, entonces cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, como además u es constante se tiene que

$$\partial_x u = \partial_y u = 0$$

y por Cauchy-Riemann

$$\partial_x v = \partial_y v = 0$$

con lo que se concluye.

- (ii) Si $|f| = c \neq 0$ el resultado es inmediato. Si no, tenemos que $u^2 + v^2 \equiv c \neq 0$, con lo que derivando con respecto a cada variable tenemos que

$$u\partial_x u + v\partial_x v \equiv 0$$

y

$$u\partial_y u + v\partial_y v \equiv 0.$$

Ocupando las ecuaciones de Cauchy-Riemann tenemos que

$$u\partial_x u - v\partial_y u \equiv 0$$

y

$$v\partial_x u - u\partial_y u \equiv 0,$$

con lo que llegamos a que

$$(u^2 + v^2)\partial_x u \equiv 0$$

, luego $\partial_x u = \partial_y v \equiv 0$. Análogamente $\partial_y u = \partial_x v \equiv 0$, y por lo tanto f es constante.

Definición 2.3.

Una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ se dirá entera si es analítica en todo \mathbb{C} .

Proposición 2.4.

Sea f una función analítica, y $g(z, \bar{z}) = f\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right)$, con $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. Entonces g es independiente de \bar{z} .

Demostración:

En efecto,

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{1}{2} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{1}{2i},$$

y por Cauchy-Riemann tenemos que $\frac{\partial f}{\partial x} = i \frac{\partial f}{\partial y}$, por lo tanto

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0.$$

■

Observación 2.2.

La proposición anterior es más explícitamente:

$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$ si y sólo si f cumple las condiciones de Cauchy-Riemann.

2.2. Algunas Funciones Analíticas

En esta sección vamos a extender la conocida función exponencial a una función de variable compleja. Queremos una función entera que cumpla

(i)

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$$

(ii)

$$f(x) = e^x \text{ para todo real } x.$$

Para que cumpla (i) y (ii), debemos tener entonces

$$f(z) = f(x + iy) = f(x)f(iy) = e^x f(iy).$$

Definiendo $f(iy) \equiv u(y) + iv(y)$, tenemos que

$$f(z) = e^x u(y) + ie^x v(y).$$

Para que f sea analítica necesitamos que se cumplan las condiciones de Cauchy-Riemann, y por lo tanto $u(y) = v'(y)$ y $u'(y) = -v(y)$, con lo que tenemos que $u'' = -u$, entonces consideraremos

$$u(y) = \alpha \cos y + \beta \sin y$$

$$v(y) = -u'(y) = -\beta \cos y + \alpha \sin y.$$

Por la condición (ii) tenemos que $u(0) = \alpha = 1$, y $v(0) = -\beta = 0$, con lo que concluimos que

$$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Es fácil probar que f es entera ocupando las propiedades (i) y (ii), lo que queda propuesto al lector.

Proposición 2.5.

Las siguientes propiedades se cumplen para $f(z) = e^z$:

- (i) $|e^z| = e^x$.
- (ii) $e^z \neq 0$.
- (iii) $e^{iy} = \cos y + i \sin y$.
- (iv) $e^z = \alpha$ tiene infinitas soluciones para cualquier $\alpha \neq 0$.
- (v) $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Ejercicio 2.2.

Pruebe la proposición anterior.

Definición 2.4.

Se definen las funciones seno y coseno como

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Teorema 2.1.

Las funciones seno y coseno complejas extienden a las correspondientes funciones reales. Además cumplen que:

- (i) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
- (ii) $\sin a + b = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
- (iii) $\cos a + b = \cos a \cos b - \sin a \sin b$.
- (iv) Si $k \in \mathbb{Z}$, entonces $\sin z + 2k\pi = \sin z$, y $\cos z + 2k\pi = \cos z$.

(v) $\cos z = \cos(-z)$, $\sin(-z) = -\sin z$.

Sin embargo, no es cierto que $|\sin z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$. Por ejemplo, para todo número real x se cumple

$$\cos ix = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sin ix = i \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

que claramente no son acotadas.

Ejercicio 2.3.

Demuestre la identidad $\sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.

Ejemplo 2.3.

Suponga que $|c_n| \leq Me^{-nr}$, con M, r constantes positivas. Demuestre que la función $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(nz)$ es analítica en $\{|\operatorname{Im} z| < r\}$ y satisface $f(z + 2\pi) = f(z)$ y $f(-z) = -f(z)$. *Hint: Pruebe que f puede descomponerse en suma y composición de funciones analíticas.*

Solución:

Tenemos que f se puede escribir como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left[\frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i} \right].$$

Definamos $f_1(z) = \sum c_n e^{inz}$ y $f_2(z) = \sum c_n e^{-inz}$, y veamos donde son analíticas.

Consideremos $S(w) = \sum c_n w^n$, y tenemos que $\sqrt[n]{|c_n|} \leq e^{-r}$, y por lo tanto $\limsup \sqrt[n]{|c_n|} \leq e^{-r}$.

Con lo que tenemos que el radio de convergencia de la serie S es $R \geq \frac{1}{e^{-r}} = e^r$.

Ahora si $|\operatorname{Im} z| < r$, entonces $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} < e^r$ y $|e^{-iz}| = e^{\operatorname{Im} z} < e^r$.

Por lo tanto $S(e^{iz})$, $S(e^{-iz})$ son analíticas si $|\operatorname{Im} z| < r$, y así f es analítica.

Claramente

$$\begin{aligned} f(z + 2\pi) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(nz + n2\pi) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(nz) \\ &= f(z). \end{aligned}$$

2.3. Series de Potencias

Definición 2.5.

Sea $K \subseteq \mathbb{C}$ un conjunto, $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ na sucesión de funciones continuas, diremos que f_n

converge a f uniformemente en K si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número $N \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier natural $n \geq N$

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \text{ para todo } z \text{ en } K.$$

Proposición 2.6.

Si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones continuas que convergen uniformemente a f en el conjunto K , entonces f es también continua.

Demostración:

Dado z_0 en K , queremos demostrar que para cualquier $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ con $z \in K$, entonces $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Como f_n converge uniformemente a f , existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_N(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ y } |f_N(z_0) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Puesto que f_N es continua, existe $\delta > 0$ tal que si $|z - z_0| < \delta$ entonces $|f_N(z) - f_N(z_0)| < \varepsilon/3$, luego

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |f(z) - f_N(z) + f_N(z) - f_N(z_0) + f_N(z_0) - f(z_0)| \\ &\leq |f(z) - f_N(z)| + |f_N(z) - f_N(z_0)| + |f_N(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Proposición 2.7.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en K , tal que $|f_n| < M_n$ en K , con $\sum_{n \in \mathbb{N}} M_n < \infty$. Entonces la sucesión de funciones g_k definida por

$$g_k(z) = \sum_{n=0}^k f_n(z),$$

converge uniformemente a f continua que denotaremos $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

Demostración:

Demostremos que g_k es una sucesión de Cauchy,

$$\begin{aligned} |g_k(z) - g_l(z)| &= \left| \sum_{n=k}^l f_n(z) \right| \\ &\leq \sum_{n=k}^l |f_n(z)| \\ &\leq \sum_{n=k}^l M_n \longrightarrow 0, \text{ cuando } k, l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Luego $\{g_k(z)\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy independiente de z , con lo que tenemos que $g_k(z) \rightarrow f(z)$. Probemos ahora que g_k converge uniformemente.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) - \sum_{n=0}^k f_n(z) \right| &= \left| \sum_{n=k+1}^{\infty} f_n(z) \right| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |f_n(z)| \\ &\leq \sum_{n=k+1}^{\infty} M_n \rightarrow 0, \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

■

Definición 2.6.

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números reales, definiremos el límite superior de la sucesión como

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} a_k.$$

Notemos que la sucesión $b_n = \sup_{k \geq n} a_k$ es decreciente.

Observación 2.3.

El $\limsup a_n$ es el supremo de los puntos de acumulación de la sucesión. Es más, existe una subsucesión $\{a_{n_k}\}$ que converge a $\limsup a_n$.

Proposición 2.8.

Sea $L < \infty$ tal que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = L,$$

entonces:

- (i) Para todo N , y para todo $\varepsilon > 0$, existe $k > N$ tal que $a_k \geq L - \varepsilon$.
- (ii) Para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que $a_k \leq L + \varepsilon$, para cualquier $k > N$.
- (iii) Si $c \geq 0$, entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} ca_n = c \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

- (iv) Si $c_n \rightarrow c > 0$, entonces

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} c_n a_n = c \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Definición 2.7.

Sea $\sum c_k z^k$ una serie de potencias, con $c_k \in \mathbb{C}$, se define el radio de convergencia R de la serie como

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k}} \in [0, \infty]. \quad (2.2)$$

Ejercicio 2.4.

Calcule el radio de convergencia de las siguientes series:

1. $\sum z^{n!}$.
2. $\sum (n + 2^n) z^n$.
3. $\sum \frac{(-1)^n z^n}{n!}$.
4. $\sum \frac{n! z^n}{n^n}$.

Teorema 2.2.

Sea $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |c_n|^{1/n}}$, se tiene que

1. Si $R = \infty$, entonces $\sum c_k z^k$ converge para todo $z \in \mathbb{C}$.
2. Si $R = 0$, entonces $\sum c_k z^k$ converge solo para $z = 0$.
3. Si $0 < R < \infty$, entonces $\sum c_k z^k$ converge en $|z| < R$ y no converge en $|z| > R$.

Demostación:

1. Sea $z \neq 0$, como

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} = 0,$$

tomando $\varepsilon = \frac{1}{2|z|}$, por la Proposición 2.8(ii), existe un número N tal que $|c_k|^{1/k} \leq \frac{1}{2|z|}$ para todo $k > N$, entonces

$$|c_k|^{1/k} |z| \leq \frac{1}{2},$$

y así

$$|c_k| |z|^k \leq \frac{1}{2^k},$$

lo que prueba el resultado.

2. Para una subsucesión c_{k_l} , tenemos que

$$|c_{k_l}|^{1/k_l} \geq \frac{1}{|z|},$$

entonces

$$|c_{k_l}|^{1/k_l}|z| \geq 1,$$

y así

$$|c_{k_l}||z|^{k_l} \geq 1,$$

y por lo tanto la serie no converge.

3. Si $|z| < R(1 - 2\delta)$ para $\delta > 0$, entonces sabemos que existe un número N tal que para cualquier natural $k > N$

$$|c_k|^{1/k} \leq \frac{1}{R}(1 + \delta),$$

luego

$$|c_k|^{1/k}|z| \leq (1 - 2\delta)(1 + \delta),$$

y por lo tanto

$$|c_k||z|^k \leq \{(1 - 2\delta)(1 + \delta)\}^k,$$

con lo que la serie converge.

Si $|z| > R$, tenemos que existe un número $\delta > 0$ tal que $|z| > R(1 + \delta)$, entonces para todo natural N existe un número k tal que

$$|c_k|^{1/k} \geq \frac{1}{R}(1 - \frac{\delta}{2}),$$

por lo que

$$|c_k|^{1/k}|z| \geq (1 + \delta)(1 - \frac{\delta}{2}) > 1,$$

y así la serie no converge. ■

Nota.

Si el radio de convergencia $R > 0$, entonces $\sum c_k z^k$ converge uniformemente en cualquier compacto $K \subseteq D(0, R)$. En particular

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

definida en $D(0, R)$ es continua.

Derivada de una serie de potencias

Consideremos la serie de potencias

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k,$$

derivando formalmente, la derivada de f debiera estar dada por la serie

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}.$$

La siguiente proposición probará este resultado.

Proposición 2.9.

Si el radio de convergencia de f es $R > 0$, entonces $f'(z) = g(z)$ en $D(0, R)$, y el radio de convergencia de g es R .

Demostración:

Si

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k} = \frac{1}{R} < \infty,$$

entonces

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/(k-1)} = \frac{1}{R},$$

y como $k^{\frac{1}{k-1}} \rightarrow 1$, entonces g y f tienen el mismo radio de convergencia. Vamos a demostrar que $f'(z) = g(z)$ para todo $|z| < R$, es decir

$$\left| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) \right| < \varepsilon.$$

Definiendo

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n c_k z^k,$$

y

$$R_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k z^k,$$

tenemos que $g(z) = f'_n(z) + S_n(z)$. Vamos a probar que $S_n(z) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{f_n(z+h) - f_n(z)}{h} + \frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h},$$

con lo que

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - g(z) = \frac{f_n(z+h) - f_n(z)}{h} - f'_n(z) + \frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} - S_n(z). \quad (2.3)$$

Veamos a qué corresponde el término $\frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h}$:

$$\frac{R_n(z+h) - R_n(z)}{h} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k[(z+h)^k - z^k]}{h}.$$

Y cada término corresponde a

$$\frac{(z+h)^k - z^k}{h} = (z+h)^{k-1} + (z+h)^{k-2}z + \dots + (z+h)z^{k-2} + z^{k-1},$$

que son k términos. Si $|z|, |z+h| < R(1-\eta)$, entonces

$$\left| \frac{(z+h)^k - z^k}{h} \right| \leq kR^{k-1}(1-\eta)^{k-1},$$

con lo que tenemos

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_k[(z+h)^k - z^k]}{h} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k k R^{k-1} (1-\eta)^{k-1} \\ &\leq \varepsilon/3 \text{ para todo } n \geq N, \end{aligned}$$

pues el radio de convergencia de la serie $\sum k c_k z^{k-1}$ es R . También tenemos que

$$\begin{aligned} |S_n| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} k c_k z^{k-1} \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |k c_k| R^{k-1} (1-\eta)^{k-1} \\ &\leq \varepsilon/3 \text{ para todo } n \geq N. \end{aligned}$$

Fijemos $n \geq N$, como f_n es un polinomio, existe $\delta > 0$, tal que para todo $|h| < \delta$

$$\left| \frac{f_n(z+h) - f_n(z)}{h} - f'_n(z) \right| < \varepsilon/3,$$

y por lo tanto usando (2.3) se concluye. ■

Proposición 2.10.

Si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

tiene radio de convergencia $R > 0$, entonces f es infinitas veces diferenciable en $D(0, R)$, y

$$a_0 = f(0), f'(0) = a_1, \dots, \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = a_k.$$

Ejercicio 2.5.

Desarrolle en serie de potencias la función $f(z) = \frac{e^z}{1-2z+z^2}$ alrededor del cero y calcule su radio de convergencia.

Teorema 2.3. (Teorema de Unicidad)

Sea

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

una función con radio de convergencia $R > 0$, y $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números distintos de cero, tal que $z_k \rightarrow 0$, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_k^n = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

entonces $c_n = 0$ para todo n , y por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \equiv 0.$$

Demostración:

Denotaremos

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n z^n,$$

Como $f(z_k) = 0$ para todo k y $z_k \rightarrow 0$, entonces por la continuidad de f $f(0) = c_0 = 0$. Por lo tanto

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} c_n z^n.$$

Sea ahora

$$f_1(z) = \frac{f(z)}{z} = \sum_{n \geq 1} c_n z^{n-1},$$

continua en $D(0, R)$. Dado que $f_1(z_k) = 0$, obtenemos $f_1(0) = c_1 = 0$. Así sucesivamente tenemos que

$$f_l(z_k) = \sum_{n \geq l} c_n z_k^{n-l} = 0,$$

con esto $c_l = 0$, para todo l . ■

Corolario 2.1.

Si $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ convergen en $D(0, R)$ y existe $\{z_k\} \rightarrow 0$, $z_k \neq 0$ para todo k tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_k^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_k^n \text{ para todo } k,$$

entonces $a_n = b_n$ para todo n .

Ejemplo 2.4.

Sea $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ una serie de potencias convergente en \mathbb{C} tal que $f(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$ y $f(2z) = (f(z))^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Demuestre que $f(z) = e^{\lambda z}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. *Hint: Pruebe que para todo $n \geq 0$ se tiene $f(\frac{1}{2^n}) = e^{\frac{\lambda}{2^n}}$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Solución:

Como $f(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$, entonces existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $f(1) = e^\lambda$. Ahora, usando inducción podemos probar que $f(\frac{1}{2^n}) = e^{\frac{\lambda}{2^n}}$, de hecho

$$\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = f(1) = e^\lambda,$$

entonces

$$f(1/2) = e^{\lambda/2}.$$

Usando inducción

$$\begin{aligned} \left(f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)\right)^2 &= f\left(\frac{1}{2^n}\right) \\ &= e^{\frac{\lambda}{2^n}} \\ &= e^{\frac{\lambda}{2^{n+1}}}, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$f\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right) = e^{\frac{\lambda}{2^{n+1}}}.$$

Con ésto tenemos $z_n = \frac{1}{2^n} \rightarrow 0$, con $f(z_k) = e^{\lambda z_k}$ para todo k . Por el Teorema de Unicidad tenemos que

$$f(z) = e^{\lambda z}, \text{ para todo } z \in \mathbb{C}.$$

Capítulo 3

Integrales

3.1. Integral de línea

Definición 3.1.

Una función $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, se dice de variación acotada si existe una constante $M > 0$ tal que para cualquier partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$ de $[a, b]$ se tiene

$$v(\gamma; P) = \sum_{k=1}^m |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq M.$$

La variación total de γ , $V(\gamma)$, está definida por

$$V(\gamma) = \sup\{v(\gamma; P) : P \text{ es una partición de } [a, b]\}.$$

Definición 3.2.

Una función de la forma $z(t) = x(t) + iy(t)$ con $a \leq t \leq b$ se dice diferenciable por pedazos si existe una partición $a < a_1 < a_2 < \dots < a_n < b$ tal que x, y son de clase \mathcal{C}' diferenciables en $[a, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_n, b]$ y x, y son continuas en $[a, b]$. En este caso nos referiremos a la función como curva, notar que el camino definido por la curva define siempre un conjunto compacto.

Proposición 3.1.

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ suave por pedazos, entonces γ es de variación acotada y

$$V(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Demostración:

La demostración puede ser encontrada en el texto "Functions of One Complex Variable I, John B Conway, pag.59"

Definición 3.3.

Si γ es suave por pedazos y $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, entonces

$$\int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t)\gamma'(t)dt.$$

Teorema 3.1.

Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de variación acotada, y suponga que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua. Entonces existe un número complejo I tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que cuando $P = \{t_0 < t_1 < \dots < t_m\}$ es una partición de $[a, b]$ con

$$\|P\| = \max\{(t_k - t_{k-1}) : 1 \leq k \leq m\} < \delta,$$

entonces

$$\left| I - \sum_{k=1}^m f(\tau_k)[\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] \right| < \varepsilon$$

para cualquier elección de puntos τ_k , $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$.

Este número I es denominado como la *Integral de Riemann-Stieljes de f con respecto a γ sobre $[a, b]$* y se denota por:

$$I = \int_a^b f d\gamma = \int_a^b f(t)d\gamma(t).$$

Definición 3.4.

Diremos que z es una curva rectificable si z es de variación acotada. Si además la curva $z(t)$ cumple que $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ excepto tal vez en un número finito de puntos, diremos que la curva es suave.

Definición 3.5. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ es una curva rectificable y f es una función continua sobre la curva γ , entonces la (integral de línea) de f sobre γ está definida por

$$\int_a^b f(\gamma(t))d\gamma(t).$$

Esta integral de línea también se denota por $\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)dz$.

Lema 3.1. Sean A un conjunto abierto en \mathbb{C} , $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ un camino rectificable, y $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe un camino poligonal Γ en A tal que $\Gamma(a) = \gamma(a)$, $\Gamma(b) = \gamma(b)$, y $\left| \int_\gamma f - \int_\Gamma f \right| < \varepsilon$.

Teorema 3.2. Sea \mathcal{U} un abierto en \mathbb{C} , y γ una curva rectificable en \mathcal{U} cuyos puntos iniciales son α y β respectivamente. Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua cuya primitiva es $F : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$, entonces

$$\int_\gamma f = F(\beta) - F(\alpha).$$

Definición 3.6. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se define

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} f(t)dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)dt$$

Definición 3.7. Sean las siguientes dos curvas

$\mathcal{C}_1: z(t)$ con $a \leq t \leq b$; $\mathcal{C}_2: w(t)$ con $c \leq t \leq d$

Se dirán equivalentes si existe una función

$$\lambda : [a, b] \rightarrow [c, d] \text{ de clase } \mathcal{C}', 1 \text{ a } 1$$

tal que:

- $\lambda(a) = c; \lambda(b) = d$
- $\lambda'(t) > 0 \forall t$
- $z(t) = w(\lambda(t))$

Definición 3.8. Sea la curva \mathcal{C} parametrizada por $z(t)$, $t \in [a, b]$. Se define la curva $-\mathcal{C}$ la cual queda parametrizada por $w(t) = z(a + b - t)$, $t \in [a, b]$

Ejercicio 3.1.

1. Demuestre que queda bien definida una relación de equivalencia.
2. Si \mathcal{C}_1 y \mathcal{C}_2 son curvas equivalentes, y sea f una función continua en \mathcal{C}_1 , entonces

$$\int_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \int_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$$

3. Demuestre que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = - \int_{-\mathcal{C}} f(z)dz$$

Ejemplo 3.1.

Sea la función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \frac{1}{z}$, y sea la curva parametrizada por $\mathcal{C} : \xi(t) = R \cos(t) + iR \sin(t); t \in [0, 2\pi]$, demostrar que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2\pi i$$

En efecto:

f es continua en \mathcal{C} , pues \mathcal{C} corresponde al círculo de centro 0 y radio R , y f solo se indefine en 0, entonces por la definición 1.3

$$\int_{\mathcal{C}} f(z)dz = \int_0^{2\pi} f(\xi(t))\xi'(t)dt$$

Veamos a que corresponde cada termino:

$$\xi(t) = R \cos(t) + iR \sin(t) \implies \xi'(t) = -R \sin(t) + iR \cos(t) \equiv i\xi(t)$$

$$f(\xi(t)) = \frac{1}{R \cos(t) + iR \sin(t)}$$

Entonces

$$f(\xi(t))\xi'(t) = \frac{1}{R \cos(t) + iR \sin(t)} i(R \cos(t) + iR \sin(t)) \equiv i$$

Por lo tanto

$$\int_0^{2\pi} f(\xi(t))\xi'(t)dt = \int_0^{2\pi} i dt = 2\pi i$$

■

Definición 3.9. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, se dirá que $\alpha \ll \beta$ si $|\alpha| \leq |\beta|$

Lema 3.2. Sea $G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua, entonces

$$\int_a^b G(t)dt \ll \int_a^b |G(t)|dt$$

Es decir

$$\left| \int_a^b G(t)dt \right| \leq \int_a^b |G(t)|dt$$

Demostración:

$$\int_a^b G(t)dt = Re^{i\theta}, R \geq 0$$

Entonces

$$\int_a^b e^{-i\theta} G(t)dt = R, \text{ con } R = |Re^{i\theta}| = \left| \int_a^b G(t)dt \right| \in \mathbb{R}$$

Así

$$R = \int_a^b e^{-i\theta} G(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re} [e^{i\theta} G(t)]dt$$

pero

$$\operatorname{Re} [e^{-i\theta} G(t)] \leq |e^{-i\theta} G(t)| = |G(t)|$$

Por lo tanto

$$\left| \int_a^b G(t) dt \right| \leq \int_a^b |G(t)| dt$$

■

Proposición 3.2. Sea \mathcal{C} una curva suave parametrizada por $\xi(t)$ $t \in [a, b]$ de largo L , i.e.

$$L = \int_a^b |\xi'(t)| dt$$

Sea f una función continua en \mathcal{C} , sea $M > 0$ tal que $f(z) \ll M \forall z \in \mathcal{C}$ (i.e. $|f(z)| < M$). Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz \ll ML$$

Demostración:

En efecto:

Por el lema anterior

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\xi(t)) \xi'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\xi(t))| |\xi'(t)| dt$$

Pero por la hipótesis $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathcal{C}$
entonces

$$\left| \int_{\mathcal{C}} f(z) dz \right| \leq M \int_a^b |\xi'(t)| dt = ML$$

■

Proposición 3.3. Sea \mathcal{C} una curva, sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas en \mathcal{C} , tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en \mathcal{C} . Entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} f_n(z) dz$$

Demostración:

Nosotros sabemos que si $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ son todas continuas en \mathcal{C} y convergen uniformemente a f en \mathcal{C} entonces f es continua en \mathcal{C} . Además por el lema previo

$$\left| \int_{\mathcal{C}} (f_n - f)(z) dz \right| \leq \int_{\mathcal{C}} |f_n(z) - f(z)| |dz|$$

Veamos que significa que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en \mathcal{C} .

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists N \in \mathbb{N}) \forall n \geq N \forall z \in \mathcal{C} |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

entonces por la proposición anterior

$$\left| \int_{\mathcal{C}} (f_n - f)(z) dz \right| \leq \varepsilon \cdot L \quad \forall n \geq N. \quad \text{Con } L \text{ el largo de la curva}$$

■

Proposición 3.4. Consideremos la curva \mathcal{C} parametrizada por $\xi(t)$ $t \in [a, b]$, y sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua con \mathcal{U} abierto tal que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$, supongamos que existe una función analítica F en \mathcal{U} tal que $f(z) = F'(z)$. Entonces

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = F(\xi(b)) - F(\xi(a))$$

Demostración:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b f(\xi(t)) \xi'(t) dt$$

además por hipótesis

$$\frac{d}{dt}(F(\xi(t))) = F'(\xi(t)) \xi'(t)$$

Por lo tanto

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_a^b F'(\xi(t)) \xi'(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt}(F(\xi(t))) dt = F(\xi(b)) - F(\xi(a))$$

■

3.2. Fórmula integral de Cauchy

3.2.1. Teorema del rectángulo

Definición 3.10. Sea \mathcal{C} una curva parametrizada por $\xi(t)$ $t \in [a, b]$, diremos que \mathcal{C} es cerrada si $\xi(a) = \xi(b)$.

Además diremos que la curva \mathcal{C} es **cerrada simple** si

$$\xi(t_1) = \xi(t_2), \quad t_1 < t_2 \implies t_1 = a \wedge t_2 = b.$$

Teorema 3.3. (Teorema del Rectángulo)

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $a < b$, $c < d$ y sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{C}$ definido por:

$$\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \operatorname{Re} z \leq b, c \leq \operatorname{Im} z \leq d\}.$$

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, con Ω un abierto que contiene a \mathcal{R} . Entonces

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz = 0,$$

con $\partial\mathcal{R}$ la frontera de \mathcal{R} orientada en sentido antihorario.

Antes de proceder a la demostración del teorema mencionaremos un lema que nos ayudará a la demostración de éste.

Lema 3.3. Sea f una función lineal, i.e. f es de la forma $f(z) = az + b$ con a y b constantes pertenecientes a \mathbb{C} , entonces

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz = 0.$$

Demostración del lema:

Considerando $F(z) = a\frac{z^2}{2} + bz$ se tiene que $\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz = F(\xi(b)) - F(\xi(a)) = 0$. □

Demostración del Teorema del Rectángulo:

Procederemos por contradicción:

Sea $I = \int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz$, y supongamos que $|I| > 0$. Sean l_1, l_2 las dimensiones del rectángulo, i.e. $l_1 = b - a$, $l_2 = d - c$. Definimos $\mathcal{R}_1^1, \mathcal{R}_2^1, \mathcal{R}_3^1, \mathcal{R}_4^1 \subseteq \mathbb{C}$ cuatro rectángulos, con frontera orientada en sentido antihorario, congruentes de interior disjunto 2 a 2 de dimensión $\frac{l_1}{2} \times \frac{l_2}{2}$, tales que $\bigcup_{i=1}^4 \mathcal{R}_i^1 = \mathcal{R}$. Entonces

$$\int_{\partial\mathcal{R}} f(z) dz = \sum_{i=1}^4 \int_{\partial\mathcal{R}_i^1} f(z) dz$$

$$\text{Dado que } |I| > 0 \text{ existe } i \text{ tal que } \left| \int_{\partial\mathcal{R}_i^1} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4}.$$

Este rectángulo se denominará \mathcal{R}^1 . Sean ahora los rectángulos $\mathcal{R}_1^2, \mathcal{R}_2^2, \mathcal{R}_3^2, \mathcal{R}_4^2 \subseteq \mathbb{C}$ de dimensiones $\frac{l_1}{2^2} \times \frac{l_2}{2^2}$ con propiedades con respecto a \mathcal{R}^1 equivalentes a las de los rectángulos antes definidos con respecto a \mathcal{R} . Entonces existe i tal que

$$\left| \int_{\partial\mathcal{R}_i^2} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^2}$$

Denominaremos ahora a este rectángulo \mathcal{R}^2 . Procediendo de manera recursiva obtenemos una secuencia de rectángulos \mathcal{R}^n cuyas dimensiones son $\frac{l_1}{2^n} \times \frac{l_2}{2^n}$ con la propiedad

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^n} f(z) dz \right| \geq \frac{|I|}{4^n},$$

Por lo tanto tenemos una secuencia de conjuntos cerrados decreciente distintos de \emptyset que cumplen $\text{diam}(\mathcal{R}^n) \rightarrow 0$, y por el teorema de cerrados encajonados de Cantor, se tiene que $\exists! z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$z_0 = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{R}^n$$

Por otra parte en \mathcal{R}^n podemos expandir f

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_z(z - z_0)$ y por el lema previo tenemos que:

$$\int_{\partial \mathcal{R}^n} f(z) dz = \int_{\partial \mathcal{R}^n} f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon_z(z - z_0) dz = \int_{\partial \mathcal{R}^n} \varepsilon_z(z - z_0) dz,$$

con $|z - z_0| \leq \frac{1}{2^n} \sqrt{l_1^2 + l_2^2}$. Por lo tanto dado $\varepsilon > 0$, $\exists N$ tal que $|\varepsilon_z(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \forall n \geq N$

$$\left| \int_{\partial \mathcal{R}^n} f(z) dz \right| \leq \frac{l_1 + l_2}{2^{n-1}} \frac{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{2^n} \cdot \varepsilon = \frac{2\varepsilon(l_1 + l_2)\sqrt{l_1^2 + l_2^2}}{4^n}$$

de donde concluimos que $|I| \leq c\varepsilon$ para $c > 0$, y dado que ε es arbitrario obtenemos una contradicción. ■

Proposición 3.5. *Sea $f : \text{int}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, con $\mathcal{R} = \{z \in \mathbb{C} : a \leq \text{Re } z \leq b, c \leq \text{Im } z \leq d\}$. Entonces existe $F : (a, b) \times (c, d) \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $F' = f$.*

Observación 3.1. *En realidad la hipótesis que f sea analítica es más potente que lo necesario, solamente necesitamos que f sea continua y que $\int_{\tilde{\mathcal{R}}} f dz = 0$ con $\tilde{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$ un rectángulo.*

Demostración: En efecto, sin pérdida de generalidad supongamos que $0 \in \text{int}(\mathcal{R})$, y consideremos la curva Γ_z que une el 0 con el punto $z \in \text{int}(\mathcal{R})$. Definamos ahora

$$F(z) = \int_0^z f(\omega) d\omega \equiv \int_{\Gamma_z} f(\omega) d\omega.$$

Probaremos que $F'(z) = f(z)$ es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \rightarrow 0.$$

Desarrollando

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+\text{Re}h]} f(\omega) d\omega + \int_{[z+\text{Re}h, z+h]} f(\omega) d\omega,$$

entonces

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z, z+\operatorname{Re}h]} f(\omega) - f(z) d\omega + \frac{1}{h} \int_{[z+\operatorname{Re}h, z+h]} f(\omega) - f(\omega) d\omega.$$

Ahora sea h tal que si $|\omega - z| < |h|$, entonces $|f(z) - f(\omega)| < \varepsilon$ lo cual muestra:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \varepsilon \cdot \frac{|\operatorname{Re}h|}{|h|} + i\varepsilon \cdot \frac{|\operatorname{Im}h|}{|h|} \leq \varepsilon$$

■

Nota. Los resultados vistos no solo sirven para rectángulos, también se pueden extender a dominios como discos o cualquier otro dominio conexo.

Teorema 3.4. Sea f una función analítica en \mathbb{C} y \mathcal{C} una curva cerrada, entonces:

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = 0.$$

Demostración: Sea $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $F' = f$, la cual existe por la proposición anterior. Por la proposición 3.4 tenemos que

$$\int_{\mathcal{C}} f(z) dz = \int_{\mathcal{C}} F'(z) dz = 0$$

■

3.2.2. Fórmula integral de Cauchy

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con Ω un abierto tal que contiene al rectángulo \mathcal{R} . Sea $a \in \Omega$ y $\Gamma = \partial\mathcal{R}$. Definamos $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente forma:

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$$

la cual es claramente continua.

Proposición 3.6.

$$\int_{\Gamma} g(z) dz = 0$$

Demostración: En efecto:

- Si $a \notin \mathcal{R} \implies$ por la proposición anterior se concluye.
- Si $a \in \partial\mathcal{R}$

Teorema 3.5. (Fórmula integral de Cauchy)

Sea f una función analítica en $D(z_0, R)$ y $0 < r < R$, entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} dz, \text{ con } \mathcal{C} = re^{i\theta}, \quad 0 < \theta < \pi; \quad r > |a|$$

Demostración:

Como $a \notin \mathcal{C}$, por la proposición 3.6

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = 0$$

es decir

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-a} dz = f(a) \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

■

Ejemplo 3.2. Resolver las siguientes integrales utilizando la fórmula integral de Cauchy:

1.

$$\int_{|z|=1} \sqrt{9-z^2} dz$$

2.

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z} dz$$

3.

$$\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$

Solución:

1. Primero veamos que $\sqrt{9-z^2} = \frac{z\sqrt{9-z^2}}{z-0}$, entonces tenemos que $f(z) = z\sqrt{9-z^2}$, que es analítica en $D(0, r)$ con $1 < r < 3$, sea $\mathcal{C} = e^{i\theta}$, entonces tenemos

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-0} dz$$

aplicando la fórmula integral de Cauchy

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i (0 \cdot \sqrt{9-0^2}) = 0$$

por lo tanto

$$\int_{|z|=1} \sqrt{9-z^2} dz = 0$$

2. De nuevo, veamos que $\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{z+2} \frac{1}{z-0}$, luego tenemos que $f(z) = \frac{1}{z+2}$ la cual es analítica en $D(0, r)$ con $1 < r < 2$, ocupando la misma curva antes definida,

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z-0} dz = 2\pi i f(0) = 2\pi i \frac{1}{0+2} = \pi i$$

Así

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2+2z} dz = \pi i$$

3. Primero veamos como podemos escribir ésto de una manera apropiada

$$\frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} = \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-2)} - \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)}$$

entonces tenemos $f(z) = \sin \pi z^2 + \cos \pi z^2$ la cual es analítica en \mathbb{C} y por lo tanto, ocupando la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i (f(2) - f(1)) = 2\pi i (1 - (-1)) = 4\pi i$$

Analizaremos un poco más la Fórmula integral de Cauchy

Teorema 3.6. Desarrollo en serie de potencias.

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z(1-\frac{a}{z})}, \text{ y tenemos } \left| \frac{a}{z} \right| < 1$$

entonces

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^n$$

como la serie converge uniformemente en \mathcal{C} podemos intercambiar la integral con la serie, luego

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^n dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z} \right)^n \int_{\mathcal{C}} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

los coeficientes $\int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$ no dependen de a , con $a \in D(0, r)$, y con $0 < r < R$, pero sí podrían depender de R , veamos que esto no es así

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} c_n a^n, \quad \forall a \in D(0, r)$$

y sabemos que $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, y por lo tanto no depende de R .

Corolario 3.1.

1. f es C^∞ .
2. Si f es analítica en \mathbb{C} , entonces el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ es ∞ , lo cual es también cierto en

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z - a)^n$$

Observación 3.2. Supongamos que $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica, con Ω un abierto. Sea ahora $z_0 \in \Omega$, $r \in \mathbb{R}$ tal que $D(z_0, r) \subset \Omega$, sea $a \in D(z_0, r)$, y sea $C_r(z_0) = z_0 + re^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - a} dz$$

realizando el mismo procedimiento anterior

$$f(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (a - z_0)^n, \quad \text{con} \quad \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

y el radio de convergencia de la serie es $\geq \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Ejemplo 3.3. Demostrar que $\forall n, k \in \mathbb{N}$ tales que $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz$$

donde $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, y que se recorre en sentido antihorario.

Solución:

En efecto, por lo visto antes

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

donde aquí tenemos que $f(z) = (z + 1)^n$, $z_0 = 0$. Entonces $f^{(k)}(z) = n(n-1)\cdots((n-k)+1)(z+1)^{n-k} \implies f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}$, entonces

$$\binom{n}{k} = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz$$

□

Teorema 3.7. (Teorema de Morera)

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua tal que $\forall \mathcal{R} \subseteq \Omega$ rectángulo

$$\int_{\partial \mathcal{R}} f(z) dz = 0$$

entonces f es analítica en Ω .

Nota. Este teorema es muy potente en variable compleja, pues propone otra caracterización de las funciones analíticas.

Demostración: Siguiendo la demostración de una proposición anterior, existe una función analítica F tal que $F' = f$, y por el corolario de la fórmula integral de Cauchy, tenemos que F es C^∞ , por lo tanto f analítica. ■

Corolario 3.2. Sean f_n, f definidas en Ω , tales que para todo $K \subseteq \Omega$ compacto, $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en K , entonces

Si f_n analítica en $\Omega \implies f$ es analítica en Ω .

3.2.3. Los ceros de las funciones analíticas

Definición 3.11. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica, y sea $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(a) = 0$. Diremos que el orden de a es n si $f^{(k)}(a) = 0, \forall k < n$, y $f^{(n)}(a) \neq 0$.

Proposición 3.7. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, con Ω un abierto conexo. Sea $a \in \Omega$ tal que $f^{(n)}(a) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $f \equiv 0$ en Ω .

Demostración: Procedamos por contradicción. Sea $A = \{z \in \Omega \mid \exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Omega, f(z_n) = 0, z_n \longrightarrow z, z_n \neq z\}$. Probaremos que A es abierto y que su complemento también lo es.

Probemos que A es abierto:

Sea $z \in A$, como f admite desarrollo en serie de potencias, $f(w) = 0 \forall w \in D(z, r_z)$, lo que implica que A es abierto.

Para demostrar que A^c es abierto escribamos la función f como serie de potencias entorno a z , con $z \in A^c$ y veamos lo que esto implica.

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (w-z)^n, \text{ y } \frac{f^{(n_0)}(z)}{n_0!} \neq 0 \text{ para algún } n_0, \frac{f^{(n)}(z)}{n!} = 0 \quad \forall n < n_0$$

$$f(w) = \frac{f^{(n_0)}(z)}{n_0!} \underbrace{\left[\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\frac{f^{(n)}(z)}{n!}}{\frac{f^{(n_0)}(z)}{n_0!}} (z-z_0)^{n-n_0} \right]}_{\neq 0 \text{ en un abierto en torno a } z_0} (z-z_0)^{n_0}$$

lo que implica que $f \neq 0$ en un abierto sin considerar z_0 , entonces A^c es abierto, y como Ω es conexo y $A \neq \emptyset \implies \Omega = A \iff f \equiv 0$. ■

Observación 3.3. Con esta proposición, si f es analítica y $f \not\equiv 0$ para algún $z_0 \in \Omega$, el orden de un cero queda bien definido.

Definición 3.12. Sea z_0 un punto tal que $f(z_0) = 0$. Diremos que z_0 es un cero aislado si $\exists \varepsilon > 0$ tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$.

Proposición 3.8. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con Ω un abierto conexo. Si $\exists z_n \rightarrow z \in \Omega$ tal que $f(z_n) = 0 \forall z_n$, entonces $f \equiv 0$ en Ω .

Nota. Notemos que esta proposición implica que los ceros de las funciones analíticas son aislados.

Proposición 3.9. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, si $f(z_0) = 0$ Entonces la función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z-z_0} & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

es analítica. Más aún, si el orden de z_0 es k , entonces

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{(z-z_0)^k} & \text{si } z \neq z_0 \\ \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} & \text{si } z = z_0, \end{cases}$$

es analítica.

Observación 3.4. Si z_1, z_2, \dots, z_k son ceros de f , con $z_1 \neq z_2 \neq \dots \neq z_k$, entonces

$$g(z) = \begin{cases} \frac{\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_k)}}{\frac{f'(z_1)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\dots(z_1-z_k)}} \\ \vdots \\ \frac{f'(z_k)}{(z_k-z_1)(z_k-z_2)\dots(z_k-z_{k-1})} \end{cases} \text{ si } z \notin \{z_1, z_2, \dots, z_k\}$$

es analítica.

Teorema 3.8. (Teorema de Liouville)

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica acotada, es decir $\exists M \in \mathbb{R}$, $M > 0$, cte. tal que $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$. Entonces f es constante.

Demostración:

Dado que f es analítica

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \text{ con } \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw, \mathcal{C} = Re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi].$$

Analicemos los coeficientes para $n \geq 1$,

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} iRe^{i\theta} d\theta \right| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{R^n e^{in\theta}} d\theta \right|,$$

por lo tanto

$$\left| \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{M}{R^n} d\theta = \frac{2\pi M}{R^n} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

Así $\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \forall n \geq 1$, lo que implica que $f \equiv 0$. ■

Teorema 3.9. (Teorema fundamental del álgebra)

Sea $p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$, un polinomio no constante a coeficientes en \mathbb{C} , entonces p tiene al menos una raíz en \mathbb{C} .

Demostración: En efecto, procedamos por contradicción. Supongamos que $p(z)$ no tiene raíces en \mathbb{C} , entonces $g(z) = \frac{1}{p(z)}$ es analítica en \mathbb{C} y acotada, por el teorema de Liouville ésto implica que $g(z)$ es constante, y por lo tanto $p(z)$ también $\rightarrow \leftarrow$. ■

Proposición 3.10. (Extensión del teorema de Liouville)

Sea f una función analítica en \mathbb{C} tal que $\exists A, B > 0$ para los cuales $|f(z)| \leq A + B|z|^k$ para algún k entero positivo, entonces $f(z)$ es un polinomio de grado $\leq k$.

Ejercicio 3.2. Sea f una función analítica en \mathbb{C} tal que $|f(z)| \leq A + B|z|^{\frac{1}{2}}$, ver que f es constante.

3.3. Aplicaciones a la Fórmula integral de Cauchy

3.3.1. Principio de reflexión de Schwarz

Teorema 3.10. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica excepto posiblemente en un segmento de línea, pero con f continua en todo Ω . Entonces $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica.

Demostración: Sin pérdida de generalidad supongamos que el segmento de línea L está en el eje real. Queremos probar que $\int_{\Gamma} f(z)dz = 0$ para cualquier rectángulo $\mathcal{R} \subseteq \Omega$ con $\Gamma = \partial\mathcal{R}$. Para ésto pongámonos en casos:

- Si $\mathcal{R} \subset \Omega \setminus L \implies \int_{\Gamma} f(z)dz = 0$

-

Teorema 3.11. (Principio de reflexión de Schwarz)

Sea f una función analítica en D , el cual está contenido en un semiplano, tal que la frontera de D contiene un segmento Γ dado por la frontera del semiplano, y f cumple que $f(\Gamma) \subseteq \Gamma$ y es continua en $D \cup \Gamma$.

Entonces existe D^* (Reflejado de D con respecto al semiplano) tal que f se puede extender a $D \cup \Gamma \cup D^*$ y resulta ser analítica, ésta función cumple la siguiente propiedad:

$$\hat{f}(z) = f^*(z^*) \quad \forall z \in D^*.$$

Ejemplo 3.4. Sea f una función analítica en el semi-disco: $|z| \leq 1, \text{Im}z > 0$, tal que es real sobre el semi-círculo $|z| = 1, \text{Im}z > 0$. Demostrar que si definimos

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } |z| \leq 1, \text{Im}z > 0 \\ \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)} & \text{si } |z| > 1, \text{Im}z > 0 \end{cases}$$

entonces g es analítica en el semi-plano superior.

Solución:

En efecto, como vimos en un capítulo anterior, el simétrico en un disco es de la forma

$z^* = \frac{R^2}{z-\alpha} + \alpha$, con α el centro del disco, y R el radio del disco. Que en este caso equivalen a : $R = 1, \alpha = 0$, por lo tanto $z^* = \frac{1}{\bar{z}}$, y como en el espacio de llegada, el simétrico es simplemente el conjugado, concluimos.

Ejercicio 3.3. Sea $f : D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, continua en $\partial D(0,1)$ tal que $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo z tal que $|z| = 1$. Probar entonces que f es constante.

3.3.2. El teorema del Módulo Máximo

Teorema del módulo máximo

Teorema 3.12. (Teorema del módulo máximo)

Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función analítica, tal que f no es constante, entonces $|f|$ no tiene máximos locales en Ω . Ésto quiere decir que

$$\forall z \in \Omega, \forall \delta > 0 \exists w \in D(z, \delta) \cap \Omega \text{ tal que } |f(w)| > |f(z)|$$

Demostración: Sean $z \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$, y sea $\mathcal{C} = z + \varepsilon e^{i\theta}$ $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

Nosotros sabemos que

$$|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})| d\theta \leq \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|$$

Tenemos ahora dos posibilidades, $|f(z)| < \max_{\theta} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|$ o $|f(z)| = \max_{\theta} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|$, si ocurre lo segundo tendríamos que

$$|f(z)| \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z + \varepsilon e^{i\theta})| d\theta \implies |f(z)| = |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|$$

Si el teorema no se tuviera tendríamos que $\exists \tilde{\delta} > 0$ tal que $D(z, \tilde{\delta}) \subset \Omega$ y

$|f(z)| \geq |f(w)| \forall w \in D(z, \tilde{\delta})$. Sea $0 < \varepsilon < \tilde{\delta}$, por lo antes visto tenemos dos posibilidades,

$\exists \theta^*$ tal que $|f(z + \varepsilon e^{i\theta^*})| > |f(z)|$ o

$|f(z)| = |f(z + \varepsilon e^{i\theta})| \forall \theta$,

lo primero no se tiene por la suposición que hicimos de que $|f(z)| \geq |f(w)|$, entonces

$|f(z)| = |f(z + \varepsilon e^{i\theta})|$ y como ε es arbitrario tenemos que $|f(z)|$ es constante en $D(z, \tilde{\delta})$, queda propuesto para el lector probar que si $|f|$ es constante en D y f es analítica, entonces f es constante en D , por lo tanto f es constante en Ω , lo cual es una contradicción. ■

Corolario 3.3. (*Principio del módulo mínimo*)

Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica no constante, entonces $|f|$ no tiene mínimos locales a menos que $\exists z \in \Omega$ tal que $f(z) = 0$.

El lema de Schwarz

Teorema 3.13. (Lema de Schwarz)

Sea $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que $|f| \leq 1$ y $f(0) = 0$, entonces $|f(z)| \leq |z|$ y $|f'(0)| \leq 1$, más aún, si se tiene la igualdad en cualquiera de estas desigualdades, entonces $f(z) = e^{i\theta} z$ para algún θ .

Demostración: Sea $g(z) = \frac{f(z)}{z}$, la cual es analítica en $D(0, 1)$, supongamos que g no es constante.

Sea $z_0 \in D(0, 1)$ fijo, por el teorema del módulo máximo tenemos $\max_{z \in D(0, r)} |g(z)|$ se alcanza en la frontera $\partial D(0, r)$. Si r está cercano a 1, $z_0 \in D(0, r) \implies |g(z_0)| < \frac{|f(\tilde{z})|}{|\tilde{z}|}$ para un $\tilde{z} \in \partial D(0, r)$,

lo que implicaría que $|g(z_0)| \leq \frac{1}{r} \xrightarrow{r \rightarrow 1} 1$ lo que implicaría que $|g(z_0)| \leq 1 \iff |f(z_0)| \leq |z_0|$.

Aplicando ésto a $z_0 = 0$, $|g(0)| \leq 1 \iff |f'(0)| \leq 1$.

Si g fuera constante, $g(z) = c$, entonces $f(z) = cz$, con $c \leq 1$, y por supuesto se cumplen las desigualdades.

Si $\exists z \in D(0, 1)$ tal que $|f(z)| = |z|$, entonces $|g|$ alcanza su máximo en el interior, lo que implicaría que g es constante, y como $|g(z)| = 1$, entonces $g(z) = e^{i\theta}$. ■ Gracias al

teorema del módulo máximo y al lema de Schwarz, se tienen diversas aplicaciones, varias de las cuales se procederá a mencionarlas.

Proposición 3.11. *Sea $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ una función analítica biyectiva tal que $f^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ también es analítica y que cumple $f(0) = 0$, entonces $f(z) = e^{i\theta}z$ para algún θ .*

Demostración: En efecto, por el lema de Schwarz tenemos que

$$|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in D(0, 1) \text{ y } |f^{-1}(w)| \leq |w| \quad \forall w \in D(0, 1),$$

tenemos que $|w| = |f(f^{-1}(w))| \leq |f^{-1}(w)| \leq |w| \implies |f^{-1}(w)| = |w|$.

Análogamente tenemos que $|f(z)| = |z|$ y por el lema de Schwarz $f(z) = e^{i\theta}z$. ■

Proposición 3.12. *Sea $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ una función analítica biyectiva con inversa analítica, y sea $\alpha \in D(0, 1)$ tal que $f(\alpha) = 0$, entonces $f(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \right)$.*

Demostración: En efecto, sea α tal que $f(\alpha) = 0$, y sea $g(z) = \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$, entonces la función $f \circ g^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ es analítica biyectiva con inversa analítica, y cumple que $f \circ g^{-1}(0) = 0$, por lo tanto por la proposición anterior se tiene que

$$f \circ g^{-1}(z) = e^{i\theta}z \implies f(z) = f \circ g^{-1}(g(z)) = e^{i\theta}g(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \right)$$

■

Ejemplo 3.5.

1. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que $|f| = 1$ en $\partial D(0, 1)$, probar que $f(z) = e^{i\theta}z^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.
2. Sea $f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ una función analítica tal que $f(\frac{1}{2}) = 0$, estimar la mejor cota para $|f(\frac{3}{4})|$ de todas las funciones f que cumplen las hipótesis.

Solución:

1. En efecto:

Nosotros sabemos, por el teorema del módulo máximo que si f no es constante, entonces

$f : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$. Sean ahora $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ los ceros de f en $D(0, 1)$ contados con su multiplicidad. La función $\left(\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)$ tiene módulo 1 para $|z| = 1$, y visto antes, la función $g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{k=1}^n \left(\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)}$ es analítica en $D(0, 1)$, más aún, $g(z) \neq 0$ en $D(0, 1)$, y también cumple que $|g| = 1$ en $\partial D(0, 1)$. Entonces de nuevo, por el teorema del módulo máximo $g : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$, es decir $|g(z)| \leq 1$ en $D(0, 1)$, y como $g(z) \neq 0$ por el principio del módulo mínimo $|g(z)| \geq 1$ en $D(0, 1)$, con lo que tenemos que $g(z) = e^{i\theta}$ para algún θ . Luego

$$f(z) = e^{i\theta} \prod_{k=1}^n \left(\frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z}\right) \quad \forall z \in D(0, 1)$$

Ahora supongamos que existe algún k tal que $1 \leq k \leq n$ y $\alpha_k \neq 0$. Si fuese así tendríamos que el radio de convergencia de la serie de f en torno a cero debería ser $\min \left\{ \left| \frac{1}{\alpha_j} \right| : 1 \leq j \leq n \text{ y } \alpha_j \neq 0 \right\}$ lo cual contradice que f sea analítica en \mathbb{C} . Por lo tanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, y así $f(z) = e^{i\theta} z^n$. □

2.

$$\text{Sea } g(z) = \frac{f(z)}{\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{1-z\frac{1}{2}}\right)} \text{ con } g : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$$

Por lo tanto tenemos que $\left|g\left(\frac{3}{4}\right)\right| \leq 1$ y entonces

$$\left|f\left(\frac{3}{4}\right)\right| \leq \left|\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}}{1-\frac{3}{4}\frac{1}{2}}\right| = \frac{2}{5}$$

y vemos que la cota es óptima pues si tomamos la función $f(z) = \left(\frac{z-\frac{1}{2}}{1-z\frac{1}{2}}\right)$ la cota se alcanza.

Ejercicio 3.4. Probar que las únicas funciones analíticas biyectivas que llevan $\text{Im}z > 0$ a $D(0, 1)$ son de la forma

$$h(z) = e^{i\theta} \left(\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right) \quad \alpha \in \text{Im}z > 0.$$

El Teorema de la Aplicación Abierta

Teorema 3.14. (Teorema de la aplicación abierta)

Sea \mathcal{U} un conjunto abierto conexo, y sea $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica no constante, sea $\Omega \subseteq \mathcal{U}$ un conjunto abierto, entonces $f(\Omega)$ es abierto.

Demostración: Sea $\alpha \in \Omega$, por demostrar que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $D(f(\alpha), \varepsilon) \subseteq f(\Omega)$.
Sea $\delta > 0$ tal que $D(\alpha, \delta) \subset \Omega$ y consideremos $f(z) - f(\alpha)$. Ahora sea $\eta = \min_{\partial D(\alpha, \delta)} |f(z) - f(\alpha)|$, tomando δ suficientemente pequeño, $\eta > 0$ pues los ceros de las funciones analíticas son aislados.

Consideremos ahora $D(f(\alpha), \frac{\eta}{2})$. Sea $w \in D(f(\alpha), \frac{\eta}{2})$, queremos demostrar que existe $z \in D(\alpha, \delta)$ tal que $f(z) = w$. Consideremos $f(z) - w$ en $D(\alpha, \delta)$.

$$\text{En } \partial D(\alpha, \delta), |f(z) - w| \geq |f(z) - f(\alpha)| - |f(\alpha) - w| > \eta - \frac{\eta}{2} = \frac{\eta}{2}$$

Por otra parte si $z = \alpha$, $|f(\alpha) - w| < \frac{\eta}{2}$, pues $w \in D(f(\alpha), \frac{\eta}{2})$, pero $\min |f(z) - w| \geq \frac{\eta}{2}$ en la frontera, luego por el principio del módulo mínimo la función tiene que anularse en algún punto, es decir, $\exists z \in D(\alpha, \delta)$ tal que $f(z) - w = 0$. ■

Corolario 3.4. *Sea $f : \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ una función analítica biyectiva, entonces f^{-1} es continua.*

Ejercicio 3.5.

- (a). *Sea f una función analítica y no constante en S , y sea $T = f(S)$. Demuestre que si $f(z)$ es un punto de frontera de T , entonces z es un punto de frontera de S .*
- (b). *Demuestre que el recíproco es, en general, falso. Para ello considere, por ejemplo, la función $f(z) = z^2$ en la región*

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| < 2, \operatorname{Re} z < 0\}.$$

Capítulo 4

Funciones Meromorfas

En el siguiente capítulo extenderemos la noción de desarrollos en series para funciones más generales que las enteras y comenzaremos el análisis de estas.

4.1. Dominios simplemente conexos

Definición 4.1.

Diremos que D es una región o dominio en \mathbb{C} si D es un abierto conexo.

Definición 4.2.

Sean $\gamma_0, \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow D$ dos curvas cerradas rectificables en una región D . Se dirá que γ_0 es homótopa a γ_1 en D si existe una función continua $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s, 0) = \gamma_0(s) & y & \Gamma(s, 1) = \gamma_1(s) & \forall s \in [0, 1] \\ \Gamma(0, t) = \Gamma(1, t) & \forall t \in [0, 1]. \end{cases} \quad (4.1)$$

Denotaremos $\gamma_0 \sim \gamma_1$.

Proposición 4.1.

La relación $\gamma_0 \sim \gamma_1$ define una relación de equivalencia.

Demostración:

Es claro que γ_0 es homótopa a sí misma. Si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ y $\Gamma : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow D$ satisface la condición (4.1) entonces basta definir $\Lambda(s, t) = \Gamma(s, 1 - t)$ para ver que $\gamma_1 \sim \gamma_0$. Finalmente si $\gamma_0 \sim \gamma_1$ y $\gamma_1 \sim \gamma_2$ con Γ y Λ satisfaciendo las condiciones (4.1) respectivamente para cada una de las

relaciones, entonces definimos

$$\varphi(s, t) = \begin{cases} \Gamma(s, 2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \Lambda(s, 2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

con lo que $\gamma_0 \sim \gamma_2$.

Teorema 4.1.

Si γ_0 y γ_1 son dos curvas cerradas rectificables en una región D y además $\gamma_0 \sim \gamma_1$, entonces

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$$

para toda función f analítica en D .

Demostración:

Sea $I = [0, 1]$ y $\Gamma : I^2 \rightarrow D$ la función dada por (4.1). Puesto que Γ es continua e I^2 es compacto tenemos que Γ es uniformemente continua y $\Gamma(I^2)$ es un compacto en D . Sea $r = \text{dist}(\Gamma(I^2), \mathbb{C} \setminus D)$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que si $(s - s')^2 + (t - t')^2 < 4/n^2$ entonces

$$|\Gamma(s, t) - \Gamma(s', t')| < r.$$

Denotemos

$$Z_{j,k} = \Gamma\left(\frac{j}{n}, \frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq j, k \leq n \quad \text{y}$$

$$J_{j,k} = \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \times \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right], \quad 0 \leq j, k \leq n.$$

Dado que el diámetro de $J_{j,k}$ es $\sqrt{2}/n$, se sigue por la continuidad de Γ que $\Gamma(J_{j,k}) \subset D(Z_{j,k}; r)$. Llamemos $P_{j,k}$ al camino poligonal cerrado de vértices $Z_{j,k}, Z_{j+1,k}, Z_{j,k+1}, Z_{j+1,k+1}$ y dado que los discos son convexos, $P_{j,k} \subset B(Z_{j,k}; r)$. Pero por alguna proposición anterior (hacer referencia)

$$\int_{P_{j,k}} f = 0 \tag{4.2}$$

para toda función analítica en D . Sea Q_k el camino poligonal cerrado de vértices $Z_{0,k}, Z_{1,k}, \dots, Z_{n,k}$. Mostraremos que $\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f = \dots = \int_{Q_n} f$. Para ver que $\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f$ notemos que si $\sigma_j(t) = \gamma_0(t)$ para $t \in [j/n, (j+1)/n]$ entonces $\sigma_j + [Z_{j+1,0}, Z_{j0}]$ (el "+" indica que σ_j es seguido por el polígono) es una curva cerrada rectificable en el disco $D(Z_{j,0}; r) \subset D$. Así

$$\int_{\sigma_j} f = - \int_{[Z_{j+1,0}, Z_{j0}]} f = \int_{[Z_{j0}, Z_{j+1,0}]} f.$$

Sumando a ambos lados de la ecuación sobre $0 \leq j \leq n$ se tiene $\int_{\gamma_0} f = \int_{Q_0} f$ y similarmente $\int_{\gamma_1} f = \int_{Q_n}$.

Nos falta ver que $\int_{Q_k} f = \int_{Q_{k+1}}$. Para eso ocupemos la ecuación (4.2), la cual nos entrega

$$0 = \sum_{j=0}^{n-1} \int_{P_{jk}} f. \quad (4.3)$$

Debemos observar que la integral $\int_{P_{jk}} f$ incluye la integral sobre el trazo $[Z_{j+1,k}, Z_{j+1,k+1}]$ que es el opuesto a la integral sobre $[Z_{j+1,k+1}, Z_{j+1,k}]$ que es parte de la integral $\int_{P_{j+1,k}} f$. Así

$$Z_{0k} = \Gamma\left(0, \frac{k}{n}\right) = \Gamma\left(1, \frac{k}{n}\right) = Z_{nk},$$

con lo que $[Z_{0,k+1}, Z_{0k}] = -[Z_{1k}, Z_{1,k+1}]$. Tomando en consideración las cancelaciones producidas por el efecto anterior, la ecuación (4.3) queda como

$$0 = \int_{Q_k} f - \int_{Q_{k+1}} f$$

lo que completa la demostración. \square

Nota:

A partir de este momento D denotará una región.

Definición 4.3.

Sea γ una curva rectificable en D . Diremos que γ es homótopa a cero ($\gamma \sim 0$) si γ es homótopa a una curva constante.

Definición 4.4.

Un dominio D se dirá simplemente conexo si para toda curva cerrada γ en D se cumple que $\gamma \sim 0$.

Teorema 4.2. (Teorema de Cauchy)

Si D es simplemente conexo y γ es una curva cerrada rectificable, entonces

$$\int_{\gamma} f = 0$$

para toda función analítica f .

Demostración:

Directa ocupando el teorema 4.1. \square

Corolario 4.1.

Si D es simplemente conexo y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ es una función analítica en D entonces f tiene primitiva en D .

Demostración:

Sea $a \in D$ fijo y $z \in D$. Como D es conexo existe una curva γ que une los puntos a y z . Definamos

$$F(z) = \int_{\gamma} f(w)dw.$$

Notemos que F está bien definida, es decir, que es independiente del camino escogido. En efecto, si γ_1 y γ_2 son dos caminos que unen a con z , entonces $\Gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ es una curva cerrada y por el teorema 4.2

$$\int_{\Gamma} f(w)dw = 0 \quad \text{por lo que} \quad \int_{\gamma_1} f(w)dw = \int_{\gamma_2} f(w)dw.$$

Dado que F es analítica, se procede como en el Teorema de Morera para mostrar que $F'(z_0) = f(z_0)$, lo que prueba el resultado. \square

Ejemplo 4.1.

Sea D simplemente conexo y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica tal que $f(z) \neq 0$ para todo z en D . Entonces existe una función analítica $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \exp g(z)$. Además si $z_0 \in D$ y $e^{w_0} = f(z_0)$, podemos escoger g tal que $g(z_0) = w_0$.

Solución:

Dado que la función f no tiene ceros se tiene que f'/f es analítica en D y por el corolario anterior posee una primitiva g_1 . Sea $h(z) = \exp g_1(z)$ analítica que nunca se anula. Es fácil probar que f/h es constante por lo que

$$f(z) = ce^{g_1(z)} = e^{[g_1(z)+c']}$$

para alguna constante c' . Llamando $g(z) = g_1(z) + c' + 2\pi ik$ para un k apropiado, tendremos que $g(z_0) = w_0$.

Ejercicio 4.1.

1. Sea D una región y sean $\sigma_1, \sigma_2 : [0, 1] \rightarrow D$ curvas constantes $\sigma_1 \equiv a$, $\sigma_2 \equiv b$. Muestre que si γ es una curva cerrada rectificable en D y $\gamma \sim \sigma_1$ entonces $\gamma \sim \sigma_2$. *Hint: Conecte a y b por una curva.*
2. Sea $\gamma(\theta) = \theta e^{i\theta}$ para $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\gamma(\theta) = 4\pi - \theta$ para $\theta \in [2\pi, 4\pi]$. Evalúe

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + \pi^2}.$$

3. Sea D simplemente conexo tal que no contiene al origen. Pruebe que existe una función inyectiva y analítica f tal que $f'(z) = 1/z$.
4. Muestre que en dominios simplemente conexos que no contienen al origen se puede definir al función z^α .

Ejercicio 4.2. Calcule las integrales de Fresnel

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx \quad \int_0^{\infty} \sin x^2 dx$$

Hint: Considere un sector angular de ángulo $\pi/4$, la función e^{iz^2} y recuerde la siguiente desigualdad

$$\sin \theta \geq \frac{2}{\pi} \theta \quad \forall \theta \in [0, \pi/2].$$

Ejercicio 4.3. Evalúe la siguiente integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\alpha\lambda x) dx.$$

Hint: Considere la función $f(z) = e^{-\lambda z^2}$ y un rectángulo de altura α .

4.2. Series de Laurent

Definición 4.5.

Diremos que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k = L$$

sí y sólo sí las series $\sum_{k=0}^{\infty} \mu_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_{-k}$ convergen a L^+ y L^- respectivamente y se tiene que $L^+ + L^- = L$.

De esta forma, trataremos de definir una función analítica de la siguiente forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

donde $a \in \mathbb{C}$ es un punto dado y $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ es una familia de números complejos indexada por los enteros. Observemos que a diferencia de una serie de potencias, en esta representación, denominada serie de Laurent, intervienen tanto potencias positivas como negativas de $(z - a)$. Para esto analicemos el comportamiento de la serie en un anillo.

Proposición 4.2.

Sea

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}$$

y sean

$$R_1 = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

$$R_2 = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}}.$$

Supongamos $R_1, R_2 > 0$, entonces

1. Si $1/R_2 > R_1$, entonces la serie no converge en ningún abierto de \mathbb{C} .
2. Si $1/R_2 < R_1$, entonces la serie converge en el anillo $1/R_2 < |z| < R_1$.
3. Si $1/R_2 = 0$, $R_1 = \infty$, entonces la serie converge absolutamente en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Más aún, si se satisface (i) o (ii) la función $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$ es analítica en el anillo $1/R_2 < |z| < R_1$

La demostración queda propuesta para el lector.

Definición 4.6.

Llamaremos parte principal de la serie de Laurent a

$$P(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} z^{-k}.$$

Nota:

Denotaremos por $A_{r_1, r_2}(z_0)$ al anillo $r_1 < |z - z_0| < r_2$.

El siguiente teorema muestra que las funciones analíticas poseen una representación en serie de Laurent.

Teorema 4.3. (Teorema de Laurent)

Sea f una función analítica en $A_{r_1, r_2}(z_0)$, entonces f admite la representación

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

en $A_{r_1, r_2}(z_0)$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad tomamos $z_0 = 0$. Consideremos la función analítica

$$g(w) = \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad z \in A_{r_1, r_2}(0),$$

y el camino $\Gamma^\varepsilon = C_2^\varepsilon - C_1^\varepsilon + \Gamma_1^\varepsilon - \Gamma_2^\varepsilon$, como se indica en la figura. Dado que g es analítica y Γ^ε está contenido en un dominio simplemente conexo, se tiene que

$$\int_{\Gamma^\varepsilon} g(w)dw = 0.$$

Es fácil ver que tomando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene que

$$\int_{C_2} g(w)dw - \int_{C_1} g(w)dw = 0,$$

donde los círculos C_1, C_2 están orientados en sentido antihorario. Desarrollando la expresión anterior obtenemos que

$$\int_{C_2} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw - \int_{C_1} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0 \quad \text{de donde}$$

$$\int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = f(z) \left[\int_{C_2} \frac{1}{w - z} dw - \int_{C_1} \frac{1}{w - z} dw \right].$$

Como

$$\int_{C_2} \frac{1}{w - z} dw = 2\pi i \quad \text{y}$$

$$\int_{C_1} \frac{1}{w - z} dw = 0,$$

entonces

$$2\pi i f(z) = \int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$

Ahora bien si $w \in C_2$ existe $\delta > 0$ tal que $|w| > |w| - \delta > |z|$, luego

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w} \frac{1}{1 - z/w} = \frac{1}{w} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{w}\right)^n.$$

Dado que la convergencia en el interior es uniforme, se puede concluir que

$$\int_{C_2} \frac{f(w)}{w - z} dw = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw.$$

De manera análoga, si $w \in C_1$ existe δ tal que $|w| < |z| - \delta < |z|$, luego

$$\frac{1}{w - z} = \frac{-1}{z - w} = \frac{-1}{z} \frac{1}{1 - w/z} = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{z}\right)^n,$$

de donde

$$\int_{C_1} \frac{f(w)}{w - z} dw = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_{C_1} f(w) w^n dw,$$

y así

$$2\pi i f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_{C_2} \frac{f(w)}{w^{n+1}} dw + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_{C_1} f(w) w^n dw.$$

Es claro que la representación es independiente de las curvas escogidas, dado que f es analítica en el interior del anillo.

Encontraremos una fórmula explícita para los coeficientes de la serie, con lo cual queda únicamente determinada la expansión. Si

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k$$

$$f(z)z^n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^{k+n},$$

entonces integrando en un círculo centrado C , se concluye que

$$2\pi i c_{-n-1} = \int_C f(z) z^n dz. \square$$

Ejemplo 4.2.

Calcule la serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{(1+z^2)^2}$ en $|z| > 1$.

Solución:

Consideremos $w = z^2$, luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+w)^2} &= -\frac{d}{dw} \frac{1}{1+w} \\ &= -\frac{d}{dw} \frac{1}{w} \left(\frac{1}{1 - (-1/w)} \right) \\ &= -\frac{d}{dw} \frac{1}{w} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{w} \right)^k \\ &= \frac{d}{dw} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{w} \right)^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \left(\frac{-1}{w} \right)^{k+2}. \end{aligned}$$

Volviendo ahora a la variable z

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{z^2} \right)^{k+2}.$$

Ejemplo 4.3.

Encuentre la expansión en serie de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$ en

1. $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$.
2. $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 1| < 1\}$.
3. $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.

Solución:

Desarrollaremos el primer caso, los otros quedan propuestos. Tenemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z(1-z)} &= \frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \\
 &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z+1-1} \\
 &= \frac{1}{z-1} + \frac{-1}{1-(z-1)} \\
 &= \frac{-1}{z-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k \\
 &= \sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k,
 \end{aligned}$$

la cual converge en anillo deseado.

4.3. Clasificación de singularidades

Definición 4.7.

Sea f analítica en $D(0,1) \setminus \{0\}$, cuya representación en serie de Laurent está dada por

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n.$$

Diremos que

1. 0 es singularidad removible si $c_k = 0$ para todo $k \leq -1$.
2. 0 es polo si existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $c_{-k} = 0$ para todo $k > N$ y $c_{-N} \neq 0$.

3. 0 es singularidad esencial si existe $n_k \rightarrow \infty$ tal que, $c_{-n_k} \neq 0$.

Definición 4.8.

Una singularidad z_0 de f se dice aislada si existe $r > 0$ tal que en $D(z_0, r)$ z_0 es la única singularidad de f .

Ejercicio 4.4.

Sea f analítica en $\Omega = D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$, entonces z_0 una singularidad removible sí y solo sí existe una función analítica h en $D(z_0, \delta)$, tal que $h|_{\Omega} = f$.

Proposición 4.3.

Si f tiene una singularidad aislada en z_0 y

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0,$$

entonces la singularidad z_0 es removible

Demostración:

Sea

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ 0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

la cual es continua en $D(z_0, r)$ y analítica en $D(z_0, r) \setminus \{z_0\}$. Debido a que $g(z_0) = 0$ se tiene que

$$g(z) = (z - z_0)h(z),$$

con $h(z)$ analítica en $D(z_0, r)$, con lo que se concluye

$$h(z) = f(z) \quad \forall z \neq z_0,$$

por lo que z_0 es singularidad removible. \square

Ejemplo 4.4. Pruebe que una singularidad aislada de f no puede ser polo de e^f .

Solución:

Sea z_0 la singularidad, $r > 0$ tal que en f es analítica en $\Omega = D(0, r) \setminus \{z_0\}$. Analicemos por casos.

1. Si z_0 es removible, entonces existe g analítica en $D(0, r)$ tal que $g|_{\Omega} = f$. Luego es fácil ver que e^g es analítica en $D(0, r)$ y se cumple que $e^g|_{\Omega} = e^f$.

2. Si z_0 es polo de orden m . Razonemos por contradicción, es decir, supongamos que e^f tiene un polo de orden m' . Sabemos que cerca de z_0 , la función e^f se comporta como

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^{m'}} h(z),$$

donde $h(z)$ es una función analítica. Llamemos $g(z) = e^{f(z)}$ y tomemos derivada logarítmica. Por un lado tenemos

$$\begin{aligned} \frac{g'(z)}{g(z)} &= \frac{e^{f(z)} f'(z)}{e^{f(z)}} \\ &= f'(z). \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos la fórmula explícita para g se tiene que

$$g'(z) = \frac{h'(z)}{(z - z_0)^{m'}} + \frac{m' h(z)}{(z - z_0)^{1-m'}},$$

de modo que

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = h'(z) + m'(z - z_0)^{-1},$$

lo que nos entrega una fórmula para comparar $f'(z)$.

Ahora bien $f(z)$ se comporta como $(z - z_0)^{-m}$ y por lo tanto $f'(z)$ se comportara como $(z - z_0)^{-(m+1)}$, así, igualando los ordenes de los polos, se concluye que

$$m + 1 = 1 \Rightarrow m = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto e^f no puede tener polos.

3. La demostración de este caso es análoga a la anterior. Se le sugiere al lector completar los detalles.

Teorema 4.4. (*Teorema de Casorati-Weierstrass*)

Si f tiene una singularidad esencial en z_0 , entonces

$$\forall \delta > 0 \quad \text{el conjunto} \quad \{f(z) : z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}\}$$

es denso en \mathbb{C} .

Demostración:

Razonemos por contradicción. Sea $\delta > 0$ y supongamos que existe w tal que

$$|f(z) - w| > \eta \quad \forall z \in D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}.$$

De esta forma la función $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$ resulta ser analítica en $D(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$ y acotada en z_0 , por lo que puede ser extendida a $D(z_0, \delta)$. Despejando de la ecuación anterior $f(z)$

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)} \Rightarrow f(z) = \frac{wg(z) + 1}{g(z)}$$

De esta forma, si $g(z_0) \neq 0$, entonces z_0 resulta ser una singularidad removible y si $g(z_0) = 0$, entonces z_0 es un polo de f , lo cual contradice que z_0 es una singularidad esencial de f . \square

Ejemplo 4.5. Encuentre la imagen de $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Solución: Al resolver $w = e^{1/z}$, obtenemos

$$\frac{1}{z} = \log(|w|) + i \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi i,$$

lo cual define una secuencia

$$z_k = \frac{1}{\log(|w|) + i \operatorname{Arg}(w) + 2k\pi i},$$

expresión que tiende a 0 cuando k tiende a infinito. Escogiendo δ adecuadamente tendremos que $\{e^{1/z} : 0 < |z| < \delta\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Ejemplo 4.6. Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia en $\Omega = D(z_0, 1) \setminus \{z_0\}$, que converge a z_0 , y sea $f : \Omega \setminus \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{C}$, tal que z_n es un polo de f para todo n . Demuestre que el conjunto $\{f(z)/z \in \Omega \setminus \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}\}$ es denso en \mathbb{C} .

Ejemplo 4.7. Sea $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica. Demuestre que $g(\mathbb{C})$ es denso en \mathbb{C} .

Hint: Demuéstrelo si g es un polinomio. Para el caso general considere al función $g(1/z)$.

4.4. Teorema de los residuos y sus consecuencias

Definición 4.9.

Sea γ una curva cerrada rectificable y $a \notin \gamma$. Se define el índice de γ con respecto a a como

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz.$$

Nota:

Intuitivamente, el índice representa el número de vueltas que recorre γ en torno a a .

Proposición 4.4.

Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene $n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

Por el lema (hacer referencia) nos reducimos al caso de una curva diferenciable por pedazos. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una parametrización de la curva. Por definición se tiene

$$n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt.$$

Sea ahora

$$h(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z} ds,$$

la cual resulta ser continua, con $h(a) = 0$ y h' continua por pedazos. Consideremos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (e^{-h(t)}(\gamma(t) - z)) &= -h'(t)e^{-h(t)}(\gamma(t) - z) + e^{-h(t)}\gamma'(t) \\ &= \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} e^{-h(t)}(\gamma(t) - z) + e^{-h(t)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De esta forma concluimos que $e^{-h(t)}(\gamma(t) - z)$ es constante en $[a, b]$, es decir

$$e^{-h(t)}(\gamma(t) - z) = c.$$

Evaluando en $t = a$, se tiene que $c = \gamma(a) - z$ y luego evaluando en b

$$e^{-h(b)} = \frac{\gamma(a) - z}{\gamma(b) - z} = 1$$

pues $\gamma(a) = \gamma(b)$ por ser una curva cerrada. Finalmente se concluye que

$$h(b) = 2\pi i k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow n(\gamma, z) \in \mathbb{Z}. \square$$

Propiedades:

A continuación se listarán algunas propiedades del índice.

1. $n(-\gamma, z) = -n(\gamma, z)$.
2. Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ con γ_i cerrada y orientada consistentemente, se tiene que

$$n(\gamma, z) = \sum_{i=1}^n n(\gamma_i, z).$$

3. $n(\gamma, z)$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \{\gamma\}$.

4. Si $\gamma \subset D(0, R)$ entonces $n(\gamma, z) = 0$ para $|z| > R$.

Demostración:

Las propiedades 1), 2), se dejan propuestas al lector.

Demostremos 3). Para eso, bastara mostrar que $n(\gamma, z)$ es continua como función de z . En efecto, si $\gamma(t)$ es una parametrización de γ , se tiene

$$\begin{aligned} n(\gamma, z) - n(\gamma, w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left[\frac{1}{\gamma(t) - z} - \frac{1}{\gamma(t) - w} \right] \gamma'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{\gamma'(t)(z - w)}{(\gamma(t) - z)(\gamma(t) - w)} dt. \end{aligned}$$

Así, dado $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $|z - w| < \delta$, entonces

$$(n(\gamma, z) - n(\gamma, w)) < \varepsilon,$$

por lo que el índice resulta ser continuo en cada componente conexa.

Para 4) basta notar que

$$f(w) = \frac{1}{z - w},$$

es analítica en $D(0, R)$, por lo que se tiene que

$$\int_{\gamma} \frac{1}{w - z} dw = 0. \square$$

Ejercicio 4.5.

Muestre que hay solo uno componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ que es no acotada.

Hint: Use la esfera de Riemann y la proyección.

Proposición 4.5.

Sea γ una curva cerrada que no pasa por cero y sean $z_1, z_2 \in \gamma$. Denotamos por γ_1 el arco de γ que va de z_1 a z_2 (en la dirección dada por γ) y γ_2 al arco en la dirección de γ que va de z_2 a z_1 . Supongamos además que $z_1 \in \text{Im}(z) < 0$ y $z_2 \in \text{Im}(z) > 0$. Si γ_1 no toca el eje real negativo y γ_2 no toca el eje real positivo, entonces $n(\gamma, 0) = 1$.

Definición 4.10.

Una curva continua, simple y cerrada se dice una curva de Jordan.

Teorema 4.5. (Teorema de las curvas de Jordan)

Sea γ una curva de Jordan, el conjunto $\mathbb{C} \setminus \gamma$ tiene exactamente dos componentes conexas, con γ su frontera común. Una de estas componentes es acotada y la otra es no acotada.

Observación 4.1.

El teorema anterior es un resultado profundo de la topología y su demostración escapa la naturaleza de este apunte. De todos modos, se puede consultar por la demostración en P.S. Aleksandrov "Combinatorial Topology" Vol.1, Graylock Press, Rochester, N.Y.(1956), Chap.2.

Ejercicio 4.6. Si γ es una curva simple, diferenciable por pedazos, entonces existe una componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma$ donde $n(\gamma, \cdot) = \pm 1$.

Definición 4.11.

Sea f una función analítica en $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Para la singularidad z_k consideramos la expansión en serie de Laurent en torno a z_k de f

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^k (z - z_k)^n.$$

Definimos el residuo de f en z_k como

$$Res(f, z_k) = c_{-1}^k.$$

Teorema 4.6. (Teorema de los residuos)

Sea f analítica en $D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$ con D simplemente conexo y $\{z_1, \dots, z_k\}$ singularidades aisladas. Sea γ una curva cerrada en D tal que $z_i \notin \gamma \forall i = 1, \dots, k$, entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^k n(\gamma, z_i) Res(f, z_i).$$

Demostración:

Sea

$$P_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}^j (z - z_j)^{-n}$$

la parte principal del desarrollo en serie de Laurent en torno al polo z_j , la cual converge uniformemente en compactos de $D \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$. Consideremos ahora

$$g(z) = f(z) - P_1(z) - P_2(z) - \dots - P_k(z),$$

definido en $D \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$. Cerca de z_j , f se escribe como

$$f(z) = P_j(z) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^j (z - z_j)^n.$$

Luego reemplazando esto en g tenemos

$$g(z) = P_j(z) + \sum_{n=0}^{\infty} c_n^j (z - z_j)^n - \sum_{j=0}^n P_j(z).$$

Así $\{z_1, \dots, z_k\}$ resultan ser singularidades removibles g , por lo que $\int_{\gamma} g(z)dz = 0$. Más explícitamente

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z)dz &= \sum_{j=1}^k \int_{\gamma} P_j(z)dz \\ &= \sum_{j=1}^k \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}^j \int_{\gamma} (z - z_j)^{-n} dz \\ &= \sum_{j=1}^k c_{-1}^j n(\gamma, z_j) 2\pi i \\ &= 2\pi i \sum_{i=0}^k n(\gamma, z_i) Res(f, z_i). \square \end{aligned}$$

Observación 4.2.

Si z_k es un polo de f de orden n , entonces

$$f(z) = c_{-n}(z - z_k)^{-n} + \dots + c_{-1}(z - z_k)^{-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z - z_k)^i,$$

multiplicando por $(z - z_k)^n$

$$\begin{aligned} (z - z_k)^n f(z) &= c_n + \dots + c_{-1}(z - z_k)^{n-1} + \sum_{i=0}^{\infty} c_i(z - z_k)^i \\ \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_k} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_k)^n f(z) \right] &= (n-1)! Res(f, z_k). \end{aligned}$$

Luego hemos encontrado una fórmula alternativa para el residuo

$$Res(f, z_k) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \left[\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z - z_k)^n f(z) \right]. \tag{4.4}$$

Ejemplo 4.8.

Calcular los residuos de

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z+1)^2}, \quad f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(z)}$$

Solución:

Para el primer caso, notemos que la función tiene polos simples en $\pm i$ y uno doble en 0. Ocupemos la fórmula (4.4)

$$\begin{aligned} Res(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{1}{z^2(z+i)(z-i)} \\ &= \frac{1}{i^2(2i)} = \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

El caso del polo $-i$ lo dejamos propuesto. Veamos el polo doble

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, 0) &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} z^2 \frac{1}{z^2(z^2 + 1)} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \frac{1}{(z^2 + 1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Encontremos ahora el residuo de $f(z) = \frac{1}{z^2 \sin(z)}$. El caso de los polos simples $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ se reduce a un cálculo similar al anterior. Calculemos el polo $z = 0$ de orden 3, para esto encontremos el coeficiente c_{-1} de la expansión en serie de Laurent de f . Dado que $1/\sin z$ tiene un polo simple en 0, se tiene que

$$\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{1}{z^2} \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots \right),$$

por lo que $c_{-1} = a_1$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin z} \sin z &= 1 \\ \left(\frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \dots \right) \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) &= 1. \end{aligned}$$

De aquí se concluye que

$$\begin{aligned} a_{-1} &= 1, \quad a_0 = 0, \quad \frac{-a_1}{3!} + a_1 = 0, \\ \text{y por lo tanto} \quad a_1 &= \frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

En resumen

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{6}.$$

Ejercicio 4.7. Para $n \in \mathbb{N}$ encuentre el residuo de $(1 - e^{-z})^{-n}$ en 0.

Teorema 4.7. (Teorema de Cauchy para la derivada)

Sea f analítica en D simplemente conexo y sea γ una curva cerrada. Sea $z \notin \gamma$, entonces

$$f^{(k)}(z)n(\gamma, z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w - z)^{(k+1)}}.$$

Demostración:

Esta demostración se puede hacer de dos formas, una con residuos y otra por inducción en las derivadas. Aquí demostraremos el resultado via residuos, ocupando (4.4) y notando que z es un polo de orden a lo más $k + 1$. Así

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}, z \right) &= \frac{1}{k!} \lim_{w \rightarrow z} \frac{d^k}{dz^k} (w - z)^{k+1} \frac{f(w)}{(w - z)^{k+1}} \\ &= \frac{f^k(z)}{k!}. \end{aligned}$$

y luego

$$n(\gamma, z) \frac{f^k(z)}{k!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}} \square$$

Nota:

Para ver la demostración alternativa puede consultar el siguiente libro: Teoría de funciones de variable compleja, Markushevich, pag. 299, cap.I.

Ejercicio 4.8. Sea γ una curva cerrada y $\varphi : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ continua. Sea $D = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : n(\gamma, z) = 1\}$, entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw,$$

es analítica en D . Encuentre además las derivadas.

Definición 4.12.

Se dice que una función f es meromorfa en D , si f es analítica en D salvo en un conjunto de polos aislados.

Observación 4.3.

El hecho de que los polos sean aislados exige que el conjunto de ellos sea a lo mas numerable.

Teorema 4.8.

Sea D simplemente conexo y $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa. Consideremos una curva cerrada γ que no contiene a los polos ni a los ceros de f , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{\mathbb{Z}_{\gamma}(f)} n(\gamma, w) - \sum_{\mathbb{P}_{\gamma}(f)} n(\gamma, u),$$

donde los ceros ($\mathbb{Z}_{\gamma}(f)$) y los polos ($\mathbb{P}_{\gamma}(f)$) se cuentan con multiplicidad.

Demostración:

Consideremos $g(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ que tiene singularidades aisladas en los ceros y en los polos de f . Sea a un cero de f de orden k , luego en una vecindad de a

$$f(z) = (z-a)h(z) \quad \text{por lo que} \quad f'(z) = k(z-a)^{k-1}h(z) + (z-a)^k h'(z),$$

donde $h(z)$ cumple que $h(a) \neq 0$. Dividiendo

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{k(z-a)^{k-1}h(z)}{(z-a)^k h(z)} + \frac{h'(z)(z-a)^k}{h(z)(z-a)^k} \\ &= k \frac{1}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)}, \end{aligned}$$

por lo que $\text{Res}(g(z), a) = k$. Para un polo b de orden m se procede de manera análoga y se tendrá

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{-m(z-b)^{-1-m}\alpha(z)}{(z-b)^{-m}\alpha(z)} + \frac{\alpha'(z)(z-b)^{-m}}{\alpha(z)(z-b)^{-m}} \\ &= -m\frac{1}{z-b} + \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)}, \end{aligned}$$

donde $\alpha(z)$ es analítica y $\alpha(b) \neq 0$. Así $\text{Res}(g(z), b) = -m$, lo que concluye el resultado. \square

Definición 4.13.

Una curva cerrada γ se dice regular si

$$n(\gamma, z) = 0 \quad \text{o} \quad n(\gamma, z) = 1.$$

Corolario 4.2.

Sea f analítica en D simplemente conexo y sea γ una curva cerrada regular tal que no contiene los ceros de f , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathbb{Z}(f),$$

donde $\mathbb{Z}(f)$ denota el número de ceros de la función.

Observación 4.4.

Una interpretación poco rigurosa, pero intuitiva del corolario anterior es la siguiente

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} [\log f(b) - \log f(a)].$$

la cual se conoce como principio del argumento. En forma más coloquial diríamos que el número de veces que se esta sumando $2\pi i$ es el número de ceros. Equivalentemente, este hecho resulta de una transformación

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w} \\ &= n(\Gamma, 0), \end{aligned}$$

donde Γ es la curva $f(\gamma)$. Es decir, el número de ceros es el número de vueltas de nuestra nueva curva alrededor de 0.

Veamos más aplicaciones y consecuencias del Teorema de los Residuos 4.6.

4.4.1. Aplicación a la función inversa

Nos proponemos en esta subsección encontrar la función inversa (condiciones y fórmulas) de una función analítica f .

Proposición 4.6.

Sea f analítica en una vecindad de z_0 con $f'(z_0) = 0$, entonces f no es inyectiva.

Demostración:

Supongamos que $f^{(k)}(z_0) = 0$ y $f^{(k+1)}(z_0) \neq 0$ y sea $w_0 = f(z_0)$. Sea $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(z) - w_0 \neq 0 \quad \forall z \in \overline{D(z_0, \varepsilon)} \setminus \{z_0\},$$

y consideremos $\gamma = \partial D(z_0, \varepsilon)$. Por un lado tenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(z) - w_0)'}{f(z) - w_0} dz = k.$$

Consideremos ahora $\Gamma = f(\gamma)$, entonces existe $\delta > 0$ tal que si $|w - w_0| < \delta$ entonces $n(\Gamma, w) = k$, es decir

$$\begin{aligned} n(\Gamma, w) = k &= \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{f'(\gamma(t))\gamma'(t)}{f(\gamma(t)) - w} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f(z) - w)'}{f(z) - w} dz \\ &= \mathbb{Z}(f(z) - w). \end{aligned}$$

Para que todos los ceros de $f(z) - w$ sean simples, basta tomar una vecindad de z_0 suficientemente pequeña tal que $f'(z) \neq 0$ en $D(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\}$. \square

Teorema 4.9.

Sea f analítica e inyectiva en $D(z_0, \varepsilon)$ y $\gamma = \partial D(z_0, \varepsilon)$. Si g una función analítica en \mathbb{C} , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = g(f^{-1}(w)),$$

donde $w \in D(w_0, \delta)$ y $\delta < \text{dist}(w_0, \gamma)$.

Demostración

Sea $w_0 = f(z_0)$. Dado que f es inyectiva se tiene $f'(z) \neq 0$ en $D(z_0, \varepsilon)$, por lo que $f(z) - w_0 = 0$ tiene como única solución z_0 en $\overline{D(z_0, \varepsilon)}$. Elegimos $\delta > 0$ tal que si $|w - w_0| < \delta$ entonces para $\Gamma = f(\gamma)$ se cumple $n(\Gamma, w_0) = n(\Gamma, w)$. Como g es analítica se tiene

$$\text{Res} \left(g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}, z_0 \right) = g(z_0) \text{Res} \left(\frac{f'(z)}{f(z) - w_0}, z_0 \right) = g(z_0),$$

por lo que

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = g(z_0).$$

Dado que $f(z) - w$ solo tiene un cero en $D(z_0, \varepsilon)$ se cumple que

$$\int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz = g(z) = g(f^{-1}(w)),$$

donde $w \in D(w_0, \delta)$, $\delta < \text{dist}(w_0, \gamma)$. \square

Corolario 4.3.

Bajo las mismas hipótesis sobre f del teorema 4.9, se cumple

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} z \frac{f'(z)}{f(z) - w} dz,$$

donde $w \in D(w_0, \delta)$, $\delta < \text{dist}(w_0, \gamma)$.

Demostración:

Basta tomar $g(z) = z$ en el teorema 4.9.

Teorema 4.10.

La expansión en serie de $g(f^{-1})$ definida en el teorema 4.9 está dada por

$$g(f^{-1}(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz \right] (w - w_0)^n. \quad (4.5)$$

Demostración:

En la demostración seguiremos la misma notación que en el teorema 4.9. Dado que $|w - w_0| < \delta$ y $|f(z) - w_0| \geq \delta$ para $z \in \gamma$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z) - w} &= \frac{f'(z)}{f(z) - w_0 - (w - w_0)} \\ &= \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \frac{1}{1 - \frac{w - w_0}{f(z) - w_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \left[\frac{w - w_0}{f(z) - w_0} \right]^n. \end{aligned}$$

Denotando $M = \max_{z \in \gamma} |f'(z)|$, vemos que el termino general de la serie está acotado por

$$\frac{M}{\delta} \left(\frac{|w - w_0|}{\delta} \right)^n,$$

lo que implica que la serie converge absolutamente. Ocupando el resultado del teorema 4.9 e intercambiando serie con integral, se concluye que

$$g(f^{-1}(w)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz \right] (w - w_0)^n. \square$$

Ejemplo 4.9.

Pruebe que la serie (4.5), puede reescribirse como

$$g(f^{-1}(w)) = g(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g'(z) \left[\frac{z - z_0}{f(z) - w_0} \right]^n \right\}_{z=z_0} (w - w_0)^n.$$

Solución

Básicamente queremos evaluar

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz$$

para poder reemplazar el resultado en (4.5).

Seguendo la demostración del teorema 4.9 se tienen que para $n = 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)} dz = g(z_0).$$

Usando integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz &= \frac{-1}{2\pi i n} \int_{\gamma} g(z) d \left\{ \frac{1}{(f(z) - w_0)^n} \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi i n} \int_{\gamma} \frac{g'(z)}{(f(z) - w_0)^n} dz. \end{aligned}$$

Supongamos que $g'(z_0) \neq 0$, entonces es claro que la función

$$\frac{g'(z)}{(f(z) - w_0)^n}$$

tiene un polo en z_0 de orden n . Ocupando la fórmula (4.4), se tiene

$$Res \left(\frac{g'(z)}{(f(z) - w_0)^n}, z_0 \right) = \frac{1}{(n-1)!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g'(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right\}_{z=z_0}$$

que sigue siendo válida si $g'(z_0) = 0$. Luego ocupando este resultado en la fórmula integral, se concluye que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{(f(z) - w_0)^{n+1}} dz = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} g'(z_0) \frac{(z - z_0)^n}{(f(z) - w_0)^n} \right\}_{z=z_0}. \square$$

Ejercicio 4.9.

Reescribir los teoremas y corolarios anteriores para $g(z) = z$.

4.4.2. Rouché, Hurwitz y corolarios

Teorema 4.11. (*Teorema de Rouché*)

Sean f, g funciones analíticas en D simplemente conexo. Consideremos una curva regular γ que no contiene ceros ni de f ni de g . Supongamos además que

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \gamma.$$

Entonces se tiene que

$$\mathbb{Z}_\gamma(f + g) = \mathbb{Z}_\gamma(f),$$

donde los ceros han sido contados con multiplicidad.

Demostración

Primero, recordemos que

$$\mathbb{Z}(f + g) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(f(z) + g(z))'}{f(z) + g(z)} dz \quad \text{y} \quad \mathbb{Z}(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Usando que

$$f(z) + g(z) = f(z) \left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right],$$

obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(f(z) + g(z))'}{f(z) + g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\left[\frac{g(z)}{f(z)} \right]'}{\left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]} dz.$$

Notando que $\frac{g(\gamma)}{f(\gamma)} \in D(0, 1)$, por lo que

$$n \left(\frac{g(\gamma)}{f(\gamma)}, -1 \right) = 0,$$

y además

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\left[\frac{g(z)}{f(z)} \right]'}{\left[1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right]} dz = n \left(\frac{g(\gamma)}{f(\gamma)}, -1 \right),$$

se concluye

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{(f(z) + g(z))'}{f(z) + g(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz. \square$$

Ejercicio 4.10.

Demuestre el Teorema Fundamental del Álgebra usando el Teorema de Rouché.

Ejemplo 4.10.

Sea $f : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ analítica, tal que

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad |f'(z)| \leq M \quad \forall z \in D(0, 1).$$

- i. Demuestre que $|f'(z) - 1| \leq (M + 1)|z|$ para todo $z \in D(0, 1)$. *Hint: Use el Lema de Schwarz.*
- ii. Pruebe que todo $w \in D\left(0, \frac{1}{2(M+1)}\right)$ tiene una única preimágen en $D\left(0, \frac{1}{M+1}\right)$. *Hint: Use el Teorema de Rouché, la parte anterior y observe que $f(z) - w + w - z = \int_0^z (f'(\zeta) - 1)d\zeta$.*

Solución:

i. Propuesto

ii. Si $w \in D\left(0, \frac{1}{2(M+1)}\right)$ y $z \in \partial D\left(0, \frac{1}{M+1}\right)$ entonces

$$\begin{aligned} |w - z| &\geq |z| - |w| \\ &= \frac{1}{M+1} - |w| \\ &> \frac{1}{2(M+1)}, \end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned} |f(z) - w + w - z| &= \left| \int_0^z (f(\zeta) - 1)d\zeta \right| \\ &\leq \int_0^z |f(\zeta) - 1| d\zeta \\ &\leq (M+1) \int_0^z |\zeta| d\zeta \\ &= \frac{(M+1)|z|^2}{2} = \frac{1}{2(M+1)}. \end{aligned}$$

Entonces, el Teorema de Rouché nos asegura que el número de ceros de $z - w$ es el mismo que el de $f(z) - w + w - z + (z - w)$ en $D\left(0, \frac{1}{M+1}\right)$, es decir

$$\mathbb{Z}(f(z) - w) = \mathbb{Z}(f(z) - w + w - z + (z - w)) = \mathbb{Z}(z - w) = 1,$$

es decir la ecuación $f(z) = w$ tiene exactamente una solución en ese disco.

Ejemplo 4.11.

Sea $P(z) = z^5 + z$.

i. Encuentre explícitamente una constante $\delta > 0$ tal que $P(z) = w$ tenga una única solución z con $|z| < 1/2$ si $|w| < \delta$.

ii. Para $|w| < \delta$ sea $R(w)$ la única solución de $P(z) = w$ con $|z| < 1/2$. Pruebe que

$$R(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta) - w} d\zeta.$$

iii. Encuentre el primer término distinto de cero de la expansión en serie de $R(w)$ en torno a 0.

Solución:

i. Las soluciones de $P(z) = w$ son los ceros de $P(z) - w = z^5 + z - w$, por lo que aplicaremos Rouché. Luego tomamos $f(z) = z$ y $g(z) = z^5 - w$, veamos que sucede

$$|f(z)| = |z| = \frac{1}{2} \quad \text{en } D\left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Impongamos para g la condición necesaria para aplicar Rouché, es decir

$$|g(z)| = |z^5 - w| \leq |z^5| + |w| < \frac{1}{2}$$

y dado necesitamos $|z| = 1/2$, luego

$$|w| < \frac{1}{2} - \frac{1}{2^5} = \frac{15}{32},$$

por lo que para $\delta = 15/32$ tenemos que existe una única solución a nuestra ecuación.

ii. Propuesto (directo del Teorema de la Función Inversa).

iii. Dado que $R(w)$ es la inversa del polinomio $P(z)$, luego encontrar su serie es recordar la fórmula (4.5), es decir

$$R(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta)^{n+1}} d\zeta \right] w^n,$$

donde hemos tomado $w_0 = 0$. Encontremos el primer término distinto de cero. Es evidente que $R(0) = 0$, veamos que pasa para $n = 1$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{\zeta P'(\zeta)}{P(\zeta)^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{\zeta}{\zeta^2} \cdot \frac{5\zeta^4 + 1}{(\zeta^4 + 1)^2} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(0,1/2)} \frac{5\zeta^4 + 1}{(\zeta^4 + 1)^2} \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= 1, \end{aligned}$$

es decir $a_1 = 1$, donde el último resultado se saca al calcular el residuo de la integral.

Observación 4.5.

La parte iii. del ejemplo anterior se puede hacer directamente ocupando derivada implícita como sigue

$$\begin{aligned} z^5(w) + z(w) &= w \\ 5z^4(w)z'(w) + z'(w) &= 1 \quad \text{y evaluando en cero} \\ z'(w) &= 1, \end{aligned}$$

es decir, el primer coeficiente de la serie distinto de cero es $a_1 = 1$.

Ejercicio 4.11.

Encuentre el número de raíces de la siguiente ecuación

$$z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$$

en $|z| < 1$.

Teorema 4.12.

Sea D una región y $f_n : D \rightarrow D$ analítica para todo n con $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos de D . Entonces se tiene $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente en compactos de D .

Demostración :

Demostraremos que para cada $z_0 \in D$ existe $r > 0$ tal que $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente en $D(z_0, r)$. Sea $r > 0$ tal que $D(z_0, r) \subset D$, debido a la fórmula de Cauchy

$$f'(z) - f'_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(w) - f_n(w)}{(w - z_0)^2} dw.$$

Para $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f(w) - f_n(w) \leq \varepsilon$ en $\partial D(z_0, r)$, por lo que

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \int_{\partial D(z_0, r)} \varepsilon \left| \frac{1}{(w - z_0)^2} \right| dw,$$

y si $z \in D(z_0, r/2)$ obtenemos

$$|f'(z) - f'_n(z)| \leq \left(\frac{4\varepsilon}{r^2} \right) (2\pi) \left(\frac{r}{2} \right) = \frac{4\pi\varepsilon}{r},$$

lo cual prueba que $f'_n \rightarrow f'$ uniformemente en $D(z_0, r/2)$. El resultado general se tiene usando que todo compacto admite recubrimiento finito. \square

Teorema 4.13. (Teorema de Hurwitz)

Sean $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ funciones analíticas en una región D y $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos de D . Si $f_n(z) \neq 0$ para todo $z \in D$ entonces $f(z) \neq 0 \forall z \in D$ o $f \equiv 0$.

Demostración:

Razonemos por contradicción. Supongamos que existe z_0 tal que $f(z_0) = 0$ y $f \neq 0$. Eligiendo $\varepsilon > 0$ pequeño obtenemos que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = k,$$

donde $k \neq 0$ es la multiplicidad de z_0 . Pero por el teorema anterior

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'_n(w)}{f_n(w)} dw \rightarrow \int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw,$$

y como $\int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'_n(w)}{f_n(w)} dw = 0$ para todo n se concluye que $\int_{\partial D(z_0, \varepsilon)} \frac{f'(w)}{f(w)} dw = 0$, lo cual es una contradicción. \square

Corolario 4.4.

Sea $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una secuencia de funciones analíticas tal que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos de una región D . Si f_n es inyectiva para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es inyectiva o f es constante.

Demostración:

Procederemos por contradicción. Supongamos que existen $z_1 \neq z_2$ tal que $f(z_1) = f(z_2) = \alpha$ y f no constante. Sea $\varepsilon > 0$ tal que la ecuación $f(z) - \alpha = 0$ tiene como única solución z_1 en $D(z_1, \varepsilon)$ y z_2 en $D(z_2, \varepsilon)$.

Por el Teorema de Hurwitz existen $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $f_n(z_n) = \alpha$ y $f_n(w_n) = \alpha$, con $z_n \in D(z_1, \varepsilon)$ y $w_n \in D(z_2, \varepsilon)$. Esto último contradice el hecho de que f_n sea inyectiva. \square

Ejercicio 4.12.

Sea

$$g_n = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Demuestre que para un n suficientemente grande g_n tiene un cero en $D(\pi, 1)$.

4.4.3. Aplicación del Teorema de los Residuos al cálculo de integrales reales

1. Sea R una función racional en las variables x, y . Para calcular

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta,$$

la escribiremos como una integral compleja. Consideremos $z = e^{i\theta}$ en $\partial D(0, 1)$, así

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} \right], \quad \sin \theta = \frac{1}{2i} \left[z - \frac{1}{z} \right] \quad \text{y} \quad d\theta = \frac{dz}{iz},$$

de donde

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} R\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \frac{1}{2i}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right) \frac{dz}{iz},$$

y por el Teorema de los Residuos

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta = 2\pi i \sum_{w_i} \text{Res} \left\{ R\left(\frac{1}{2}\left[z + \frac{1}{z}\right], \frac{1}{2i}\left[z - \frac{1}{z}\right]\right) \frac{1}{iz}, w_i \right\}, \quad (4.6)$$

donde w_i son los polos de la función racional.

Ejemplo 4.12.

Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta},$$

donde $a > 1$.

Solución:

Escribiendo la integral en términos de z se tiene y usando (4.6) tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} &= \int_{|z|=1} \frac{-2i}{z^2 + 2az + 1} dz \\ &= -2i \cdot 2\pi i \sum_{w_i} \text{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, w_i \right), \end{aligned}$$

donde w_i son polos en $D(0, 1)$. Es fácil ver que el único polo de $(z^2 + 2az + 1)^{-1}$ en $D(0, 1)$ es $z_1 = -a + \sqrt{a^2 - 1}$ el cual resulta ser un polo simple. Un rápido cálculo nos indica que

$$\text{Res} \left(\frac{1}{z^2 + 2az + 1}, z_1 \right) = \frac{1}{2\sqrt{a^2 - 1}},$$

con lo que concluimos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

Ejercicio 4.13.

Calcule las integrales

- $\int_0^{2\pi} \frac{\cos \theta}{a + b \cos \theta} d\theta$ si $0 < b < a$.
- $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b \sin \theta}$ si $a > 0, b > 0$.
- $\int_0^{\pi/2} \frac{a}{a^2 + \sin^2 \theta} d\theta$.

2. Sean P, Q dos polinomios tal que $gr(P) + 2 \leq gr(Q)$ y $P(z)/Q(z)$ no tiene polos en el eje real. Queremos encontrar una fórmula para la siguiente integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Para eso consideremos el camino de la figura. Como $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ es convergente, lo anterior es igual a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

Ahora bien, sabemos que

$$\int_{\gamma_R^1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz + \int_{\gamma_R^2} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{w_i} Res \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, w_i \right),$$

donde w_i son los polos en el semiplano superior de la función racional. Sea $R > 0$ tal que todos los polos de $f(z)$ en $Im(z) > 0$ pertenecen a $D(0, R/2) \cap Im(z) > 0$, luego

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_R^2} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} iRe^{i\theta} d\theta \right| \\ &= \int_0^\pi \left| \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(Re^{i\theta})} \right| R d\theta \\ &\leq \int_0^\pi \frac{K}{R^2} R d\theta \\ &= \frac{K\pi}{R} \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Además

$$\int_{\gamma_R^1} \frac{Q(z)}{P(z)} dz \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} dx,$$

lo cual nos permite concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(x)}{P(x)} dx = 2\pi i \sum_{w_i} Res \left(\frac{P(z)}{Q(z)}, w_i \right), \quad (4.7)$$

donde w_i son los polos en el semiplano superior ($\{Im(z) > 0\}$).

Ejemplo 4.13.

Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx.$$

Solución:

Sea $P(z) = z^2 - z + 2$ y sea $Q(z) = z^4 + 10z^2 - 9$. Notemos que los ceros de $P(z)$ no coinciden con los ceros de $Q(z)$, luego, los polos de la función $\frac{P(z)}{Q(z)}$ son los ceros de $Q(z)$. Descomponiendo $Q(z)$

$$\begin{aligned} Q(z) &= (z^2 + 9)(z^2 + 1) \\ &= (z + 3i)(z - 3i)(z + i)(z - i), \end{aligned}$$

luego los polos buscados son $z_1 = 3i$, $z_2 = i$. Un pequeño cálculo nos indica que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_1\right) &= \frac{-7i + 3}{48}, \\ \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)}, z_2\right) &= \frac{1 - i}{16}, \end{aligned}$$

por lo que usando (4.7), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx &= 2\pi \left[\frac{-7i + 3}{48} + \frac{1 - i}{16} \right] \\ &= \frac{5\pi}{12} \end{aligned}$$

Ejercicio 4.14.

Calcule la siguiente integral real

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 2x + 2)}$$

3. Sean P , Q dos polinomios tal que $gr(P) + 1 \leq gr(Q)$ y $P(z)/Q(z)$ no tiene polos en $Im(z) = 0$. Buscamos una fórmula explícita para la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx,$$

la cual probaremos que está bien definida. Consideremos el camino de la figura, la función compleja $e^{iz}P(z)/Q(z)$ y denotemos por Γ a $\bigcup_{i=0}^4 \gamma_i$. Es importante notar el hecho de que el camino anterior no fue tomado simétrico, pues a priori no sabemos si la integral converge o no, por lo que se deben escoger puntos arbitrarios y tomar el límite por separado. Tomemos M_1 , M_2 , H suficientemente grandes para que todos los polos de la función en $Im(z) > 0$ queden encerrados por Γ . De esta forma el teorema de los residuos nos entrega

$$\sum_{i=0}^4 \int_{\gamma_i} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = 2\pi i \sum_{w_j} \operatorname{Res}\left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w_j\right), \quad (4.8)$$

donde w_j representa un polo de la función. Analicemos el comportamiento de cada integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_2} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz \right| &= \left| \int_0^H \frac{P(M_1 + iy)}{Q(M_1 + iy)} e^{i(M_1 + iy)} i dy \right| \\ &\leq \int_0^H \frac{c}{M_1} e^{-y} dy \\ &= \frac{c}{M_1} (1 - e^{-H}), \end{aligned}$$

donde c es una constante. Análogamente para γ_4 se tiene que

$$\left| \int_{\gamma_4} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz \right| \leq \frac{c'}{M_2} (1 - e^{-H}),$$

Para γ_3 se tiene

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_3} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz \right| &= \left| - \int_{-M_2}^{M_1} \frac{P(x + iH)}{Q(x + iH)} e^{x+iH} dx \right| \\ &\leq \int_{-M_2}^{M_1} \frac{c''}{H} e^{-H} dx \\ &= (M_1 + M_2) \frac{e^{-H} c''}{H}. \end{aligned}$$

Además

$$\int_{\gamma_1} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \int_{-M_2}^{M_1} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx,$$

de esta forma, tomando $H \rightarrow \infty$ se cumple que cada cota encontrada para las integrales sobre $\gamma_i, i = 2, 3, 4$ tiende a cero y tomando ahora $M_1, M_2 \rightarrow \infty$ se tiene que la expresión (4.8) resulta ser

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{w_j} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w_j \right). \quad (4.9)$$

Ejemplo 4.14.

Pruebe que

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a} \quad \forall a > 0$$

Solución:

Dado que el integrando es par, podemos ocupar (4.9), para lo cual debemos calcular los polos y residuos de $ze^{iz}/(z^2 + a^2)$. Es fácil ver que el polo a considerar es ia y su residuo es

$$\begin{aligned} \text{Res} \left(\frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2}, ia \right) &= \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \frac{ze^{iz}}{z^2 + a^2} \\ &= \frac{aie^{iai}}{2ai} = \frac{e^{-a}}{2}. \end{aligned}$$

Tenemos entonces que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2},$$

tomando parte imaginaria, se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = 2\pi \frac{e^{-a}}{2}$$

por lo que $\int_0^{\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2 + a^2} dx = \pi \frac{e^{-a}}{2}.$

Ejercicio 4.15.

Calcule las siguientes integrales reales

a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + \pi^2)^2} dx.$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2 + x^2} dx.$

c) $\int_0^{\infty} \frac{x^2 \cos^2(\pi x)}{(x^2 + 1)^2} dx.$

4. Sean P, Q dos polinomios tal que $gr(P) + 1 \leq gr(Q)$ y supongamos ahora que $P(z)/Q(z)$ tiene polos $z_1 \dots z_k$ simples en $Im(z) = 0$. Queremos encontrar una fórmula para el valor principal de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx.$$

Para eso consideremos el mismo contorno anterior, salvo que entorno a cada polo real consideramos semicircunferencias C_{δ_j} del estilo $\delta_j e^{-i\theta} + z_j, \theta \in [0, \pi]$. Analicemos el caso en el que hay solamente un polo en el eje real (la generalización queda clara después de este análisis). Las curvas $\gamma_i, i = 2, 3, 4$, tienen el mismo desarrollo anterior (su convergencia a cero no se ve alterada), con lo cual solo debemos estudiar el comportamiento siguiente

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{-\delta + z_1} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx + \int_{\delta + z_1}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx + \int_{C_{\delta}} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz, \quad (4.10)$$

en donde se tomó el valor principal para que las integrales converjan. Consideremos δ suficientemente pequeño, H, M_1, M_2 suficientemente grandes para que todos los polos de $Im(z) > 0$ estén dentro del camino considerado. Sabemos que cerca de z_1 se tiene

$$e^{iz} \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{\alpha}{z - z_1} + L(z),$$

donde $L(z)$ es una función analítica en una vecindad de z_1 y α el coeficiente -1 de la expansión en series de Laurent. Teniendo en cuenta el teorema de Cauchy, se tiene que

$$\int_{C_{\delta}} L(z) dz = 0,$$

por lo que

$$\int_{C_\delta} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz = \int_{C_\delta} \frac{\alpha}{z - z_1} dz.$$

Escojamos $\log(z - z_1)$ con su argumento en $(-\pi/2, 3\pi/2)$, luego

$$\begin{aligned} \int_{C_\delta} \frac{\alpha}{z - z_1} dz &= \log(z_1 + \delta - z_1) - \log(z_1 - \delta - z_1) \\ &= \log(\delta) - \log(-\delta) \\ &= -\pi i \alpha. \end{aligned}$$

De esta forma, igualando (4.10) a sus residuos y luego tomando limite cuando δ se va a cero, se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{w_j} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w_j \right) + \pi i \alpha.$$

donde w_j representa un polo cualquiera en $\text{Im}(z) > 0$. Es fácil probar que (propuesto) la generalización viene dada por

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} e^{ix} dx = 2\pi i \sum_{w_j} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, w_j \right) + \pi i \sum_{z_j} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz}, z_j \right), \quad (4.11)$$

donde w_j representa un polo cualquiera en $\text{Im}(z) > 0$ y z_j un polo simple en $\text{Im}(z) = 0$.

Observación 4.6.

El hecho de que los polos sean simples en $\text{Im}(z) = 0$ es fundamental, si no

$$\begin{aligned} \int_{C_\delta} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iz} dz &= \int_{C_\delta} \left[\frac{\alpha_k}{(z - z_1)^k} + \dots + \frac{\alpha_{-1}}{z - z_1} + L(z) \right] dz \\ &= \frac{\alpha_k}{1 - k} \left\{ (z - z_1)^{1-k} \right\}_{z_1 - \delta}^{z_1 + \delta} + \dots + \alpha_1 \left\{ \log(z - z_1) \right\}_{z_1 - \delta}^{z_1 + \delta} + o(\delta), \end{aligned}$$

lo cual puede valer cero o infinito, dependiendo del orden del polo.

Ejemplo 4.15.

Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Solución:

Ocupemos (4.11), así

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x} dx &= \pi i \text{Res} \left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) \\ &= \pi i, \end{aligned}$$

luego tomando parte imaginaria

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ejercicio 4.16.

Calcule

- a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{a^2-x^2} dx.$
 b) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$

5. Sean P, Q dos polinomios tal que $gr(P) + 2 \leq gr(Q)$ y $P(z)/Q(z)$ no tiene polos en $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/Im(z) = 0, Re(z) \geq 0\}$. Nos interesa calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

para lo cual consideramos la función de variable compleja $\log(z)P(z)/Q(z)$, donde el argumento esta tomado en $(0, 2\pi)$ y consideramos el camino de la figura. Tomemos R suficientemente grande y δ pequeño tal que todos los polos de $\log(z)P(z)/Q(z)$ en Ω estén encerrados por la curva. Calculemos cada integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz \right| &= \left| \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{P(Re^{i\theta})}{Q(re^{i\theta})} \log(Re^{i\theta}) Ri\theta d\theta \right| \\ &\leq \int_{\delta}^{2\pi-\delta} \frac{c}{R^2} |\log(R) + i\theta| R d\theta \\ &\leq \frac{2\pi c}{R} [2\pi \log(R) + 4\pi^2], \end{aligned}$$

expresión que tiende a cero cuando R tiende a infinito. Un desarrollo similar nos llevara a concluir que

$$\left| \int_{C_{\delta}} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz \right| \leq c_2 [2\pi \log(\delta) + 4\pi^2] \delta,$$

la cual tiende a cero cuando δ tiende a cero. Analicemos I_1 e I_2 ,

$$\int_{I_1} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz = \int_0^R \frac{P(i\delta + x)}{Q(i\delta + x)} \log(i\delta + x) dx,$$

de esta forma si $\delta \rightarrow 0$

$$\int_0^R \frac{P(i\delta + x)}{Q(i\delta + x)} \log(i\delta + x) dx \rightarrow \int_0^R \frac{P(x)}{Q(x)} \log(x) dx.$$

Para el caso de I_2 hay que notar que hemos dado aproximadamente una vuelta completa, así

$$\int_{I_2} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz = - \int_0^R \frac{P(i\delta + x)}{Q(i\delta + x)} [\log(i\delta + x) + 2\pi i + o(\delta)] dx,$$

y tomando $\delta \rightarrow 0$ se tendrá

$$\int_{I_2} \frac{P(z)}{Q(z)} \log z dz \rightarrow - \int_0^R \frac{P(x)}{Q(x)} [\log(x) + 2\pi i] dx.$$

Finalmente, invocando el Teorema de los Residuos, podemos concluir que

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx = - \sum_{w_j} \text{Res} \left(\frac{P(z)}{Q(z)} \log z, w_j \right), \quad (4.12)$$

donde w_j es un polo cualquiera de $\log(z)P(z)/Q(z)$ en Ω .

Observación 4.7.

Notemos que para calcular integrales de la forma

$$\int_a^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

basta utilizar la función $\log(z-a)P(z)/Q(z)$ y trasladar el contorno anterior en a .

Ejemplo 4.16.

Calcular

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}.$$

Solución:

Para ocupar (4.12) calculemos los residuos de $\log(z)\frac{1}{1+z^3}$

$$\text{Res} \left(\frac{\log z}{1+z^3}, e^{i\pi/3} \right) = -\frac{i\pi}{9} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

$$\text{Res} \left(\frac{\log z}{1+z^3}, e^{i\pi} \right) = \frac{\pi i}{3},$$

$$\text{Res} \left(\frac{\log z}{1+z^3}, e^{i5\pi/3} \right) = -\frac{5\pi i}{9} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

con lo que concluimos que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2}{9}\pi\sqrt{3}.$$

Ejercicio 4.17.

Calcule

- a) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+8}$,
 b) $\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2(x^2+x+9)}$.

6. Sea P un polinomio tal que satisface $P(0) \neq 0$ y $gr(P) \geq 1$. Supongamos además que $1/P(z)$ no tiene polos en la recta real positiva. Sea $0 < \alpha < 1$, queremos calcular

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx.$$

Para esto consideremos la función compleja $z^{\alpha-1}/P(z)$ donde hemos escogido el argumento en $(0, 2\pi)$. Consideremos el mismo camino anterior (y misma notación), con R suficientemente grande y δ lo bastante pequeño tal que todos los polos de $1/P(z)$ están en $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/Im(z) = 0, Re(z) \geq 0\}$. Notemos que

$$z^{\alpha-1} = |z|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)arg(z)},$$

desarrollando la integral

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\delta} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)} dz \right| &= \left| \int_\varepsilon^{2\pi-\varepsilon} \frac{\delta^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)arg(z)} i \delta e^{i\theta} d\theta}{P(\delta e^{i\theta})} \right| \\ &\leq \frac{2\delta^\alpha \pi}{|P(0)|} \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $\delta \rightarrow 0$, pues α es positivo. Análogamente es fácil ver que para C_R se tiene la siguiente cota

$$\left| \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)} dz \right| \leq 2\pi k R^{\alpha-1} \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty$$

Procediendo ahora con I_1, I_2 de manera idéntica a la hecha para encontrar (4.12) se tiene que cuando $\delta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{I_1} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)} dz &\rightarrow \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx \\ \int_{I_2} \frac{z^{\alpha-1}}{P(z)} dz &\rightarrow - \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} e^{(\alpha-1)2\pi i} dx, \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx - \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} e^{(\alpha-1)2\pi i} dx = 2\pi i \sum_{w_j} Res \left(\frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}, w_j \right),$$

donde w_j representa un polo de $z^{\alpha-1}/P(z)$ en Ω . Reordenando se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{P(x)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i(\alpha-1)}} \sum_{w_j} Res \left(\frac{z^{\alpha-1}}{P(z)}, w_j \right). \quad (4.13)$$

Ejemplo 4.17.

Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

Solución:

El polo de la función viene dado por $w = -1 = e^{\pi i}$ y su residuo es

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{z^{p-1}}{1+z}, w \right) &= \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \frac{z^{p-1}}{1+z} \\ &= e^{(p-1)\pi i}. \end{aligned}$$

Así por lo anterior

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx &= \frac{2\pi i e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{2\pi i(p-1)}} \\ &= \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \end{aligned}$$

Ejercicio 4.18.

Verifique que para $0 < p < 1$ y $b > 0$ se cumple que

- a) $\int_0^{\infty} \frac{x^p dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2 \cos(p\pi/2)}.$
- b) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(x+b)} = \frac{\pi}{b^p \sin(p\pi)}.$
- c) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^p(x+b)^2} = \frac{\pi}{b^{p+1} \sin(p\pi)}.$

4.4.4. Aplicación al cálculo de series

1. Sea f una función meromorfa tal que

$$|f(z)| \leq \frac{a}{|z|^2} \quad \forall |z| \geq R,$$

y no tiene polos en \mathbb{Z} . Deseamos calcular la siguiente serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n).$$

Para esto, consideremos $g(z) = \pi f(z) \cot(\pi z)$ y notemos que sus polos pueden ser los polos de f y los de $\cot(\pi z)$. El residuo de g en $z = n \in \mathbb{Z}$ viene dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g(z), n) &= \lim_{z \rightarrow n} (z-n) \frac{\pi f(z) \cos(\pi z)}{\sin(\pi z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow n} f(z) \frac{\cos(\pi z)}{\cos(\pi n)} = f(n). \end{aligned}$$

Consideremos el camino cuadrado γ de vértices $([N + 1/2] + i[N + 1/2])$, $(-[N + 1/2] + i[N + 1/2])$, $(-[N + 1/2] - i[N + 1/2])$, $([N + 1/2] - i[N + 1/2])$, orientado en sentido antihorario. Por el teorema de los residuos sabemos que

$$\int_{\gamma} g(z) dz = 2\pi i \left[\sum_{j=-N}^N f(n) + \sum_{w_j} \text{Res}(g(z), w_j) \right], \quad (4.14)$$

donde w_j representa un polo de f . Nuestra intención es hacer tender N a infinito, para eso miremos el comportamiento de la integral. En L_1

$$\begin{aligned} \cot \pi(N + 1/2 + iy) &= i \frac{e^{i\pi(N+1/2+iy)} + e^{-i\pi(N+1/2+iy)}}{e^{i\pi(N+1/2+iy)} - e^{-i\pi(N+1/2+iy)}} \\ &= i \frac{1 + e^{-2\pi i(N+1/2+iy)}}{1 - e^{-2\pi i(N+1/2+iy)}}, \end{aligned}$$

Tomando modulo

$$|\cot \pi(N + 1/2 + iy)| \leq \frac{e^{2\pi y} + 1}{e^{2\pi y} - 1} \leq K$$

con K una constante. Además como la cotangente es impar se tiene que también es acotada en L_3 , así

$$\left| \int_{L_1, L_3} \pi \cot(\pi z) f(z) dz \right| \leq \frac{KA}{N^2} (2N + 1). \quad (4.15)$$

Trabajemos ahora en L_2 ,

$$\begin{aligned} \cot \pi(i(N + 1/2) - x) &= i \frac{e^{i\pi(i(N+1/2)-x)} + e^{-i\pi(i(N+1/2)-x)}}{e^{i\pi(i(N+1/2)-x)} - e^{-i\pi(i(N+1/2)-x)}} \\ &= i \frac{1 + e^{-2\pi i(i(N+1/2)-x)}}{1 - e^{-2\pi i(i(N+1/2)-x)}}. \end{aligned}$$

Tomando modulo

$$|\cot \pi(i(N + 1/2) - x)| \leq \frac{e^{2\pi(N+1/2)} + 1}{e^{2\pi(N+1/2)} - 1} \leq K'$$

con K' una constante. Al igual que antes, dada la imparidad se tiene que también es acotada en L_4 , así

$$\left| \int_{L_2, L_4} \pi \cot(\pi z) f(z) dz \right| \leq \frac{K'A}{N^2} (2N + 1). \quad (4.16)$$

De esta forma, tomando limite, las ecuaciones (4.15), (4.16), nos dice que la integral en (4.14) tiende a cero, por lo que se concluye

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{w_j} \text{Res}(\pi f(z) \cot \pi z, w_j), \quad (4.17)$$

donde w_j son los polos de f .

Ejemplo 4.18.

Calcule

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2},$$

donde $a \neq in$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Solución:

Tomemos $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ y calculemos los residuos de $f(z) \cot \pi z$ para ocupar (4.17). Un pequeño cálculo nos indica que

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f(z) \cot \pi z, z = ai) &= \frac{\pi}{2ai} \cot(\pi ai) \\ \operatorname{Res}(f(z) \cot \pi z, z = -ai) &= \frac{-\pi}{2ai} \cot(-\pi ai) = \frac{\pi}{2ai} \cot(\pi ai), \end{aligned}$$

y de esta forma

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} &= \frac{\pi i}{a} \cot(\pi ai) \\ &= \frac{\pi}{a} \coth(\pi a). \end{aligned}$$

Observación 4.8.

En el ejemplo anterior hemos encontrado la descomposición en fracciones parciales de $\frac{\pi}{z} \coth(\pi z)$, pues lo anterior puede expresarse como

$$\frac{\pi}{z} \coth(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - in} + \frac{1}{z + in} \right] \frac{1}{2z},$$

por lo que

$$2\pi \coth(\pi z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{z - in} + \frac{1}{z + in} \right].$$

2. Sea f una función meromorfa sin polos en \mathbb{Z} tal que

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^2}.$$

Deseamos calcular la serie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n).$$

Consideremos la función compleja $g(z)\pi \csc(\pi z)f(z)$, cuyo residuo en un polo cualquiera $n \in \mathbb{Z}$ es

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g(z), n) &= \lim_{z \rightarrow n} \frac{\pi(z-n)}{\sin(\pi z)} f(z) \\ &= \frac{1}{\cos(\pi n)} f(n) \\ &= (-1)^n f(n), \end{aligned}$$

y el camino cuadrado de vértices $([N+1/2] + i[N+1/2])$, $(-[N+1/2] + i[N+1/2])$, $(-[N+1/2] - i[N+1/2])$, $([N+1/2] - i[N+1/2])$ y procedemos de la misma manera hecha para encontrar (4.17). Dado que $\csc z$ es acotada, pues

$$\csc^2 z - \cot^2 z = 1,$$

se tiene que la integral sobre el camino cuadrado tenderá a cero y denotando por w_j un polo cualquiera de f se concluirá que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = \sum_{w_j} \operatorname{Res}(\pi \csc(\pi z) f(z), w_j). \quad (4.18)$$

Ejercicio 4.19.

Calcule

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2},$$

y deduzca en particular que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Ejercicio 4.20. Para una función meromorfa sin polos en $\frac{1}{2}\mathbb{Z} = \{\frac{1}{2}z : z \in \mathbb{Z}\}$ tal que

$$|f(z)| \leq \frac{A}{|z|^2},$$

se cumple que:

a)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{w_j} \operatorname{Res}(\pi \tan(\pi z) f(z), w_j),$$

b)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \sum_{w_j} \operatorname{Res}(\pi \sec(\pi z) f(z), w_j),$$

donde w_j es un polo de f .

Hint: Considere un camino cuadrado de vértices $[N+iN]$, $[-N+iN]$, $[-N-iN]$, $[N-iN]$ y copie el desarrollo hecho para encontrar (4.17).

Capítulo 5

Fracciones parciales y productos infinitos

5.1. Fracciones Parciales

Teorema 5.1.

Sea f una función meromorfa en \mathbb{C} . Denotamos por z_n sus polos sin repetición, ordenados de acuerdo a sus módulos, es decir $|z_n| \leq |z_{n+1}|$ y denotamos $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de f entorno a z_n , la cual viene dada por

$$P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) = \frac{a_{-1}^n}{(z-z_n)} + \dots + \frac{a_{-k_n}^n}{(z-z_n)^{k_n}}.$$

Entonces existen polinomios q_n de grado r_n tal que

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - q_n(z) \right] + g(z),$$

donde $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y la convergencia de la serie es en compactos de $\mathbb{C} \setminus \{z_n\}$.

Observación 5.1.

Los polinomios q_n se agregan para garantizar la convergencia.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad supongamos que $z_n \neq 0$. Consideremos z fijo en algún compacto de $\mathbb{C} \setminus \{z_n\}$, entonces $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ es analítica en $|z| < |z_n|$. En $D(0, R)$ con $R < |z_n|$ consideramos

una expansión de orden r_n la cual de $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$ denotaremos por q_n , así usando el teorema (hacer referencia), tenemos que

$$\left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - q_n(z)\right| \leq \frac{|z|^{r_n+1}}{R^{r_n}} \frac{M_n}{R-|z|},$$

con $M_n = \max_{\partial D(0,R)} \left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)\right|$. Si n es suficientemente grande, consideramos $R = \frac{|z_n|}{2}$, con lo cual $|z| < \frac{|z_n|}{4}$, así

$$\begin{aligned} \left|P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - q_n(z)\right| &\leq \frac{|z_n|^{r_n+1}}{4^{r_n+1}} \cdot \frac{2^{r_n}}{|z_n|^{r_n}} \cdot \frac{M_n}{\left(\frac{|z_n|}{2} - \frac{|z_n|}{4}\right)} \\ &\leq \frac{M_n}{2^{r_n}}. \end{aligned}$$

Eligiendo r_n tal que

$$\frac{M_n}{2^{r_n}} < \frac{1}{2^n},$$

tenemos que $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right) - q_n(z)$ converge uniformemente en compactos de $\mathbb{C} \setminus \{z_n\}$.

De esta forma $h(z)$ es meromorfa con polos $\{z_n\}$ con parte principal $P_n\left(\frac{1}{z-z_n}\right)$, por lo que $g(z) = f(z) - h(z)$ es analítica, lo que prueba el resultado. \square

Ejercicio 5.1.

En este ejercicio probaremos el Teorema de Weierstrass de descomposición en producto infinito a partir de la descomposición en fracciones parciales.

i.- Sea a_n una secuencia en \mathbb{C} , con $|a_n| \rightarrow \infty$, $a_n \neq 0$ para todo n . Demuestre que existe una secuencia de enteros k_n tal que

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} \left(\frac{z}{a_n}\right) + \dots + \frac{1}{a_n} \left(\frac{z}{a_n}\right)^{k_n-1} \right),$$

es una función meromorfa con polos simples en a_n para todo n .

ii.- Sea $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, demuestre que si γ_1, γ_2 son dos curvas suaves en $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 a z entonces

$$\int_{\gamma_1} h - \int_{\gamma_2} h = 2\pi im,$$

con m entero.

iii.- Pruebe que si γ es cualquier curva suave en $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de 0 a z , entonces

$$f(z) = e^{\int_{\gamma} h},$$

define una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

iv.- Pruebe que si $z \in \{a_1, a_2, \dots\}$ entonces z es una singularidad removible de f , más aún $f(z) = 0$ y la multiplicidad de z es igual al número de veces que z está repetido en la secuencia de $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

v.- Pruebe que

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n} \right) \exp \left(\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{a_n} \right)^2 + \dots + \frac{1}{k_n} \left(\frac{z}{a_n} \right)^{k_n} \right).$$

Ejemplo 5.1.

Sea $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ con $|a_n| \rightarrow \infty$ y A_n una secuencia de números complejos. Pruebe que existe una función f analítica en \mathbb{C} que satisface $f(a_n) = A_n$. *Hint:* Sea g una función con ceros simples en $\{a_n\}$. Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} g(z) \frac{e^{\gamma_n(z-a_n)}}{z - a_n} \frac{A_n}{g'(a_n)},$$

converge para una elección apropiada de γ_n .

Solución:

Demostremos la indicación, sea z fijo en $D(0, R)$ y n suficientemente grande tal que $a_n > 2R$. Consideremos $\gamma_n = \bar{a}_n \beta_n$, con $\beta_n \rightarrow \infty$, así

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} g(z) \frac{e^{\gamma_n(z-a_n)}}{z - a_n} \frac{A_n}{g'(a_n)} \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|g(z)| e^{\beta_n |a_n|(R-|a_n|)}}{R} \left| \frac{A_n}{g'(a_n)} \right| \\ &\leq \max_{z \in \partial D(0, R)} |g(z)| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n |a_n|} \left| \frac{A_n}{g'(a_n)} \right|, \end{aligned}$$

luego escogiendo β_n tal que el sumando sea menor o igual que $\frac{1}{n^2}$ se obtiene que la serie converge uniformemente en compactos de \mathbb{C} , definiendo así una función analítica. Llamando

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} g(z) \frac{e^{\gamma_n(z-a_n)}}{z - a_n} \frac{A_n}{g'(a_n)},$$

es fácil probar que $f(a_n) = A_n$.

5.2. Productos infinitos

Definición 5.1.

Sea $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un secuencia de números y consideremos

$$P_N = \prod_{k=1}^N z_k.$$

Diremos que:

- i.- P_N converge a P si $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = P \neq 0$.
- ii.- P_N diverge a cero si $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N = 0$.
- iii.- P_N converge a cero si $\prod_{z_k \neq 0} z_k$ converge y $z_k = 0$ se cumple solo para un número finitos de índices.

Observación 5.2.

Supongamos que $z_k \neq 0$, entonces si $P_N \rightarrow P$, se debe tener que $\frac{P_{N+1}}{P_N} \rightarrow 1$. Entonces una condición necesaria para asegurar la convergencia es que $z_k \rightarrow 1$ cuando $k \rightarrow \infty$. Por esta razón denotaremos el término general de P_N como $1 + z_k$ con $z_k \rightarrow 0$, $z_k \neq -1$.

Proposición 5.1.

Si $z_k \neq -1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k)$ converge sí y solo sí $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + z_k)$ converge, donde $\log(1 + z_k)$ es la rama principal del logaritmo para z grande.

Demostración:

Supongamos que $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + z_k)$ converge a S , es decir

$$\sum_{k=1}^N \log(1 + z_k) \rightarrow S \quad \text{cuando } N \rightarrow \infty,$$

Tomando exponencial em el límite anterior obtenemos

$$e^{\sum_{k=1}^N \log(1+z_k)} \rightarrow e^S,$$

pero

$$e^{\sum_{k=1}^N \log(1+z_k)} = \prod_{k=1}^N (1 + z_k),$$

lo que concluye la implicancia.

Sin pérdida de generalidad supongamos que $\log(1 + z_k)$ está bien definido para todo k , que denotaremos Log . Entonces si N es suficientemente grande

$$Log \left(\prod_{k=1}^N (1 + z_k) \right) \rightarrow Log(P),$$

pero

$$Log \left(\prod_{k=1}^N (1 + z_k) \right) = \sum_{k=1}^{\infty} [\log(1 + z_k) + 2\pi i n_k],$$

de donde concluimos que $n_k = 0$ para k grande, dado que esta seria converge. \square

Proposición 5.2.

Sea $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un secuencia de numeros tal que $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ es convergente, entonces $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k)$ es convergente.

Demostración:

Basta mostrar que $\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 + z_k)$ es convergente. Para eso basta notar que si $|z| < 1/2$ entonces

$$\begin{aligned} |\log(1 + z)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{k} \right| \\ &= |z| \left| 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \dots \right| \\ &\leq 2|z|, \end{aligned}$$

luego escogiendo k suficientemente grande para que $|z_k| < 1/2$ se concluye el resultado. \square

Definición 5.2.

Se dirá que $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k)$ converge absolutamente si $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |z_k|)$ converge.

Proposición 5.3.

Si $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z_k)$ converge absolutamente, entonces converge.

Demostración:

Notemos que se tiene la siguiente desigualdad

$$\sum_{k=1}^N |z_k| \leq \prod_{k=1}^N (1 + |z_k|) \leq \prod_{k=1}^N e^{|z_k|} = e^{\sum_{k=1}^N |z_k|},$$

pues $1 + x \leq e^x$ si $x \geq 0$. Ahora bien, como $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + |z_k|)$ converge, se tiene que $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge y por la proposición anterior se concluye. \square

Nuestra intención es poder definir funciones analíticas en un dominio mediante productos infinitos.

Proposición 5.4.

Sean $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ funciones analíticas para todo $n \in \mathbb{N}$ con Ω un dominio. Si $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ converge uniformemente en compactos de Ω , entonces $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + f_n(z))$ define una función analítica en Ω .

Demostración:

Consideremos $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + f_n(z))$. Sea K un compacto de Ω y N independiente de $z \in K$ tal que $|f_n(z)| < 1/2$ para todo $z \in K$, $n \geq N$. Dado que $|\log(1 + f_n(z))| \leq 2|f_n(z)|$ se tiene que

$$\sum_{n=N}^{\infty} |\log(1 + f_n(z))| \leq 2 \sum_{n=N}^{\infty} |f_n(z)|,$$

expresión que converge uniformemente a cero en K cuando $N \rightarrow \infty$. Para concluir el resultado basta notar que $\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + f_n(z)))$ converge uniformemente en K . \square

Proposición 5.5.

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica tal que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f(z) = e^{g(z)}$, con $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analítica.

Demostración:

Consideremos $h(z) = f'(z)/f(z)$ analítica en \mathbb{C} , luego existe $g(z)$ tal que $g'(z) = f'(z)/f(z)$. Considerando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} (e^{-g(z)} f(z)) &= -g'(z)e^{-g(z)} f(z) + e^{-g(z)} f'(z) \\ &= 0, \end{aligned}$$

con lo cual se concluye que $f(z) = e^{g(z)+c}$. \square

Teorema 5.2. (Teorema de Weierstrass)

Sean $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en \mathbb{C} con $|\lambda_k| \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces la función entera más general que tiene como ceros la sucesión $\{\lambda_k\}$ es de la forma

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)},$$

donde $P_k(z)$ son polinomios, g es una función entera y la convergencia es uniforme en compactos de \mathbb{C} .

Demostración:

Sabemos que

$$\log \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z}{\lambda_k}\right)^n \frac{1}{n},$$

y escogemos $k > k_0(R)$ tal que $|\lambda_k| > 2R$, donde R es tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \log \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) + P_k(z) \right|,$$

converja uniformemente en $|z| \leq R$ y $Im(\log(1 - \frac{z}{\lambda_k}) + P_k(z))$. Definimos

$$P_k(z) = \frac{z}{\lambda_k} + \frac{z^2}{2\lambda_k^2} + \dots + \frac{z^{m_k}}{m_k \lambda_k^{m_k}},$$

y veamos que sucede con

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \left[1 - \frac{z}{\lambda_k} \right] + P_k(z) \right) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{z^{m_{k+1}}}{m_{k+1} \lambda_k^{m_{k+1}}} + \frac{z^{m_{k+2}}}{m_{k+2} \lambda_k^{m_{k+2}}} + \dots \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{z^{m_{k+1}}}{m_{k+1} \lambda_k^{m_{k+1}}} \right| \left[1 + \left| \frac{z}{\lambda_k} \right| + \left| \frac{z^2}{\lambda_k^2} \right| + \dots \right] \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|z|^{m_{k+1}}}{m_{k+1} |\lambda_k|^{m_{k+1}}} \left(1 - \left| \frac{z}{\lambda_k} \right| \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Si $|z| < R$ y $k > k_0(R)$, entonces

$$\left(1 - \left| \frac{z}{\lambda_k} \right| \right)^{-1} \leq 2,$$

por lo que tomando $m_k = k$, obtenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\log \left[1 - \frac{z}{\lambda_k} \right] + P_k(z) \right) \leq \sum_{k=1}^{k_0(R)} \left| \frac{z}{\lambda_k} \right|^k \frac{1}{k+1} \left(1 - \left| \frac{z}{\lambda_k} \right| \right)^{-1} + \sum_{k=k_0(R)}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} 2,$$

expresión convergente. Lo anterior se debe pues

$$\left(\frac{z}{\lambda_k} \right)^k < \left(\frac{R}{|\lambda_k|} \right)^k < \left(\frac{1}{2} \right)^k.$$

Es fácil ver que

$$g_n(z) = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) e^{P_k(z)},$$

se tiene los únicos ceros de $g_n(z)$ son $z = \lambda_k$, luego como $g_n(z)$ converge uniformemente a $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) e^{P_k(z)}$ en compactos de $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_1, \dots\}$ se tiene que los únicos ceros de $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) e^{P_k(z)}$ son λ_k con $k \in \mathbb{N}$.

Sea ahora $h(z)$ una función analítica con ceros $\{\lambda_1, \dots\}$, entonces

$$\frac{h(z)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) e^{P_k(z)}},$$

es entera y sin ceros, por lo que

$$\frac{h(z)}{\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) e^{P_k(z)}} = e^{g(z)},$$

con $g(z)$ analítica, con lo que concluimos que

$$h(z) = e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) e^{P_k(z)}. \square$$

Observación 5.3.

Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función analítica con ceros $\{\lambda_1, \dots\}$, tal que $f(0) = 0$ y el orden del cero es m , entonces

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) e^{P_k(z)}.$$

Observación 5.4. Recordemos que si $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|} < \infty$, entonces $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right)$ converge, por lo que no necesitamos incluir $e^{P_k(z)}$ para que el producto converja. En general tenemos que si

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^m} < \infty,$$

entonces basta con $P_k(z) = \frac{z}{\lambda_k} + \dots + \frac{1}{m} \frac{z^{m-1}}{\lambda_k^{m-1}}$, para que el producto converja.

Ejemplo 5.2.

Encuentre la descomposición en producto infinito de $\sin(\pi z)$.

Solución:

Los ceros de $\sin(\pi z)$ son $z \in \mathbb{Z}$ y como $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge se tiene que

$$\sin(\pi z) = e^{g(z)} z \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{z/k}.$$

Para encontrar $g(z)$ tomamos derivada logarítmica, con lo cual obtenemos que

$$\begin{aligned} \pi \cot(\pi z) &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left[\frac{-1/k}{(1 - z/n)} + \frac{1}{k} \right] \\ &= g'(z) + \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(\frac{1}{z - n} + \frac{1}{n} \right) \\ &= g'(z) + \pi \cot(\pi z), \end{aligned}$$

con lo cual obtenemos que $g(z) = c$ es constante. Así

$$\sin(\pi z) = e^c z \prod_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) e^{z/k},$$

pero sabemos que $\frac{\sin(\pi z)}{z} \rightarrow \pi$ cuando $z \rightarrow 0$, con lo que concluimos que $e^c = \pi$.

Ejercicio 5.2.

Pruebe las siguientes expansiones:

$$i.- \cos(\pi z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

$$ii.- \sin(z + \alpha) = e^{\pi z \cot(\pi \alpha)} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n+\alpha}\right) e^{-\frac{z}{n+\alpha}}.$$

$$iii.- \prod_{n=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Capítulo 6

Funciones Especiales

6.1. La Función Gamma

Vimos en algún capítulo anterior que la descomposición en fracciones parciales de $\sin \pi z$ viene dada por

$$\sin \pi z = z\pi \prod_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

por lo que definiendo

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-z/n},$$

se cumple la ecuación

$$zG(z)G(-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

Observemos que $G(z-1)$ tiene los mismos ceros que $G(z)$, luego

$$G(z-1) = ze^{\gamma(z)}G(z),$$

donde $\gamma(z)$ es una función entera. Para determinar $\gamma(z)$ tomemos derivada logarítmica a ambos lados de la ecuación, de este modo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{z} + \gamma'(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right),$$

pero

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-1+n} - \frac{1}{n} \right) &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{z} - 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Con esto obtenemos $\gamma'(z) = 0$, por lo que $\gamma(z) = \gamma$ resulta ser constante, llamada constante de Euler, la cual viene dada por la expresión

$$e^{-\gamma} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) e^{-1/n},$$

o de forma equivalente

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

Ahora si $H(z) = e^{\gamma z} G(z)$ se tiene que

$$\begin{aligned} H(z-1) &= G(z-1)e^{\gamma(z-1)} \\ &= zH(z), \end{aligned}$$

por lo que definiendo

$$\begin{aligned} \Gamma(z) &= \frac{1}{zH(z)} \text{ se tiene que} \\ \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

A la función $\Gamma(z)$ se le suele llamar la función gamma de Euler, la cual de manera explícita viene dada por

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n} \right)^{-1} e^{-\frac{z}{n}}. \quad (6.1)$$

Ejercicio 6.1.

Pruebe que

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z},$$

y en particular que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Observación 6.1.

La función $\Gamma(z)$ es una función meromorfa con polos en $z = 0, -1, -2, \dots$ simples y sin ceros. Además se cumple que $\Gamma(n) = (n-1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposición 6.1. (Fórmula de Gauss)

La función $\Gamma(z)$ cumple

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}.$$

Demostración:

Por definición de la función Γ tenemos que

$$\Gamma(z) = \frac{e^{-\gamma z}}{z} \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{-1} e^{z/n} = 1 + \frac{z}{n} = \frac{n}{n+z},$$

por lo que

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} e^{z(1+1/2+1/3+\dots+1/N-\log N-\gamma)} e^{z \log N} \frac{N!}{z(z+1) \cdots (z+N)}.$$

Además por definición de γ se tiene que $e^{z(1+1/2+1/3+\dots+1/N-\log N)} \rightarrow 1$ y $e^{z \log N} = N^z$, por lo que la ecuación anterior se transforma en

$$\Gamma(z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N!N^z}{z(z+1) \cdots (z+N)}. \square$$

Proposición 6.2.

El residuo de la función $\Gamma(z)$ en un polo cualquiera $-n$ viene dado por

$$\text{Res}(\Gamma(z), -n) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Demostración:

Dado que los polos son simples

$$\text{Res}(\Gamma(z), -n) = \lim_{z \rightarrow -n} (z+n)\Gamma(z),$$

pero

$$\begin{aligned} \Gamma(z+n+1) &= (z+n)(z+n-1) \cdots z\Gamma(z), \text{ luego} \\ \Gamma(z) &= \frac{\Gamma(z+n+1)}{(z+n)(z+n-1) \cdots z}. \end{aligned}$$

Reemplazando esto en el límite, obtenemos que

$$\text{Res}(\Gamma(z), -n) = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1) \cdots (-n+n-1)} = \frac{(-1)^n}{n!}. \square$$

Ejemplo 6.1.

Demuestre la fórmula de duplicación de Legendre

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Solución:

Considerando la segunda derivada de $\log \Gamma(z)$ en (6.1) se tiene que

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) + \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z + \frac{1}{2})}{\Gamma(z + \frac{1}{2})} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n+\frac{1}{2})^2} \\ &= 4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+2n+1)^2} \right] \\ &= 4 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2z+m)^2} \\ &= 2 \frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(2z)}{\Gamma(2z)} \right), \end{aligned}$$

por lo que integrando tenemos

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = e^{az+b}\Gamma(2z),$$

donde a y b son constantes a determinar. Dado que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1 + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ y $\Gamma(2) = 1$ se tienen las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{2}a + b = \frac{1}{2} \log \pi, \quad a + b = \frac{1}{2} \log \pi - \log 2.$$

Así

$$a = -2 \log 2, \quad b = \frac{1}{2} \log \pi + \log 2,$$

por lo que

$$\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

Ejercicio 6.2.

Pruebe que

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(z) = n^{z-\frac{1}{2}} \prod_{j=0}^{n-1} \Gamma\left(\frac{z+j}{n}\right).$$

Teorema 6.1.

Para $\operatorname{Re}(z) > 0$ se cumple que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (6.2)$$

Demostración:

Sean

$$f_n(z) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt, \text{ y } f(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt,$$

y probemos que $f_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos de $D = \{z : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ o equivalentemente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt = 0,$$

pues

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-t} t^{z-1} dt,$$

uniformemente. Si $|t| < n$, entonces se cumplen las siguientes desigualdades

$$1 + \frac{t}{n} \leq e^{t/n} \leq \frac{1}{1 - \frac{t}{n}}, \quad \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \leq e^t, \quad \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t},$$

lo que implica que para $|t| < n$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n &= e^{-t} \left[1 - e^t \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] \\ &\leq e^{-t} \left[1 - \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^n \right] \\ &= e^{-t} \frac{t^2}{n^2} \left[1 + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right) + \dots + \left(1 - \frac{t^2}{n^2}\right)^{n-1} \right] \\ &\leq \frac{t^2 e^{-t}}{n}. \end{aligned}$$

Así

$$\left| \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \right] t^{z-1} dt \right| < \frac{1}{n} \int_0^n e^{-t} t^{x+1} dt < \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-t} t^{x+1} dt,$$

donde $x = \operatorname{Re}(z)$, lo que prueba que $f_n(z) \rightarrow f(z)$ uniformemente en compactos de $\operatorname{Re}(z) > 0$. Probemos ahora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \Gamma(z) \quad z \in D.$$

Considerando el cambio $t = n\tau$ se tiene que

$$f_n(z) = n^z \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{z-1} d\tau. \quad (6.3)$$

Integrando (6.3) por partes n veces, obtenemos que

$$f_n(z) = \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n-1)} \int_0^1 \tau^{z+n-1} d\tau = \frac{n!n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)},$$

lo que prueba el resultado. \square

6.1.1. La fórmula de Stirling

Nuestra intención es probar la fórmula de Stirling

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{J(z)}, \quad (6.4)$$

donde $J(z) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$. En la fórmula de duplicación de Legendre utilizamos que

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Nuestra intención es expresar esta serie como una integral de línea. Consideremos

$$\phi(\zeta) = \frac{\pi \cot \pi \zeta}{(z + \zeta)^2},$$

función cuyos residuos son los términos de la suma anterior. Sea K la frontera del rectángulo en el plano (ξ, η) , cuyos lados verticales están dados por $\xi = 0$ y $\xi = n + \frac{1}{2}$ y con lados horizontales $\eta = \pm Y$. Nuestra intención es hacer tender primero Y y después n a infinito. Este contorno pasa a través del polo en 0 , pero sabemos que la fórmula de los residuos sigue siendo válida, dado que tomamos el valor principal de la integral y medio valor del residuo, luego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_K \phi(\zeta) d\zeta = -\frac{1}{2z^2} + \sum_{i=0}^n \frac{1}{(z+i)^2}.$$

En los lados horizontales del rectángulo la función $\cot \pi \zeta$ tiende uniformemente a $\pm i$ cuando $Y \rightarrow \infty$ y dado que $1/(z+\zeta)^2$ tiende a cero, tenemos que las integrales correspondientes tienden a a cero. La integral sobre la línea $\xi = n + \frac{1}{2}$ es una constante veces, es decir

$$\int_{\xi=n+\frac{1}{2}} \phi(\zeta) d\zeta = c \int_{\xi=n+\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{|\zeta + z|^2}.$$

Esta última integral puede ser evaluada usando residuos, y se obtiene que

$$\int_{\xi=n+\frac{1}{2}} \frac{d\eta}{|\zeta+z|^2} = \frac{2\pi}{2n+1+2x},$$

cuyo límite es cero cuando $n \rightarrow \infty$.

Finalmente el valor principal de la integral sobre el eje imaginario de $i\infty$ a $-i\infty$ puede ser escrito de la forma

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \cot \pi i\eta \left[\frac{1}{(i\eta+z)^2} - \frac{1}{(i\eta-z)^2} \right] d\eta = - \int_0^\infty \coth \pi\eta \frac{2\eta z}{(\eta^2+z^2)^2} d\eta,$$

con lo cual obtenemos que

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \frac{1}{2z^2} + \int_0^\infty \coth \pi\eta \frac{2\eta z}{(\eta^2+z^2)^2} d\eta. \quad (6.5)$$

Esta integral define una función analítica en $Re(z) > 0, Im(z) > 0$, pero tiene un polo en $z = 0$. Escribiendo

$$\coth \pi\eta = 1 + \frac{2}{e^{2\pi\eta} - 1},$$

podemos reescribir (6.5) como

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \int_0^\infty \frac{4\eta z}{(\eta^2+z^2)^2} \cdot \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}.$$

Tomando z restringido a $\{z : Re(z) > 0, Im(z) > 0\}$, vemos que la fórmula anterior puede ser integrada, de esta forma

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = C + \log(z) - \frac{1}{2z} - \int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+z^2} \cdot \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1}, \quad (6.6)$$

donde hemos tomado la rama principal del logaritmo y C es la constante de integración. Queremos volver a integrar, lo que introduciría $\arctan(z/\eta)$ en la integral, pero para evitar el uso de funciones multivaluadas, transformamos la integral de (6.6) via integración por partes para obtener

$$\int_0^\infty \frac{2\eta}{\eta^2+z^2} \cdot \frac{d\eta}{e^{2\pi\eta} - 1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{z^2 - \eta^2}{(\eta^2+z^2)^2} \log(1 - e^{-2\pi\eta}) d\eta,$$

donde el logaritmo es real. Ahora integramos (6.6) con respecto a z y obtenemos

$$\log \Gamma(z) = C' + Cz + \left(z - \frac{1}{2} \right) \log z + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta, \quad (6.7)$$

donde C' es una constante de integración y $C - 1$ se ha renombrado a C .

Falta determinar los valores de C' y C . Para esto debemos primero estudiar el comportamiento de

$$J(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{z}{\eta^2+z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta.$$

Supongamos que z pertenece al plano semiplano $x \geq c > 0$, de esta forma

$$J(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{|z|/2} \frac{z}{\eta^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{|z|/2}^{\infty} \frac{z}{\eta^2 + z^2} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta = J_1(z) + J_2(z).$$

En la primera integral $|\eta^2 + z^2| \geq |z|^2 - |z/2|^2 = 3|z|^2/4$, por lo que

$$|J_1(z)| \leq \frac{4}{3\pi|z|} \int_0^{\infty} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta.$$

En la segunda integral $|\eta^2 + z^2| = |z - i\eta| \cdot |z + i\eta|$, y así

$$|J_2(z)| < \frac{1}{\pi c} \int_{|z|/2}^{\infty} \log \frac{1}{1 - e^{-2\pi\eta}} d\eta.$$

Dado que la integral de $\log(1 - e^{-2\pi\eta})^{-1}$ es convergente, concluimos que J_1 y J_2 tienden a 0 cuando $z \rightarrow \infty$.

El valor de C lo encontramos sustituyendo (6.7) en la ecuación funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, lo que nos entrega

$$C' + Cz + C + \left(z + \frac{1}{2}\right) \log(z+1) + J(z+1) = C' + Cz + \left(z + \frac{1}{2}\right) \log z + J(z),$$

lo que se reduce a

$$C = -\left(z + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 + \frac{1}{z}\right) + J(z) - J(z+1),$$

por lo que tomando $z \rightarrow \infty$ obtenemos $C = -1$. Ahora aplicamos (6.7) a la ecuación $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z$ eligiendo $z = \frac{1}{2} + iy$, luego

$$2C' - 1 + iy \log\left(\frac{1}{2} + iy\right) - iy \log\left(\frac{1}{2} - iy\right) + J\left(\frac{1}{2} + iy\right) + J\left(\frac{1}{2} - iy\right) = \log \pi - \log \cosh \pi y.$$

Sabemos que cuando $y \rightarrow \infty$, $J(1/2+iy)$ y $J(1/2-iy)$ tienden a cero. Desarrollando el logaritmo en serie, tenemos que

$$iy \log \frac{\frac{1}{2} + iy}{\frac{1}{2} - iy} = iy \left(\pi i + \log \frac{1 + \frac{1}{2iy}}{1 - \frac{1}{2iy}} \right) = -\pi y + \varepsilon_1(y),$$

mientras que

$$\log \cosh \pi y = \pi y - \log 2 + \varepsilon_2(y),$$

con $\varepsilon_1(y)$, $\varepsilon_2(y)$ tendiendo a 0. Lo anterior implica que $C' = \frac{1}{2} \log 2\pi$, por lo que hemos probado que

$$\log \Gamma(z) = \frac{1}{2} \log 2\pi - z + \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z + J(z),$$

o equivalentemente

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi} z^{z-\frac{1}{2}} e^{-z} e^{J(z)}.$$

Ejercicio 6.3.

Para $x > 0$ real pruebe que

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\theta(x)/12x},$$

con $0 < \theta(x) < 1$.

6.2. La función Zeta de Riemann

Sea z tal que $\operatorname{Re}(z) > 1$ entonces la función

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad (6.8)$$

converge uniformemente y define una función analítica. La función (6.8) es conocida como la función Zeta de Riemann y juega un rol importante en la teoría de números.

Teorema 6.2.

Para $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ se tiene que

$$\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z}),$$

donde p_n es la secuencia de primos.

Demostración:

Probemos que

$$\zeta(z) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n^{-z}) = 1,$$

multiplicando los términos. Así

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z}) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} - \sum_{n=1}^{\infty} (2n)^{-z} = \sum_{m=1}^{\infty} (m)^{-z},$$

donde m recorre todos los números impares. Bajo el mismo razonamiento

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z})(1 - 3^{-z}) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-z},$$

donde m recorre todos los enteros que no son divisibles por 2 y 3. Más generalmente (inducción)

$$\zeta(z)(1 - 2^{-z})(1 - 3^{-z}) \cdots (1 - p_N^{-z}) = \sum_{m=1}^{\infty} m^{-z},$$

donde la suma anterior recorre todos los enteros que no contienen ningún factor primo $2, 3, \dots, p_N$. El primer término de la suma es 1, y el próximo es p_{N+1}^{-z} , por lo que todos los términos excepto el primero tienden a cero cuando $N \rightarrow \infty$, con lo que se concluye que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \zeta(z) \prod_{n=1}^N (1 - p_n^{-z}) = 1. \square$$

Proposición 6.3. Para $z \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 1\}$ se tiene que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} \frac{1}{e^u - 1} du. \quad (6.9)$$

Demostración:

Ocupando la fórmula (6.2) tenemos que

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{n}\right)^{z-1} \frac{1}{n} e^{-t} dt,$$

por lo que haciendo el cambio de variables $u = \frac{t}{n}$ obtenemos

$$n^{-z}\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-nu} du.$$

Sumando y teniendo en cuenta la convergencia uniforme, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty n^{-z}\Gamma(z) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{z-1} e^{-nu} du \\ &= \int_0^\infty u^{z-1} \sum_{n=1}^\infty e^{-nu} du, \end{aligned}$$

y dado que

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-nu} = \frac{1}{e^u - 1},$$

se concluye el resultado. \square

6.2.1. Extensión de $\zeta(z)$ a todo el plano

Usando (6.9) extendemos la función $\zeta(z)$ a $0 < \operatorname{Re}(z) < 1$. Notemos que

$$\frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty a_n u^n,$$

la cual tiene un radio de convergencia de 2π . Escribamos

$$\int_0^{\infty} u^{z-1} \frac{1}{e^u - 1} du = \int_0^1 u^{z-1} \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du + \int_0^1 u^{z-1} \frac{1}{u} du + \int_1^{\infty} \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du.$$

La expresión

$$\int_0^1 u^{z-1} \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du,$$

define una función analítica en $Re(z) > 0$. Por otra parte si $Re(z) > 1$ tenemos que

$$\int_0^1 u^{z-1} \frac{1}{u} du = \frac{1}{z-1} u^{z-1} \Big|_0^1 = \frac{1}{z-1}.$$

Así podemos extender la función $\int_0^{\infty} u^{z-1} \frac{1}{e^u - 1} du$ a $Re(z) > 0$, $z \neq 1$ como

$$\int_0^1 u^{z-1} \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du + \frac{1}{z-1} + \int_1^{\infty} \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du.$$

Extendamos ahora $\zeta(z)$ como una función meromorfa a $Re(z) > 0$, $z \neq -1$. Por la relación (6.9) tenemos que

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 u^{z-1} \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du + \frac{1}{z-1} + \int_1^{\infty} \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du,$$

por lo que definimos

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\int_0^1 u^{z-1} \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du + \frac{1}{z-1} + \int_1^{\infty} \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du \right),$$

para $Re(z) > 0$, $z \neq 1$.

Observación 6.2.

Usando la extensión anterior vemos que la función $\zeta(z)$ tiene un polo simple en $z = 1$ y su residuo es 1.

Extendamos ahora $\zeta(z)$ a $Re(z) > -1$. Consideremos

$$\int_0^1 u^{z-1} \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du = \int_0^1 \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right] u^{z-1} du - \int_0^1 \frac{1}{2} u^{z-1} du,$$

donde

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right] u^{z-1} du,$$

está bien definido para $Re(z) > -1$. Integrando

$$-\int_0^1 \frac{1}{2} u^{z-1} du = \left(\frac{1}{2z} u^{z-1} \right)_0^1 = -\frac{1}{2z},$$

para $Re(z) > 0$. Luego

$$\int_0^1 u^{z-1} \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} \right] du = \int_0^1 \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right] du - \frac{1}{2z},$$

para $Re(z) > -1, \neq 1$. Así podemos extender $\zeta(z)$ como

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\int_0^1 \left[\frac{1}{e^u - 1} - \frac{1}{u} + \frac{1}{2} \right] du - \frac{1}{2z} + \frac{1}{z-1} + \int_1^\infty \frac{u^{z-1}}{e^u - 1} du \right).$$

Dado que $\Gamma(z)$ tiene un polo simple en cero, la función $\zeta(z)$ resulta ser analítica en $z = 0$. De esta forma $\zeta(z)$ esta definida en $Re(z) > -1, z \neq 1$.

Para poder extender $\zeta(z)$ a todo el plano complejo deberemos demostrar el siguiente teorema.

Teorema 6.3. (*Ecuación Funcional de Riemann*)

Para $1 < Re(z) < 0$ se cumple que

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right). \quad (6.10)$$

Demostración:

Tenemos que

$$\Gamma(z) \zeta(z) = \int_0^\infty u^{z-1} \left[\frac{1}{e^u - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{u} \right] du,$$

Dado que

$$\frac{1}{e^u - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left[\frac{e^u + 1}{e^u - 1} \right] = \frac{i}{2} \cot\left(\frac{iu}{2}\right),$$

y usando la descomposición en fracciones parciales en $Re(z) > 1, \frac{u^{z-1}}{z-1} = \frac{1}{z-1}$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma(z) \zeta(z) &= 2 \left[\int_0^\infty u^z \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{u^2 + 4n^2\pi^2} du \right] \\ &= 2 \left[\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty \frac{u^z}{u^2 + 4n^2\pi^2} du \right]. \end{aligned}$$

Probemos la fórmula para el caso real $z = x \in (-1, 0)$. Ocupando residuos encontramos que

$$2 \left[\int_0^\infty \frac{u^x}{u^2 + 1} du \right] = \frac{1}{2} \pi \sec\left(\frac{\pi x}{2}\right),$$

lo cual nos indica que

$$\begin{aligned} \Gamma(x)\zeta(x) &= 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n(2\pi n)^x}{(2\pi n)^2} \int_0^{\infty} \frac{(u/2\pi n)^x}{(u/2\pi n)^2 + 1} \frac{1}{2\pi n} du \right] \\ &= 2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} (2\pi n)^{x-1} \frac{\pi}{2} \sec\left(\frac{\pi x}{2}\right) \right] \\ &= (2\pi)^{x-1} \zeta(1-x) \pi \sec\left(\frac{\pi x}{2}\right). \end{aligned}$$

Usando la identidad

$$\Gamma(1-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \frac{\pi}{2 \cos(1/2\pi x) \sin(1/2\pi x)},$$

concluimos el resultado. \square Usando la ecuación funcional podemos extender $\zeta : \mathbb{C} \setminus 1 \rightarrow \mathbb{C}$ a una función meromorfa con polo simple en $z = 1$.

Analicemos ahora los ceros de la función ζ . Como la función $\zeta(z)$ es analítica y sin ceros en $z = 2, 3, \dots$ y $\Gamma(z)$ tiene polos simples en esos puntos se tiene que tener que

$$\zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0 \quad \forall z = 2, 3, \dots$$

y los ceros deben ser simples. De esta forma, si $z = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$ entonces $\sin\left(\frac{\pi 2m}{2}\right) = 0$, por lo que $\zeta(1-2m) \neq 0$.

Si $z = 2m + 1$, entonces $\zeta(1-(2m+1)) = \zeta(2m) = 0$, por lo tanto $-2, -4, \dots$ son los ceros triviales de la función $\zeta(z)$.

Ejercicio 6.4.

Demuestre la siguiente fórmula

$$\zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-z} \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) \zeta(z). \tag{6.11}$$

Ejemplo 6.2.

Demuestre que la función

$$\xi(z) = \frac{1}{2} z(1-z) \pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z),$$

es entera y satisface $\xi(z) = \xi(1-z)$.

Solución:

Veamos que es entera. Para esto basta notar que el factor $1-z$ anula los polos de $\zeta(z)$ y los polos de $\Gamma(z/2)$ se cancelan con los ceros triviales de $\zeta(z)$. Usando (6.11) la ecuación $\xi(z) = \xi(1-z)$ se transforma en

$$\pi^{-z/2} \Gamma(z/2) \zeta(z) = \pi^{(z-1)/2} \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \zeta(1-z) = 2^{1-z} \pi^{-(z+1)/2} \Gamma(z) \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right),$$

lo que es equivalente a

$$\cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \Gamma(z) \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) = 2^{z-1} \pi^{1/2} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right).$$

Dado que

$$\Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos(1/2\pi z)},$$

la ecuación anterior se reduce a

$$\pi^{1/2} \Gamma(z) = 2^{z-1} \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+z}{2}\right),$$

la cual no es más que la fórmula de duplicación de Legendre.

Ejercicio 6.5.

Para los siguientes problemas considere que las fórmulas valen para $\operatorname{Re}(z) > A$ con $A > 1$ apropiado a cada caso:

1. Pruebe que

$$\zeta^2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^z},$$

donde $d(n)$ es el número de divisores de n .

2. Pruebe que

$$\zeta(z) \zeta(z-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma(n)}{n^z},$$

donde $\sigma(n)$ es la suma de los divisores de n .

3. Pruebe que

$$\frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(n)}{n^z},$$

donde $\phi(n)$ es el número de enteros menores que n que son relativamente primos a n .

Capítulo 7

Funciones Armónicas

7.1. Propiedades Básicas

Definición 7.1.

Una función real $u(x, y)$ se dirá armónica en una region Ω si satisface que sus segundas derivadas son continuas y

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7.1)$$

Ejercicio 7.1.

Pruebe que usando coordenadas polares (7.1) se puede reescribir como

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

Proposición 7.1.

Si u es armónica en una región Ω , entonces

$$f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (7.2)$$

define una función analítica.

Demostración:

Basta probar que se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, en efecto, llamando $U = \frac{\partial u}{\partial x}$, $V = \frac{\partial u}{\partial y}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}. \quad \square \end{aligned}$$

Pasando (7.2) a forma diferencial tenemos que

$$f dz = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right). \quad (7.3)$$

En esta expresión la parte real es el diferencial de u

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Si u tiene conjugada armónica v , entonces la parte imaginaria se podría escribir como

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

En general no hay conjugada de u , por lo que se define

$$*du = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy,$$

la cual se llama la conjugada diferencial de du . De esta forma tenemos que

$$f dz = du + i *du.$$

Por el Teorema de Cauchy tenemos que la integral de $f dz$ es cero en cualquier curva cerrada simple y por otro lado la integral del diferencial exacto du también es cero. De esta forma obtenemos que

$$\int_{\gamma} *du = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = 0, \quad (7.4)$$

donde γ es una curva cerrada simple.

Teorema 7.1.

Si u_1, u_2 son dos funciones armónicas en una región Ω , entonces

$$\int_{\gamma} u_1 *du_2 - u_2 *du_1 = 0, \quad (7.5)$$

para cada ciclo γ homólogo a cero en Ω .

Demostración:

Basta probar para el caso en que $\gamma = \partial R$ con R un rectángulo contenido en Ω . En R u_1 y u_2 tienen funciones conjugadas v_1, v_2 , por lo que podemos escribir

$$u_1 *du_2 - u_2 *du_1 = u_1 dv_2 - u_2 dv_1 = u_1 dv_2 + v_1 du_2 - d(u_2 v_1).$$

Aquí $d(u_2 v_1)$ es un diferencial exacto y $u_1 dv_2 + v_1 du_2$ es la parte imaginaria de

$$(u_1 + iv_1)(du_2 + idv_2),$$

la cual puede ser reescrita de la forma $F_1 f_2$, donde $F_1(z)$ y $f_2(z)$ son analíticas en R . \square

7.2. El Teorema del Valor Medio

En (7.5) consideremos $u_1 = \log(r)$ y $u_2 = u$ con u una función armónica en $|z| < \rho$. Consideremos $z \in \Omega$ con $0 < |z| < \rho$ y C_1, C_2 , donde c_i es un círculo $|z| < r_i < \rho$. En $|z| = r$ tenemos que $*du = r(\partial u)(\partial r)d\theta$ y así (7.5) se transforma a

$$\log(r_1) \int_{C_1} r_1 \frac{\partial u}{\partial r} d\theta - \int_{C_1} u d\theta = \log(r_2) \int_{C_2} r_2 \frac{\partial u}{\partial r} d\theta + \int_{C_2} u d\theta.$$

En otras palabras, la expresión

$$\int_{|z|=r} u d\theta - \log(r) \int_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta,$$

es constante. Por (7.4) se tiene también que

$$\int_{|z|=r} r \frac{\partial u}{\partial r} d\theta,$$

es constante en el caso de un anillo y cero si u es armónica en todo el disco. Con estos dos resultados hemos probado el siguiente teorema.

Teorema 7.2. (*Teorema del Valor Medio para funciones armónicas*)

El valor aritmético de una función armónica sobre círculos concéntricos $|z| = r$ es una función lineal de $\log(r)$, es decir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=r} u d\theta = \alpha \log(r) + \beta,$$

y si u es armónica en todo el disco se tiene que $\alpha = 0$.

Observación 7.1.

En el último caso tomando $\beta = u(0)$, por continuidad y trasladando el origen se tiene

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \quad (7.6)$$

Teorema 7.3.

Una función armónica no constante no tiene ni máximos ni mínimos en su región de definición. De esta forma, en un cerrado E el máximo y el mínimo se alcanzan en la frontera de E .

Nota:

La demostración es análoga a la hecha en el caso de funciones analíticas pero lo que no se demostrara el teorema anterior.

Ejercicio 7.2.

1. Si u es una función armónica y acotada en $0 < |z| < \rho$, entonces el origen es una singularidad removible en el sentido de que u pasa a ser armónica en $|z| < \rho$, cuando $u(0)$ está bien definida.
2. Encuentre una función armónica en $D(0, 1)$ tal que el valor de la frontera este dado por $u(x, y) = x^2$.
3. Encuentre una función armónica en $D(0, 1)$ tal que el valor de la frontera este dado por $u(x, y) = x^3$.

7.3. Fórmula de Poisson

Teorema 7.4. (La Fórmula de Poisson)

Sea $u(z)$ armónica en $|z| < R$ y continua en $|z| \leq R$. Entonces

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z - a|^2} u(z) d\theta, \quad (7.7)$$

para todo $|a| < R$.

Demostración:

Supongamos que $u(z)$ es armónica en el disco cerrado $|z| \leq R$. La transformación lineal

$$z = S(\zeta) = \frac{R(R\zeta + a)}{R + a\zeta},$$

mapea $|\zeta| \leq 1$ a $|z| \leq R$ y manda $\zeta = 0$ a $z = a$. La función $u(S(\zeta))$ es armónica en $|\zeta| \leq 1$ y por (7.6) obtenemos que

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} u(S(\zeta)) d \arg \zeta.$$

Dado que

$$\zeta = \frac{R(z - a)}{R^2 - \bar{a}z},$$

entonces

$$d \arg \zeta = -i \frac{d\zeta}{\zeta} = -i \left(\frac{1}{z - a} + \frac{\bar{a}}{R^2 - \bar{a}z} \right) dz = \left(\frac{z}{z - 1} + \frac{\bar{a}z}{R^2 - \bar{a}z} \right) d\theta.$$

Escribiendo $R^2 = z\bar{z}$ la última expresión puede ser reescrita como

$$\frac{z}{z - a} + \frac{\bar{a}}{\bar{z} - \bar{a}} = \frac{R^2 - |a|^2}{|z - a|^2},$$

o equivalentemente

$$\frac{1}{2} \left(\frac{z+a}{z-a} + \frac{\bar{z}+\bar{a}}{\bar{z}-\bar{a}} \right) = \operatorname{Re} \frac{z+a}{z-a}.$$

Finalmente

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2} u(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \operatorname{Re} \frac{z+a}{z-a} u(z) d\theta. \quad (7.8)$$

Veamos ahora el caso en que la función es armónica en el interior y continua en la cerradura. Si $0 < r < 1$, entonces $u(rz)$ es armónica en el disco cerrado, por lo que

$$u(ra) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - |a|^2}{|z-a|^2} u(rz) d\theta.$$

Dado que $u(z)$ es uniformemente continua en $|z| \leq R$ es cierto que $u(rz) \rightarrow u(z)$ uniformemente para $|z| = R$ cuando $r \rightarrow 1$, lo cual nos indica que (7.7) sigue siendo cierta. \square

Observación 7.2.

En coordenadas polares la fórmula (7.7) resulta ser

$$u(re^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \phi) + r^2} u(Re^{i\theta}) d\theta.$$

Observación 7.3.

Un caso particular de (7.7) es tomando $u = 1$ lo que nos indica que

$$\int_{|z|=R} \frac{R^2 - |z|^2}{|z-a|^2} d\theta = 2\pi.$$

Notemos que el teorema anterior nos da una fórmula explícita para la conjugada de u , en efecto, la fórmula (7.8) nos entrega

$$u(z) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \right].$$

La expresión dentro del paréntesis es una función analítica para $|z| < R$, luego $u(z)$ es la parte real de

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta+z}{\zeta-z} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} + iC, \quad (7.9)$$

donde C es una constante real arbitraria. La fórmula (7.9) es conocida como la fórmula de Schwarz.

7.4. El Teorema de Schwarz

Definición 7.2.

Sea $U(\theta)$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$ una función continua por pedazos, definimos la integral de Poisson de U como

$$P_U(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} U(\theta) d\theta.$$

Ejercicio 7.3. Pruebe que $P_U(z)$ satisface

i.- $P_{U+V} = P_U + P_V$.

ii.- $P_{cU} = cP_U$ para toda constante c .

iii.- Si $U \geq 0$ entonces $P_U \geq 0$.

iv.- Si $m \leq U \leq M$ entonces $m \leq P_U \leq M$. *Hint: Demuestre primero que $P_c = c$ para toda constante c .*

Teorema 7.5.

La función $P_U(z)$ es armónica para $|z| < 1$ y

$$\lim_{z \rightarrow e^{i\theta_0}} P_U(z) = U(\theta_0). \quad (7.10)$$

Demostación:

El hecho de que sea armónica ???

Para estudiar el comportamiento en la frontera, sean C_1 y C_2 arcos complementarios del círculo unitario y denotemos por U_1 la función que coincide con U en C_1 y que vale cero en C_2 . Análogamente denotemos por U_2 a la función que vale U en C_2 y cero en C_1 . Claramente $P_U = P_{U_1+U_2}$. Dado que P_{U_1} puede ser escrita como una integral de línea sobre C_1 , se tiene que es armónica en todas partes salvo en el arco cerrado C_1 ". La expresión

$$\operatorname{Re} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} = \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2},$$

es nula en $|z| = 1$ para $z \neq e^{i\theta}$. Se sigue que P_{U_1} es cero en el arco abierto C_2 , y dado que es continua $P_{U_1} \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow e^{i\theta} \in C_2$.

Para probar (7.10) supongamos sin pérdida de generalidad que $U(\theta_0) = 0$, pues si no basta reemplazar U por $U - U(\theta_0)$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar C_1 y C_2 tales que $e^{i\theta_0}$ es un punto interior de C_2 y $|U(\theta_0)| < \varepsilon/2$ para $e^{i\theta} \in C_2$. Baj esta condición $|U_2(\theta)| < \varepsilon/2$ para todo θ , luego $|P_{U_2}(z)| < \varepsilon/2$ para todo $|z| < 1$. Por otro lado, dado que U_1 es continua y se anula en $e^{i\theta_0}$ existe δ tal que $|P_{U_1}(z)| < \varepsilon/2$ para $|z - e^{i\theta_0}| < \delta$. Se sigue que $|P_u(z)| \leq |P_{U_1}| + |P_{U_2}| < \varepsilon$ cuando

$|z| < 1$ y $|z - e^{i\theta_0}| < \delta$, lo que concluye la demostración. \square

Interpretación Geométrica de la Fórmula de Poisson????

Ejercicio 7.4.

1. Pruebe que una función que es armónica y acotada en el semiplano superior, continua en el eje real, puede ser representada como una integral de Poisson.
2. Si $f(z)$ es analítica en todo el plano y si $z^{-1} \operatorname{Re}(f(z)) \rightarrow 0$ cuando $z \rightarrow \infty$, entonces f es constante. *Hint: Use (7.9)*
3. Si $u(z)$ es armónica para $0 < |z| < \rho$ y $\lim_{z \rightarrow 0} z(u(z)) = 0$, entonces u puede ser escrita de la forma $u(z) = \alpha \log |z| + u_0(z)$, donde α es constante y u_0 es una función armónica en $|z| < \rho$.

7.5. Principio de Reflexión de Schwarz para funciones armónicas

Teorema 7.6.

Sea Ω una región y denotemos por $\Omega^+ = \Omega \cap \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$ y a σ la parte del eje real en Ω . Supongamos que $v(x)$ es continua en $\Omega^+ \cup \sigma$, armónica en Ω^+ y nula en σ . Entonces v tiene una extensión armónica en Ω que satisface la relación de simetría $v(\bar{z}) = -v(z)$. Bajo las mismas condiciones, si v es la parte imaginaria de una función analítica $f(z)$ en Ω^+ , entonces $f(z)$ tiene una extensión analítica que satisface $f(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

Demostración:

Sea $V(z)$ la función que es igual a $v(z)$ en Ω^+ , 0 en σ y $-v(\bar{z})$ en el reflejado de Ω^+ . Debemos probar que $V(z)$ es armónica en Ω , pues es claro que $-v(\bar{z})$ es armónica. Para un punto $x_0 \in \sigma$ consideremos el disco centrado en x_0 contenido en Ω y sea P_V la integral de Poisson con respecto a este disco, formada por los valores de frontera de V . La diferencia $V - P_V$ es armónica en la mitad superior del disco. Se anula en el semicírculo por el teorema 7.5, y también se anula en el diámetro, pues v tiende a cero por definición y P_V se anula por simetría. Por el principio del máximo y mínimo lo anterior implica que $V = P_V$ en la mitad superior del disco y el mismo desarrollo se hace para probar la igualdad en la mitad inferior. Así concluimos que V es armónica en todo el disco y en particular en x_0 .

Para probar el resto del teorema, consideremos un disco con centro en σ . Ya hemos extendido v a todo el disco, y v es la conjugada armónica de $-u_0$ en el mismo disco, la cual podemos normalizar

para que $u_0 = \operatorname{Re} f(z)$ en la parte superior el disco. Consideremos $U_0(z) = u_0(z) - u_0(\bar{z})$, la cual en el eje real cumple que $\partial U_0/\partial x = 0$ y además

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = 2 \frac{\partial u_0}{\partial y} = -2 \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Se sigue que la función analítica $\partial U_0/\partial x - i\partial U_0/\partial y$ se anula en el eje real y por ende es nula. De esta forma U_0 es constante, y la constante es evidentemente igual a cero, con lo cual hemos probado que $u_0(z) = U_0(\bar{z})$.

La construcción puede ser repetida para discos arbitrarios, por lo que se concluye el teorema. \square

Ejercicio 7.5.

1. Muestre que toda función que es analítica en una región simétrica Ω puede ser escrita de la forma $f_1 + if_2$, donde f_1, f_2 son analíticas en Ω y reales en el eje real.
2. Si $f(z)$ es analítica en $|z| \leq 1$ y satisface $|f| = 1$ cuando $|z| = 1$, entonces $f(z)$ es racional.

Capítulo 8

Teorema de Riemann

8.1. El Teorema de Riemann

Teorema 8.1. (*El Teorema de Riemann*)

Sean Ω_1 y Ω_2 dos dominios simplemente conexos en \mathbb{C} , $\Omega_1 \neq \mathbb{C}$, $\Omega_2 \neq \mathbb{C}$. Sean $z_1 \in \Omega_1$, $z_2 \in \Omega_2$, entonces existe una única función $\varphi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ biyectiva analítica (conforme) tal que $\varphi(z_1) = z_2$ y $\varphi'(z_1) > 0$.

Demostración:

Basta demostrar el teorema en el caso $\Omega_1 = \Omega \neq \mathbb{C}$ simplemente conexo, y $\Omega_2 = D(0, 1)$, con $z_2 = 0$. Fijamos $z_0 \in \Omega$, queremos demostrar que existe una única función $\varphi : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ analítica biyectiva tal que $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) > 0$.

Veamos que la función φ es única. Sean $\varphi_1, \varphi_2 : \Omega \rightarrow D(0, 1)$ tales que $\varphi_1(z_0) = 0$, $\varphi_1'(z_0) > 0$ y $\varphi_2(z_0) = 0$, $\varphi_2'(z_0) > 0$. Si existen entonces la función $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$, y además $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(0) = 0$. Por el Lema de Schwarz $|(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z)| \leq |z|$. De manera análoga $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : D(0, 1) \rightarrow D(0, 1)$ y $|(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(z)| \leq |z|$. Por lo tanto $|(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(z)| = |z|$ y $|(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(z)| = |z|$, y así $(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1})(z) = ze^{i\theta}$, pero como $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})'(0) = e^{i\theta} > 0$, entonces $e^{i\theta} = 1$.

Probaremos ahora la existencia de φ .

Sea $\mathcal{F} = \{f : \Omega \rightarrow D(0, 1) : f \text{ es analítica, } f(z_0) = 0, f'(z_0) > 0\}$.

Vamos a probar que si $\varphi'(z_0) = \sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_0)$, entonces φ es la función buscada. La demostración consta de cuatro pasos:

- (a) $\mathcal{F} \neq \emptyset$:
- (b) $\sup_{f \in \mathcal{F}} f'(z_0) < \infty$:

(c) $\varphi(z_0) = 0$:

(d) φ es sobreyectiva:

Demostración de (a):

Si Ω^c contiene a $D(w_0, r)$, entonces la función

$$f(z) = \frac{r}{z - w_0} e^{i\theta}$$

está en \mathcal{F} .

En el caso general. Sea $w_0 \in \Omega^c$, la función $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$

$$g(z) = \sqrt{\frac{z - w_0}{z_0 - w_0}} g(z_0) = 1,$$

está bien definida pues $\frac{z - w_0}{z_0 - w_0}$ no contiene al cero cuando $z \in \Omega$.

Verifiquemos ahora que existe $\eta > 0$ tal que $|g(z) + 1| > \eta$ para todo $z \in \Omega$. Si no fuera así, tendríamos que existiría una sucesión z_n en Ω tal que $g(z_n) \rightarrow -1$, con lo que $g^2(z_n) \rightarrow 1$, y así $\frac{z_n - w_0}{z_0 - w_0} \rightarrow 1$, por lo que $z_n \rightarrow z_0$, contradiciendo el hecho de que $g(z_0) = 1$.

Por lo tanto podemos definir una función

$$f(z) = \left(\frac{\eta e^{i\theta}}{g(z) + 1} \right),$$

la cual pertenece a \mathcal{F} .

Probemos (b):

Sea $f \in \mathcal{F}$ y $d = \text{dist}(z_0, \Omega^c) > 0$. Entonces

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, \frac{d}{2})} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2} dw \right|, \quad (8.1)$$

con lo que

$$|f'(z_0)| \leq \frac{4}{d}, \text{ porque } |f| \leq 1.$$

Consideremos $f_n \in F$, tal que $f'_n(z_0) \rightarrow \sup_{f \in F} f'(z_0)$. Sea K_m una sucesión creciente (en el sentido de la inclusión) de compactos tal que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_m = \Omega$. Sea K_1 tal que $z_0 \in \text{Int}(K_1)$, definimos $d_1 = \text{dist}(z_0, \Omega^c)$, entonces para todo $w \in \Omega$ $\text{dist}(w, \Omega^c) \geq d_1$, procediendo como en (8.1) obtenemos $|f'_n(w)| \leq \frac{4}{d_1}$. Por lo tanto tenemos una sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de funciones equicontinuas en K_1 . Entonces por Arzela-Ascoli existe una subsucesión f_{n_1} que converge uniformemente a φ en K_1 . Así $f'_{n_1} \rightarrow \sup_{f \in F} f'(z_0)$, y $f'_{n_1}(z_0) \rightarrow \varphi'(z_0) > 0$ (la cual es inyectiva, pues el límite de funciones inyectivas es inyectiva o constante, pero como $\varphi'(z_0) > 0$, φ es inyectiva).

Procediendo como en el paso anterior existe una subsucesión $\{n_2\} \subset \{n_1\}$ tal que $f_{n_2} \rightarrow \varphi_2$ uniformemente en K_2 , con $\varphi_2 = \varphi$ en K_1 . Así podemos definir una subsucesión $\{n_m\}$ tal que

$f_{n_m} \rightarrow \varphi_m$ en K_m y $\varphi_n|_{K_i} = \varphi_i$ para todo $i \leq n$.

Sea $\varphi \rightarrow \overline{D(0,1)}$ dada por $\varphi|_{K_m} = \varphi_m$. Es claro que la subsucesión $f_{n_n} \rightarrow \varphi$ uniformemente en compactos de Ω . Como f_{n_n} es inyectiva y $\varphi'(z_0) > 0$, entonces por el corolario del teorema de Henwitz φ es inyectiva y $|\varphi| < 1$.

Probemos (c):

Si $\varphi(z_0) = \alpha$, entonces la función

$$g(z) = \frac{\varphi(z) - \alpha}{1 - \varphi(z)\bar{\alpha}},$$

cumple que

$$g'(z_0) = \frac{\varphi'(z_0)}{1 - |\alpha|^2} > \varphi'(z_0),$$

lo cual sería una contradicción, y por lo tanto $\varphi(z_0) = 0$.

Ahora basta probar (d):

Sea $w \in D(0,1)$ tal que $\varphi(z) \neq w$ para todo $z \in \Omega$, con $w = -t^2 e^{i\theta}$ para algún $0 < t < 1$.

Sea $\hat{\varphi} \equiv e^{-i\theta}\varphi$, con lo que $\hat{\varphi}(z) = -t^2$ para cualquier $z \in \Omega$. Definamos la función

$$f_1(z) = \frac{\hat{\varphi}(z) + t^2}{1 + t^2\hat{\varphi}(z)},$$

la cual es distinta de cero para todo $z \in \Omega$, como Ω es simplemente conexo podemos definir la función $f_2 : \Omega \rightarrow D(0,1)$

$$f_2(z) = \frac{\sqrt{f_1(z)} - t}{1 - t\sqrt{f_1(z)}},$$

que cumple que $f_2(z_0) = 0$. Es fácil ver que $|f_2'(z_0)| > |\varphi'(z_0)|$. ■

8.2. Comportamiento en la Frontera

Definición 8.1.

Diremos que $\{z_n\} \subseteq \Omega$ tiende a la frontera si para todo $z \in \Omega$ existen $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $|z - z_n| > \varepsilon$ para cualquier $n \geq n_0$. De manera análoga diremos que la función continua $z(t) \in \Omega$, con $t \in [0,1)$ tiende a la frontera si para todo $z \in \Omega$ existen $\varepsilon > 0$, $t_0 < 1$ tales que $|z(t) - z| > \varepsilon$ para todo $t > t_0$.

Proposición 8.1.

Sean Ω, Ω' dos regiones en \mathbb{C} , y $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ un homeomorfismo, si $\{z_n\}$ tiende a la frontera de Ω , entonces $\{f(z_n)\}$ tiende a la frontera de Ω' .

Demostración:

Sea $w \in \Omega'$, entonces existe $z \in \Omega$ tal que $f(z) = w$. Sabemos que existen $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tales

que $|z - z_n| > \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Tenemos que $f(D(z, \varepsilon))$ contiene una vecindad de w , es decir, existe $\delta > 0$ tal que $D(w, \delta) \subset f(D(z, \varepsilon))$. Por lo tanto si $n \geq n_0$

$$|f(z_n) - w| > \delta.$$

